

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

§ 1. Общая часть. Вывод уравнения поля

Математическое построение общей теории относительности первоначально было полностью основано на метрике, т. е. на инварианте

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu. \quad (1)$$

Величины $g_{\mu\nu}$ и их производные изображали метрическое, а также гравитационное поле. Напротив, компоненты электрического поля оставались по отношению к ним совершенно чужеродными. Желание свести гравитационное и электромагнитное поля в одно единое по своей сущности поле в последние годы владеет умами теоретиков.

Навстречу этим стремлениям идет математическое открытие, сделанное Леви-Чивитой и Вейлем: тензор кривизны Римана, имеющий фундаментальное значение для общей теории относительности, наиболее естественным путем можно получить с помощью закона «параллельного переноса» векторов («аффинная связь»):

$$\delta A^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx_\beta. \quad (2)$$

Этот закон сводится к формуле (1), если постулировать, что длина вектора при параллельном переносе не меняется; однако этот шаг не является логически необходимым. Впервые это обстоятельство обнаружил Г. Вейль, построивший на нем обобщение римановой геометрии, которое, по его мнению, содержало теорию электромагнитного поля. Вейль придает инвариантный смысл не длине линейного элемента или вектора, а только отношению длин двух линейных элементов или векторов, исходящих из одной точки. Параллельный перенос (2) должен быть таким, чтобы это от-

* *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1923, 32—38.

ношение сохранялось. Основу этой теории можно назвать полуметрической. По моему убеждению, таким путем нельзя прийти к теории, имеющей физический смысл. С чисто логической точки зрения также представляется более удовлетворительным основывать теорию только на равенстве (2), даже если понадобится отказаться от инварианта (1) как базиса теории.

Это сделал Эддингтон, заметивший, что, наоборот, метрический инвариант типа (1), в физическом существовании которого можно не сомневаться, сводится к уравнению (2). Именно, из равенства (2) следует существование римановского тензора четвертого ранга:

$$R_{k,lm}^i = -\frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x_m} + \Gamma_{\tau l}^i \Gamma_{km}^{\tau} + \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x_l} - \Gamma_{\tau m}^i \Gamma_{kl}^{\tau},$$

а из него после свертывания по индексам i и m образуется римановский тензор второго ранга

$$R_{kl} = -\frac{\partial \Gamma_{kl}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma_{k\beta}^{\alpha} \Gamma_{l\alpha}^{\beta} + \frac{\partial \Gamma_{k\alpha}^{\alpha}}{\partial x_l} - \Gamma_{kl}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}, \quad (3)$$

фундаментальное значение которого в теории гравитации хорошо известно. Таким образом, выражение

$$R_{kl} dx_k dx_l$$

является линейным элементом, который Эддингтон считает метрическим инвариантом.

Величины R_{kl} при произвольно выбранных символах $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, удовлетворяющих только условию симметрии

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}, \quad (4)$$

не образуют симметричного тензора. Разлагая тензор (R_{kl}) на симметричный и антисимметричный тензоры, согласно равенству

$$R_{kl} = g_{kl} + \phi_{kl}, \quad (5)$$

где

$$\phi_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{k\alpha}^{\alpha}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma_{l\alpha}^{\alpha}}{\partial x_k} \right), \quad (6)$$

мы можем отождествить тензор (g_{kl}) с метрическим тензором g_{kl} , а тензор (ϕ_{kl}), удовлетворяющий соотношению

$$\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_m} + \frac{\partial \phi_{lm}}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_{mk}}{\partial x_l} = 0, \quad (7)$$

с тензором электромагнитного поля.

Сделаем одно замечание в пользу ограничивающего условия симметрии (4). Закон параллельного переноса ковариантного вектора следует из равенства (2) при естественном требовании, чтобы скалярное произведение контравариантного и ковариантного векторов не изменялось при параллельном переносе. Отсюда следует закон

$$\delta B_\mu = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha B_\alpha dx_\beta.$$

Исходя из этого равенства, обычным способом доказывается тензорный характер величины

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha B_\alpha.$$

Тогда, учитывая тензорный характер величины $\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha B_\alpha$, можно прийти к выводу о том, что выражение $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$ образует тензор. Отсюда и из сказанного выше следует, что тензорным характером обладает и величина

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha B_\alpha.$$

Следовательно, условие симметрии (4) необходимо, чтобы обеспечить однозначность ковариантной производной вектора.

В теории Эддингтона в качестве неизвестных функций координат выступают 40 величин $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, аналогично тому, как в первоначальной теории относительности имеются 14 величин $g_{\mu\nu}$ и ϕ_μ . Но проблема, не решенная Эддингтоном, заключается в том, чтобы найти уравнения, необходимые для определения этих величин. Самый удобный метод для этого связан с принципом Гамильтона. Пусть $\mathfrak{H}$ — скалярная плотность, зависящая только от величин Γ и их первых производных; тогда для каждой непрерывной вариации величин $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, исчезающей на границе области интегрирования, соблюдается принцип

$$\delta \left\{ \int \mathfrak{H} d\tau \right\} = 0. \quad (8)$$

Поэтому уравнения поля, которые вследствие тензорного характера вариаций $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ также обладают тензорным характером, гласят

$$0 = \mathfrak{H}_\alpha^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Gamma_{\mu\nu, \sigma}^\alpha} \right), \quad (9)$$

где введено обозначение

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\sigma} = \Gamma_{\mu\nu, \sigma}^\alpha.$$

При этом предполагается, что $\mathfrak{H}$ есть некоторая (алгебраическая) функция величин $R_{k,lm}^i$. Наша главная задача заключается в выборе этой функции.

Существуют такие тензорные плотности, которые являются рациональными функциями второй степени по величинам $R_{k,lm}^i$; они могут быть получены с помощью тензорной плотности δ^{iklm} , компоненты которой равны 1 или -1 , в зависимости от того, образуют индексы $iklm$ четную или нечетную перестановку цифр 1, 2, 3, 4. Такой тензорной плотностью является, например,

$$R_{k,lm}^i R_{i,\sigma\tau}^k \delta^{lm\sigma\tau}.$$

Однако я считаю правильным ограничиться такими тензорными плотностями, которые образуются из свернутого тензора R_{kl} или из величин S_{kl} и ϕ_{kl} , поскольку мы можем придавать физический смысл только этим величинам. Тогда мы должны допускать и иррациональные функции, к чему мы уже привыкли в общей теории относительности (например, $\sqrt{-g}$). Но в этом случае существуют еще различные возможности, из которых наиболее интересной нам представляется следующая:

$$\mathfrak{H} = 2\sqrt{-|R_{kl}|}. \quad (10)$$

Это выражение, являющееся аналогом тензорной плотности элемента объема, образовано из величин R_{kl} без расщепления на симметричную и антисимметричную части. Если эта функция Гамильтона окажется хорошей, то теория придет идеальным способом к объединению гравитации и электричества в одно понятие, причем не только оба вида поля будут определяться единичными величинами Γ , но и функция Гамильтона будет единой, тогда как до сих пор она состояла из слагаемых, логически независимых одно от другого.

Ниже будет показано, что эта теория, по-видимому, хороша.

§ 2. Отношение новой теории к прежним результатам общей теории относительности

Сделаем одно замечание по поводу равенства (5). Выражение $g_{kl}dx_k dx_l$ представляет собой метрический инвариант для «космического» масштаба. Если инвариант $g_{kl}dx_k dx_l$ должен представлять квадрат длины для масштаба человеческих размеров, то следует положить

$$\lambda^2 R_{kl} = g_{kl} + \phi_{kl}, \quad (5a)$$

где λ — очень большое число. Поэтому в соответствии с формулой (3) имеем

$$\frac{1}{\lambda^2} g_{kl} = -\frac{\partial \Gamma_{kl}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{k\alpha}^\alpha}{\partial x_l} + \frac{\partial \Gamma_{l\alpha}^\alpha}{\partial x_k} \right) + \Gamma_{k\beta}^\alpha \Gamma_{l\alpha}^\beta - \Gamma_{kl}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \phi_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{k\alpha}^\alpha}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma_{l\alpha}^\alpha}{\partial x_k} \right). \quad (12)$$

Произведем теперь варьирование, указанное в уравнении (8), считая, что δ является пока произвольной функцией величин g_{kl} и ϕ_{kl} . Тогда имеем

$$\delta \delta = \frac{\partial \delta}{\partial g_{kl}} \delta g_{kl} + \frac{\partial \delta}{\partial \phi_{kl}} \delta \phi_{kl} = \mathfrak{s}^{kl} \delta g_{kl} + \mathfrak{f}^{kl} \delta \phi_{kl}, \quad (13)$$

причем $\mathfrak{s}^{kl}$ — симметричная, а $\mathfrak{f}^{kl}$ — антисимметричная тензорные плотности. С учетом уравнения (11) — (13) уравнение (8) принимает вид

$$0 = \int d\tau \delta \Gamma_{kl}^\alpha \left\{ \mathfrak{s}_{;\alpha}^{kl} - \frac{1}{2} \delta_\alpha^k \mathfrak{s}_{;\sigma}^{l\sigma} - \frac{1}{2} \delta_\alpha^l \mathfrak{s}_{;\sigma}^{k\sigma} - \frac{1}{2} \delta_\alpha^k \frac{\partial \mathfrak{f}^{l\sigma}}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2} \delta_\alpha^l \frac{\partial \mathfrak{f}^{k\sigma}}{\partial x_\sigma} \right\}. \quad (14)$$

Поскольку величины ϕ_{kl} мы рассматриваем как ковариантный тензор электромагнитного поля, величину $\mathfrak{f}^{kl}$ следует считать контравариантной тензорной плотностью электромагнитного поля, и выражение

$$i^l = \frac{\partial \mathfrak{f}^{l\sigma}}{\partial x_\sigma} \quad (15)$$

— плотностью тока. В равенстве (14) величина $\mathfrak{s}_{;\alpha}^{kl}$ означает ковариантную производную тензора $\mathfrak{s}^{kl}$, определяемую формулой

$$\mathfrak{s}_{;\alpha}^{kl} = \frac{\partial \mathfrak{s}^{kl}}{\partial x_\alpha} + \mathfrak{s}^{\sigma l} \Gamma_{\sigma\alpha}^k + \mathfrak{s}^{k\sigma} \Gamma_{\sigma\alpha}^l - \mathfrak{s}^{kl} \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma. \quad (16)$$

Из равенства (14) следует, что

$$0 = \mathfrak{s}_{;\alpha}^{kl} - \frac{1}{2} \delta_\alpha^k \mathfrak{s}_{;\sigma}^{l\sigma} - \frac{1}{2} \delta_\alpha^l \mathfrak{s}_{;\sigma}^{k\sigma} - \frac{1}{2} \delta_\alpha^k i^l - \frac{1}{2} \delta_\alpha^l i^k. \quad (17)$$

Комбинируя это равенство с соотношением, получаемым при свертывании по индексам α и l ,

$$0 = 3\mathfrak{s}_{;\sigma}^{l\sigma} + 5i^l, \quad (18)$$

находим, наконец, конечный результат варьирования

$$0 = \mathfrak{s}_{;\alpha}^{kl} + \frac{1}{3} \delta_\alpha^k i^l + \frac{1}{3} \delta_\alpha^l i^k. \quad (19)$$

Мы получили 40 уравнений, из которых можно вычислить величины Γ . Для этого введем тензоры s_{kl} или s^{kl} , соответствующие тензорной плотности $\mathfrak{s}^{kl}$, причем эти тензоры находятся в таком же отношении друг к другу, в каком в общей теории относительности стоят ковариантный и контравариантный фундаментальные тензоры ($g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$). Таким образом, должны существовать соотношения

$$\mathfrak{s}^{kl} = s^{kl} \sqrt{-|s_{ik}|}, \quad (20)$$

$$s_{\alpha i} s^{\beta i} = \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (21)$$

Далее положим

$$i^l = \sqrt{-|s_{ik}|} i^l = \sqrt{-s} i^l, \quad (22)$$

$$i_l = s_{l\alpha} i^{\alpha}. \quad (23)$$

Выполнив вычисления, известные из общей теории относительности, получим

$$\Gamma_{kl}^{\alpha} = \frac{1}{2} s^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial s_{k\beta}}{\partial x_l} + \frac{\partial s_{l\beta}}{\partial x_k} - \frac{\partial s_{kl}}{\partial x_{\beta}} \right) - \frac{1}{2} s_{kl} i^{\alpha} + \frac{1}{6} \delta_{kl}^{\alpha} i_l + \frac{1}{6} \delta_l^{\alpha} i_k. \quad (24)$$

Эти значения величин Γ следует подставлять в уравнения (11) и (12). Так как функции $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{f}$ в силу уравнения (13) можно выразить через величины g и ϕ , выбирая соответствующую функцию Гамильтона, то после указанной подстановки уравнения (11) и (12) оказываются достаточными для определения неизвестных функций. Для того чтобы физически оправдать выбор функции Гамильтона в виде уравнения (10), мы рассмотрим сначала случай, когда электромагнитное поле отсутствует. Тогда, в соответствии с уравнениями (10) и (13), имеем

$$\mathfrak{s}^{kl} = g^{kl} \sqrt{-g},$$

$$\mathfrak{f}^{kl} = 0,$$

причем g^{kl} , g и g_{kl} имеют смысл, известный из общей теории относительности. Следовательно, уравнение (24) принимает тогда известный вид

$$\Gamma_{kl}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{k\beta}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{l\beta}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_{\beta}} \right), \quad (24a)$$

что вместе с уравнением (11) точно воспроизводит уравнение общей теории относительности для гравитационного поля в пустоте с учетом космологического члена, но в отсутствие электромагнитного поля. Это является сильным аргументом в пользу нашего выбора функции Гамильтона и вообще в пользу применимости теории.

Перейдем теперь к случаю, когда электромагнитное поле не равно нулю. Из уравнений (12) и (24) сначала находим:

$$\frac{1}{\lambda^2} \phi_{kl} = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial i_k}{\partial x_l} - \frac{\partial i_l}{\partial x_k} \right). \quad (25)$$

Отсюда становится ясно, что при нулевой плотности тока электрическое поле невозможно. Но множитель $\frac{1}{\lambda^2}$ чрезвычайно мал; это приводит к тому, что конечные значения величин ϕ_{kl} возможны только при очень малых, практически равных нулю ковариантных плотностях тока. Следовательно, плотность тока всюду, за исключением сингулярных областей, обращается в нуль. Таким образом, очень грубо выполняются уравнения

$$\frac{\partial f^{kl}}{\partial x_l} = 0, \dots, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial \phi_{l\sigma}}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_{\sigma k}}{\partial x_l} = 0, \quad (27)$$

причем последнее уравнение с учетом равенства (12) является строгим. Соотношение между ϕ и f при нашем выборе функции Гамильтона фиксируется тем, что величины

$$r^{kl} = g^{kl} + f^{kl}$$

равны минорам величин

$$r_{kl} = g_{kl} + \phi_{kl},$$

умноженным на квадратный корень из определителя r_{kl} , взятого со знаком минус. Обозначая эти нормированные миноры символом r^{kl} , имеем

$$\delta r = r r^{kl} \delta r_{kl}$$

и, следовательно,

$$\delta \mathfrak{f} = \delta (2 \sqrt{-r}) = \frac{1}{\sqrt{-r}} \delta (-r) = \sqrt{-r} r^{kl} \delta r_{kl} = \sqrt{-r} r^{kl} (\delta g_{kl} + \delta \phi_{kl}),$$

чем и доказывается сделанное утверждение.

Приближенное вычисление величин f^{kl} оказывается простым в том важном случае, когда значения r_{kl} бесконечно мало отличаются от постоянных значений компонент δ_{kl} (1 или 0). В этом случае в первом приближении (как обычно, временная координата выбрана мнимой) имеем

$$f^{kl} = \phi_{kl}.$$

Этот результат в связи с формулами (26) и (27) показывает, что в первом приближении (для достаточно слабых полей) выполняются уравнения Максвелла для пустого пространства.

Охватывает ли наша теория также и электрические элементарные образования, можно решить только после строгого рассмотрения случая центрально-симметричного статического поля. Во всяком случае, уравнение (25) показывает, что конечные значения для плотности тока i^l возможны только при условии, если одновременно i_l становится малой величиной порядка $1/\lambda^2$; таким образом, не исключается существование электронов без сингулярности. Примечательно, что, согласно этой теории, положительные и отрицательные электрические заряды могут отличаться не только знаком¹.

Изложенное выше исследование показывает, что общая идея Эддингтона в соединении с принципом Гамильтона приводит к теории почти полностью свободной от произвола, отражающей наши современные знания о гравитации и электричестве и объединяющей оба вида поля по-настоящему, законченным образом.

Гаруна Мару, январь 1923 г.

¹ Ср. замечание на стр. 144, опровергающее это утверждение. — Прим. ред.