

ИМЕЕТ ЛИ ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ КЛАССИЧЕСКИЙ НЬЮТОНОВСКИЙ ПРЕДЕЛ?

В. И. Денисов, А. А. Логунов

Рассмотрены теория гравитации Ньютона и ньютоновское приближение общей теории относительности. Показано, что в общей теории относительности отсутствует ньютоновский предел для интегралов движения вещества и гравитационного поля.

В настоящее время общепринятым считается утверждение, что теория Эйнштейна в предельном случае слабого гравитационного поля и медленного движения создающих это поле масс переходит в теорию гравитации Ньютона, давая все ее соотношения и уравнения. Это утверждение означает, что в общей теории относительности (ОТО) из уравнений движения вещества и уравнений поля в ньютоновском приближении можно получить выражения для энергии, импульса, момента импульса и т. д. и эти выражения совпадают с соответствующими выражениями теории гравитации Ньютона.

Однако, как показано в работе [1], из точных уравнений движения вещества и уравнений Эйнштейна следует существование только нулевых интегралов движения, поэтому и на любом этапе приближенных вычислений, в том числе и в ньютоновском приближении, эти интегралы движения теории Эйнштейна должны быть равны нулю. Отсюда, в частности, следует, что **ОТО не имеет классического ньютоновского предела**, поскольку интегралы движения теории гравитации Ньютона и ньютоновского приближения теории Эйнштейна не совпадают.

Для того чтобы убедиться в этом, проведем подробное сравнение ньютоновского приближения теории Эйнштейна с теорией гравитации Ньютона. Рассмотрим теорию Ньютона, а также ньютоновское приближение ОТО и выясним, в чем состоит принципиальное различие этих двух теорий при получении интегралов движения.

Для наших целей удобно рассматривать задачу астрономического типа. Будем считать, что компоненты тензора энергии-импульса вещества равны нулю во всем пространстве, кроме некоторых областей. Внутри каждой такой области в качестве модели вещества будем рассматривать идеальную жидкость, тензор энергии-импульса которой имеет вид

$$(1) \quad T^{in} = [p + E] u^i u^n - p g^{in},$$

где $E = \rho(1 + \Pi/c^2)$ — полная плотность массы идеальной жидкости, $u^i = dx^i/ds$ — четырехмерная скорость, p — изотропное давление, ρ — плотность

массы идеальной жидкости, $\rho\Pi$ — плотность внутренней энергии идеальной жидкости.

В теории Ньютона гравитационное поле описывается скалярным потенциалом U , удовлетворяющим уравнению гравитационного поля,

$$(2) \quad \Delta U = -4\pi\gamma\rho,$$

где γ — ньютонова постоянная тяготения. Следует подчеркнуть, что поскольку теория гравитации Ньютона является нерелятивистской теорией, то ее применение должно быть ограничено только теми случаями, в которых релятивистские поправки не играют роли. В нашем случае скорости всех тел системы малы по сравнению со скоростью света, и это позволяет нам использовать теорию гравитации Ньютона.

Если внешние негравитационные силы отсутствуют, то уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера) в теории Ньютона принимают вид [2]

$$(3) \quad \rho \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + v^\beta \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \right) = \gamma^{\alpha\beta} \left(-\rho \frac{\partial U}{\partial x^\beta} + \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right),$$

где v^α — компоненты трехмерной скорости среды, $\gamma_{\alpha\beta}$ — метрический тензор псевдоевклидова пространства-времени с сигнатурой $(+, -, -, -)$.

К этим уравнениям необходимо добавить следующие:

уравнение неразрывности идеальной жидкости

$$(4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\rho v^\beta) = 0,$$

уравнение для удельной внутренней энергии Π

$$(5) \quad \rho \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + v^\beta \frac{\partial \Pi}{\partial x^\beta} \right) = -p \partial_\alpha v^\alpha,$$

условие баротропности процесса

$$(6) \quad \rho = \rho(p).$$

Тогда система уравнений (2)–(6) будет полной, позволяющей по заданным начальным и граничным условиям находить движение вещества и создаваемое им гравитационное поле.

Для получения интеграла энергии в теории Ньютона скалярно умножим уравнения движения вещества (3) на $-v_\alpha$ и сложим полученное выражение с уравнением неразрывности (4), умноженным на c^2 . В результате будем иметь

$$(7) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho c^2 + \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{v^2}{2} + \rho v^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \\ & = \rho v^\alpha \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} - v^\alpha \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} - c^2 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho v^\alpha), \end{aligned}$$

где $v^2 = -v_\alpha v^\alpha$.

Так же как и в классической механике, для получения интеграла энергии в теории гравитации Ньютона необходимо наиболее полно выделить

в этом выражении производные по времени. Такое выделение, вообще говоря, может быть проведено неоднозначным образом. Поэтому после использования уравнений (2), (4) и (5) равенство (7) запишем в самом общем виде, отражающем эту неоднозначность:

$$(8) \quad c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + \frac{a-1}{2} U \right) \right] + \frac{a}{8\pi\gamma c^2} \partial_\alpha U \partial^\alpha U \right\} =$$

$$= -c^2 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \rho v^\alpha \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi - U \right) \right] + \frac{p v^\alpha}{c^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8\pi\gamma c^2} \left[(1-a) \frac{\partial U}{\partial t} \partial^\alpha U - (1+a) U \partial^\alpha \frac{\partial U}{\partial t} \right] \right\},$$

где a — произвольное число.

Следует отметить, что использование уравнения гравитационного поля (2) не позволяет уже больше выделить производную по времени в выражении (8), так как дальнейшее преобразование в правой части этого выражения будет сводиться лишь к конкретному выбору того или иного значения постоянной a . Однако, как мы увидим ниже, все значения a в выражении (8) являются эквивалентными интегрально, поскольку приводят к одной и той же сохраняющейся величине, поэтому дальнейшее преобразование правой части соотношения (8) производить нецелесообразно.

Проинтегрируем теперь выражение (8) по всему пространству. Преобразуя объемный интеграл, стоящий в правой части, в поверхностный и учитывая, что при $r \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} = O\left(\frac{1}{r^4}\right); \quad U \frac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha \partial t} = O\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

получим

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int dV \left\{ \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + \frac{a-1}{2} U \right) \right] + \frac{a}{8\pi\gamma c^2} \partial_\alpha U \partial^\alpha U \right\} = 0.$$

В силу очевидного равенства

$$(10) \quad \int dV \partial_\alpha U \partial^\alpha U = \int dV [\partial_\alpha (U \partial^\alpha U) - 4\pi\gamma \rho U] = -4\pi\gamma \int \rho U dV$$

выражение (9) перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dV \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi - \frac{1}{2} U \right) \right] = 0.$$

Отсюда следует, что в теории гравитации Ньютона величина

$$(11) \quad I = \int dV \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi - \frac{1}{2} U \right) \right]$$

является интегралом движения.

Рассмотрим теперь общепринятый в литературе способ построения ньютоновского приближения теории Эйнштейна. Как известно [3], в ОТО гравитационное поле описывается метрическим тензором риманова пространства-времени g_{ni} , который удовлетворяет уравнениям Эйнштейна:

$$(12) \quad R_{ni} - \frac{1}{2} g_{ni} R = (8\pi\gamma/c^4) T_{in}.$$

Так как метрический тензор g_{in} входит нелинейным образом в уравнения Эйнштейна, а правая часть этих уравнений также зависит от g_{ni} , то определение метрического тензора и построение тензора энергии-импульса вещества необходимо производить совместно. Однако точное решение этой задачи удастся провести лишь в немногих частных случаях, с достаточно жесткими требованиями относительно распределения и движения вещества внутри источника. В остальных же случаях неизбежно приходится использовать приближенные методы решения уравнений Эйнштейна.

Наиболее распространенным из них является метод последовательных приближений. Этот метод применяется и при построении постньютоновского приближения ОТО. Хотя законность использования метода последовательных приближений для получения нестационарных решений уравнений Эйнштейна вызывает серьезные сомнения, тем не менее мы оставим этот вопрос без обсуждения, поскольку и в этом случае можно показать, что ОТО не имеет классического ньютоновского предела.

Рассмотрим кратко схему построения постньютоновского приближения теории Эйнштейна, выписывая необходимые для дальнейшего соотношения ОТО. Вычисления будем проводить в гармонической координатной системе Фока [4], используя его обозначения. Следует отметить, что такой выбор координат не является принципиальным, поскольку все выкладки могут быть проведены аналогичным путем и в любой другой координатной системе.

Как известно [5], в пределах Солнечной системы максимальные значения гравитационного потенциала, квадрата характерной скорости, удельной упругой энергии и удельного давления имеют примерно одинаковый порядок малости $\sim \varepsilon^2$, где $\varepsilon \sim 10^{-3}$ — некоторый безразмерный параметр. Это обстоятельство позволяет проводить решение уравнений Эйнштейна (12) последовательными этапами, каждый из которых соответствует формальному разложению точных уравнений задачи по степеням этого параметра.

В исходном приближении метрика принимается псевдоевклидовой, что соответствует полному пренебрежению влиянием гравитационного поля на вещество. Тензор энергии-импульса в этом приближении должен быть взят с точностью, соответствующей пренебрежению гравитационным полем (т. е. с пренебрежением членами $\sim \rho \varepsilon^2$): $c^2 T^{00} = \rho$; $c^2 T^{0i} = \rho v_i$; $c^2 T^{ik} = O(\varepsilon^2)$.

Используя условия гармоничности [4, § 53]

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial x_\nu} g^{\mu\nu} = 0; \quad g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \, g^{\mu\nu},$$

из уравнений Эйнштейна, записанных с принятой точностью, можно полу-

читать ньютоновское выражение для тензора $g^{\mu\nu}$ [4, § 55]:

$$(14) \quad g^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4}{c^3} U; \quad g^{0i} = \frac{4}{c^3} U_i; \quad g^{ik} = -\delta_{ik} c; \quad \sqrt{-g} = c + 2U/c.$$

Входящие в эти выражения потенциалы удовлетворяют уравнениям [4, § 55]

$$(15) \quad \Delta U = -4\pi\gamma\rho; \quad \Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i; \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x^i} = 0.$$

Для получения метрики в следующем приближении необходимо построить тензор энергии-импульса вещества, который бы удовлетворял ковариантному уравнению сохранения

$$\nabla_\nu T^{\nu\mu} = \frac{\partial T^{\nu\mu}}{\partial x_\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha T^{\nu\mu} = 0$$

в силу выполнения следующих уравнений:

уравнения неразрывности [4, § 66]

$$(16) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0,$$

ньютоновских уравнений движения идеальной жидкости в гравитационном поле [4, § 66]

$$(17) \quad \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_n \frac{\partial v_i}{\partial x_n} \right) = \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

уравнения для удельной внутренней энергии [4, § 66]

$$(18) \quad \rho \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right) = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Этим условиям удовлетворяют следующие компоненты тензора энергии-импульса вещества [4, § 66]:

$$(19) \quad \begin{aligned} c^2 T^{00} &= \rho \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi - U \right) \right\}; \\ c^2 T^{0i} &= \rho v_i \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi - U \right) \right\} + \frac{p v_i}{c^2}; \\ c^2 T^{in} &= \rho v_i v_n + p \delta_{in}. \end{aligned}$$

Тогда постньютоновское выражение для тензора $g^{\mu\nu}$ [4, § 67]

$$(20) \quad g^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4}{c^3} U + \frac{4S}{c^5}; \quad g^{0i} = \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i}{c^5}; \quad g^{in} = -c\delta_{ni} + \frac{4S_{ni}}{c^3}$$

будет являться решением уравнений Эйнштейна, записанных в гармонической системе координат с постньютоновской точностью [4, § 68]:

$$(21) \quad \frac{1}{2c} \left[\Delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g^{\mu\nu} \right] + N^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} g T^{\mu\nu},$$

где

$$N^{00} = -\frac{7}{c^6} \left(\frac{\partial U}{\partial x_s} \right)^2;$$

$$(22) \quad N^{0i} = \frac{6}{c^6} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{8}{c^6} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U}{\partial x_s}.$$

Для нахождения сохраняющейся величины в ньютоновском приближении теории Эйнштейна поступим так же, как и в случае теории Ньютона: умножим скалярно уравнение (17) на v_i и сложим полученное выражение с умноженным на c^2 уравнением неразрывности (16). В результате получим следующее соотношение:

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho c^2 + \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{v^2}{2} + \rho v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) =$$

$$= \rho v_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i).$$

Используя первое из соотношений (15), а также уравнения (16) и (18), выражение (23) приведем к виду (8). В обозначениях Фока имеем

$$(24) \quad c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + \frac{a-1}{2} U \right) \right] - \frac{a}{8\pi\gamma c^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_s} \right)^2 \right\} =$$

$$= -c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho v_i \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + 3U \right) \right] + \frac{\rho v_i}{c^2} - \right.$$

$$\left. - 4\rho v_i \frac{U}{c^2} + \frac{1}{8\pi\gamma c^2} \left[(1+a) U \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial t} - (1-a) \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right] \right\}.$$

Хотя выражения (24) и (8) записаны в разных обозначениях, они полностью эквивалентны.

Следует особо подчеркнуть, что в теории гравитации Ньютона величины ρ , v^2 , U , p , Π удовлетворяют только уравнениям (2) — (6). Используя эти уравнения, провести дальнейшее выделение частной производной по времени в правой части соотношения (24) невозможно, и, как мы видели, это соотношение приводит к получению интеграла движения (11). В теории Эйнштейна дело обстоит иначе. Принципиальным отличием ньютоновского приближения ОТО от теории Ньютона является то обстоятельство, что потенциалы, стоящие в правой части выражения (24), с помощью уравнений Эйнштейна (21) выражаются в том же ньютоновском приближении через потенциалы U , U_i и метрический тензор постньютоновского приближения (20).

Используя это обстоятельство, выражение, стоящее в правой части уравнения (24), можно преобразовать, выделив частную производную по времени. Для этого перепишем уравнения Эйнштейна (21) в виде

$$(25) \quad -c^2 g T^{\mu\nu} = \frac{c^6}{8\pi\gamma} \left[-N^{\mu\nu} - \frac{1}{2c} \left(\Delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g^{\mu\nu} \right) \right].$$

Следует особо подчеркнуть, что левая часть этого уравнения имеет ньютоновскую степень точности, поэтому величина, стоящая в квадратных скобках справа, должна быть записана уже в постньютоновском приближении, так как перед выражением в скобках имеется большой множитель $c^6/8\pi\gamma$. Уравнения Эйнштейна (25) при $\mu=0$, $\nu=i$ с учетом выражения (19) записываются в виде

$$(26) \quad c^2 \left\{ \rho v_i \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + 3U \right) \right] + \frac{p v_i}{c^2} \right\} = \\ = - \frac{3}{4\pi\gamma} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{\pi\gamma} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U}{\partial x_s} - \frac{c^5}{16\pi\gamma} \left[\Delta g^{0i} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g^{0i} \right].$$

Для (00) компоненты уравнений Эйнштейна (25) имеем

$$(27) \quad c^2 \rho \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + 3U \right) \right\} = \\ = \frac{7}{8\pi\gamma} \left(\frac{\partial U}{\partial x_s} \right)^2 - \frac{c^5}{16\pi\gamma} \left[\Delta g^{00} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g^{00} \right].$$

Подставляя выражение (26) в правую часть соотношения (24), получим

$$(28) \quad c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + \frac{(a-1)}{2} U \right) \right] - \frac{a}{8\pi\gamma c^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_s} \right)^2 \right\} = \\ = -c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{a-7}{8\pi\gamma c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{\pi\gamma c^2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U}{\partial x_s} - \right. \\ \left. - \frac{c^3}{16\pi\gamma} \left[\Delta g^{0i} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g^{0i} \right] - 4\rho v_i \frac{U}{c^2} + \frac{1+a}{8\pi\gamma c^2} U \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_i} \right\}.$$

Используя уравнения (15), преобразуем правую часть этого выражения:

$$(29) \quad c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + \frac{(a-1)}{2} U \right) \right] - \frac{a}{8\pi\gamma c^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_s} \right)^2 \right\} = \\ = \frac{7-a}{8\pi\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_s} \right)^2 \right] - \frac{(7-a)}{2} \frac{\partial}{\partial t} \rho U + \\ + \frac{c^5}{16\pi\gamma} \left[\Delta \frac{\partial}{\partial x_i} g^{0i} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x_i} g^{0i} \right].$$

Из условий гармоничности (13) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g^{0i} = - \frac{\partial g^{00}}{\partial t}.$$

Подставляя это соотношение в выражение (29) и перенося все члены на лево, получим окончательно

$$(30) \quad c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + 3U \right) \right] - \frac{7}{8\pi\gamma c^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_s} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{c^3}{16\pi\gamma} \left[\Delta g^{00} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g^{00} \right] \right\} = 0.$$

Таким образом, в ньютоновском приближении теории Эйнштейна из уравнений движения вещества мы приходим к утверждению

$$(31) \quad c^2 \left\{ \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + 3U \right) \right] - \frac{7}{8\pi\gamma c^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_s} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{c^3}{16\pi\gamma} \left[\Delta g^{00} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g^{00} \right] \right\} = \text{const.}$$

Интегрируя эту величину по объему, мы получаем интеграл движения ньютоновского приближения теории Эйнштейна:

$$(32) \quad I = c^2 \int dV \left\{ \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + 3U \right) \right] - \frac{7}{8\pi\gamma c^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_s} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{c^3}{16\pi\gamma} \left(\Delta g^{00} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g^{00} \right) \right\} = \text{const.}$$

Однако в силу уравнения Эйнштейна (27) для (00) компоненты величина (31) равна нулю. Следовательно, и интеграл движения (32) общей теории относительности равен нулю: $I=0$.

Таким образом, мы показали, что и в ньютоновском приближении теории Эйнштейна интеграл «энергии» равен нулю. Этот вывод находится в полном соответствии с результатами, полученными в работе [1], где показано, что из точных уравнений движения вещества и уравнений Эйнштейна следует существование только нулевых интегралов движения.

Иногда «интеграл энергии» в ньютоновском приближении теории Эйнштейна получают [4] из ковариантного уравнения сохранения вещества в римановом пространстве-времени:

$$(33) \quad c^2 \nabla_\mu [-g T^{\mu 0}] = c^2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} [-g T^{\mu 0}] + c^2 g \Gamma_{\mu\nu}^\nu T^{\mu 0} - c^2 g \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\mu\nu} = 0.$$

Легко убедиться, что и в этом случае интеграл движения равен нулю.

Действительно, используя выражения для связностей риманова пространства-времени [4, § 67]

$$\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \Gamma_{0i}^0 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad \Gamma_{ni}^0 = O\left(\frac{1}{c^4}\right); \\ \Gamma_{0\nu}^\nu = \frac{2}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \Gamma_{i\nu}^\nu = \frac{2}{c^2} \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

а также выражения (19), уравнение (33) запишем в виде

$$(34) \quad c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + 3U \right) \right] \right\} + c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho v_i \left[1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + 3U \right) \right] + \frac{p v_i}{c^2} \right\} - 3\rho \frac{\partial U}{\partial t} - 4\rho v_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0.$$

Учитывая, что

$$3\rho \frac{\partial U}{\partial t} + 4\rho v_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{7-a}{2} \rho U + \frac{a}{8\pi\gamma} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ 4\rho v_i U - \frac{1}{8\pi\gamma} \left[(1+a) U \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_i} - (1-a) \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right] \right\}$$

соотношение (34) приведем к виду (24). Преобразуя это выражение аналогично проделанному выше, мы приходим к интегралу движения (32).

Таким образом, ковариантное уравнение сохранения (33) в ньютоновском приближении также приводит к получению только нулевых интегралов движения. Совершенно аналогично можно показать, что и «полный импульс» системы в теории Эйнштейна равен нулю. Это означает, что **ОТО не дает интегралов движения, переходящих в ньютоновском приближении в интегралы движения теории тяготения Ньютона.**

Возникает вопрос: почему же в ньютоновском приближении теории Эйнштейна обычно получают ненулевые интегралы «энергии»?

Причина традиционного получения ненулевых интегралов «энергии» в ньютоновском приближении ОТО заключается в неиспользовании соотношения (26), которое непосредственно следует из уравнений Эйнштейна (25) для компонент (0α) , связывая величины ρ , v^α , U , Π , p , входящие в правую часть выражения (24), с метрикой и другими потенциалами.

Действительно, если это соотношение не использовать, а сразу проинтегрировать выражение (24) по пространству, то мы придем к величине

$$(35) \quad J = c^2 \int dV \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi - \frac{1}{2} U \right) \right],$$

которая не зависит от времени и по виду совпадает с формулой (11) для энергии в теории гравитации Ньютона — **именно это обстоятельство и создало иллюзию, что ОТО в ньютоновском приближении приводит к интегралу движения теории Ньютона.**

Однако, как мы видели, учет связей между величинами ρ , v^α , U , Π , p и другими потенциалами в ОТО приводит к преобразованию выражения (24) в тривиальное равенство — к получению производной по времени от величины (32), равной нулю в силу уравнения Эйнштейна (27) для компоненты (00).

Таким образом, ОТО, если аккуратно использовать все связи (26), (27), приводит только к нулевым интегралам движения для системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, а поэтому ОТО не имеет классического ньютоновского предела. Следовательно, традиционный путь [4] построения интегралов движения в теории Эйнштейна, если его аккуратно осуществлять, приводит только к нулевым интегралам движения.

В ОТО предпринимались и другие попытки построения интегралов движения, однако и они к успеху не привели. Так, например [6], в тех частных случаях, когда пространство-время допускает группу движения, используя векторы Киллинга и тензор энергии-импульса вещества, можно построить интегральную величину, которая не будет зависеть от времени. Аналогично вне вещества можно также построить не зависящую от вре-

мени интегральную величину, используя тензор Римана. Однако этот путь не устанавливает непосредственной связи между изменением энергии вещества и существованием волн кривизны, а поэтому не решает проблемы в целом.

Наша главная цель состояла в том, чтобы показать, что способы, якобы приводящие в теории Эйнштейна к классическим ньютоновским интегралам движения, являются некорректными и некорректность их заключается не в ограниченности этих методов, а в сущности ОТО, которая вывела нас за рамки обычного классического поля в духе Фарадея — Максвелла. Многочисленные попытки втиснуть гравитационное поле теории Эйнштейна в рамки классического поля типа Фарадея — Максвелла, продолжающиеся в течение более чем половины столетия, являются абсолютно бесплодными и уводят нас от понимания сущности ОТО. В теории Эйнштейна изменение энергии-импульса вещества непосредственно связано только с изменением скалярной кривизны R и тензора второго ранга R^{ni} в области, занимаемой веществом:

$$\frac{\partial}{\partial t} T^{0i} = - \frac{\partial}{\partial t} t^{0i},$$

где

$$t^{0i} = - \frac{c^4}{8\pi\gamma} \left[R^{0i} - \frac{1}{2} g^{0i} R \right].$$

Волны кривизны, описываемые тензором четвертого ранга R^{nlm} , в теории Эйнштейна не связаны непосредственно с изменением энергии-импульса вещества, а связаны косвенно через метрический тензор g_{ni} . Поэтому для волн кривизны в ОТО не существует никаких законов сохранения, связывающих изменение тензора энергии-импульса вещества (тензора второго ранга) с существованием волн кривизны (тензора четвертого ранга).

Таким образом, требование к ОТО, сформулированное Эйнштейном [7]: «...безусловно следует требовать, чтобы вещество и гравитационное поле вместе удовлетворяли законам сохранения энергии-импульса» — не может быть удовлетворено в теории Эйнштейна ни в какой форме. ОТО Эйнштейна построена ценой отказа от законов сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых. Этот шаг был бы оправдан, если бы имелись веские основания для него и прежде всего экспериментальные данные о несохранении энергии-импульса в каких-либо взаимодействиях. Однако поскольку в теориях других физических полей существует единый закон сохранения энергии-импульса различных форм материи и в настоящее время нет никаких экспериментальных данных о его нарушении (более того развитие физики всегда демонстрировало его незыблемость и правомерность), то у нас нет никаких оснований для отказа от этого фундаментального закона физики и в теории гравитационного взаимодействия.

Литература

- [1] В. И. Денисов, А. А. Логунов. ТМФ, 43, 187, 1980.
 - [2] С. Вейнберг. Гравитация и космология, «Мир», 1975.
 - [3] А. Эйнштейн. Собрание научных трудов, «Наука», 1965, т. I.
 - [4] В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, 1961.
 - [5] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. Гравитация, «Мир», 1977, т. 3.
 - [6] Дж. Синг. Общая теория относительности, ИЛ, 1963.
 - [7] А. Einstein. Phys. Z., 15, 108, 1914.
-

DOES GENERAL RELATIVITY THEORY POSSESS THE CLASSICAL NEWTONIAN LIMIT?

V. I. Denisov, A. A. Logunov

Newton's theory of gravity and newtonian approximation of general relativity theory are considered. It is shown that general relativity theory does not possess the newtonian limit for the integrals of motion of matter and gravitational field.
