С. Вейнберг

ГРАВИТАЦИЯ И КОСМОЛОГИЯ

ПРИНЦИПЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Перевод с английского
В. М. ДУБОВИКА И Э. А. ТАГИРОВА

Под редакцией
Я. А. СМОРОДИНСКОГО

Издательство «Мир» Москва 1975

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

GRAVITATION AND COSMOLOGY:

PRINCIPLES AND APPLICATIONS OF THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY

STEVEN WEINBERG

Massachusetts Institute of Technology

John Wiley and Sons, Inc.,
New York — London — Sydney — Toronto
1972

УДК 530.12+523.112

Книга известного американского физика-теоретика С. Вейнберга содержит изложение основ специальной теории относительности и теории гравитации, вопросов их эмпирической проверки, а также краткий экскурс в историю создания этих теорий и их связей с геометрией пространства-времени. Подробно изложены наиболее устоявшиеся астрофизические приложения теории гравитации. Дан критический анализ основных космологических моделей и детальное обсуждение их соответствия данным современных астрономических наблюдений.

Книга содержит подробную и хорошо составленную библиографию, что облегчает ориентировку читателя в современной литературе. Книга рассчитана на научных работников, аспирантов, студентов и преподавателей, интересующихся проблемами гравитации и космологии.

Редакция литературы по физике

В $\frac{20401\text{-}041}{041\,(01)\text{-}75}$ 41-75 © Перевод на русский язык, «Мир», 1975

Предисловие редактора перевода

> Ежели бы Невтон не лежал в саду под яблоней и ежели бы яблоко по случаю не упало ему на голову, может быть, что бы мы и по сие время в равном неведении о движении небесных тел обращались, и о бесчисленном множестве явлений от того зависящих. По сему сия материя достойна особливого внимания Вашего Величества, и я ласкаю себя впредь говорить об оных.
>
> *Л. Эйлер*

Так писал Леонард Эйлер в своих знаменитых «Письмах к немецкой принцессе» [1]), переведенных на русский язык с французского русским академиком Степаном Разумовским и изданных в Санкт-Петербурге в 1766 г.

Нам сейчас кажется, что ньютоновская теория тяготения так и оставалась бы последним словом классической теории и новое развитие теории пошло бы путями, параллельными с квантовой электродинамикой, если бы Эйнштейн, вопреки всем своим предшественникам и современникам, не связал тяготения с изменением свойств пространства и времени вблизи тяжелых тел.

Глубокие геометрические идеи, лежащие в основе общей теории относительности, раскрываются во всей своей красоте в космологических приложениях, открытых Эйнштейном в 1917 г. и Александром Фридманом, работавшим в том же городе, где за много лет до него трудился Эйлер. Кажется, именно здесь проходит ясная грань между полевыми теориями в плоском пространстве и теорией тяготения Эйнштейна. Именно в своих космологических приложениях общая теория относительности достигла самых поразительных результатов. Постепенное восстановление истории Вселенной, столь неожиданно и убедительно подтвержденной открытием реликтового излучения, несомненно, принадлежит к самым ярким, если не ярчайшим, достижениям естествознания.

Именно теория эволюции Вселенной оказалась сейчас в самом сердце современной науки и ее связь с астрономическими наблюдениями (развитие которых в последние 15—20 лет также поражает воображение) сняла с общей теории относительности славу совсем абстрактной (хотя и красивой) науки.

Глубоко физической дисциплиной предстает относительность в книге Стивена Вейнберга, современного американского физика,

---

[1]) Полное название «Письма о разных физических и филозофических материалах, писанные к некоторой немецкой принцессе», в трех частях. Имя автора отсутствует.

смелого теоретика, поток идей которого непрерывно поддерживает оптимизм в рядах физиков, изучающих элементарные частицы. Хотя Вейнберг, может быть, на словах и переоценивает полевую сторону, но на самом деле он подробно касается самых разных аспектов общей теории относительности, и его мастерски написанная книга дает весьма полное представление как о теоретической, так и об экспериментальной сторонах предмета.

Очень полезно сравнить книгу Вейнберга с ранней книгой Толмена «Относительность, термодинамика и космология» (Оксфорд, 1934) [1]), чтобы увидеть, как различны взгляды физика 30-х и физика 70-х годов. Полезно также возвращаться время от времени к самому Эйнштейну, держа его четырехтомник все время поблизости. Второй том курса Ландау и Лифшица («Теория поля») полезно прочесть заранее.

Наконец, на русском языке есть более трудные книги И. Новикова и Я. Зельдовича «Теория тяготения и строение звезд», М.—Л., 1972 и «Строение и эволюция Вселенной», М.— Л., 1975, адресованные более подготовленному читателю. На русском языке сейчас есть еще много разных книг по теории относительности — после книги Вейнберга читатель уже сам хорошо разберется в них.

Перевод книги выполнили В. М. Дубовик (предисловия, гл. 1—13) и Э. А. Тагиров (гл. 14—16). Указатели составлены В. М. Дубовиком.

Я. Смородинский

Москва, июнь 1974 г.

[1]) В русском переводе вышла в 1974 г.

Посвящается Луизе

Предисловие автора

Только теперь, когда эта книга завершена, я могу оглянуться назад и подумать о причинах, побудивших меня начать работу и довести ее до конца.

Первая из них чисто утилитарная: мне хотелось собрать воедино и дать оценку богатейшим данным, накопленным за последнее десятилетие с помощью новой техники в экспериментальной физике, а также астрономическим исследованиям в чрезвычайно широком диапазоне частот — оптическом, радио, радиолокационном, рентгеновском и инфракрасном. Несомненно, что и после выхода книги будут появляться новые результаты, и я не могу рассчитывать, что моя работа не будет стареть. Но я все же надеюсь, что, рисуя достаточно полную картину экспериментальной проверки общей теории относительности и космологии, я облегчу читателю (а заодно и самому себе) понимание новых данных по мере их появления. Я попытался также заглянуть в не очень далекое будущее и обсудить дальнейшее развитие экспериментов, особенно тех, которые связаны с искусственными спутниками Земли и Солнца.

Существовала и другая, более субъективная причина написания этой книги. Изучая общую теорию относительности, а затем читая лекции в Беркли и Кембридже, я постоянно испытывал неудовлетворенность от системы изложения, принятой в этой ветви физической науки. Я обнаружил, что в большинстве учебников исходная роль отводилась геометрическим идеям, и поэтому у студента, который задавался такими, например, вопросами: почему гравитационное поле представляется метрическим тензором, почему свободно падающее тело движется по геодезической или почему уравнения поля в общем случае ковариантны,— могло создаться впечатление, что это все как-то связано с тем фактом, что пространство-время представляет римановское многообразие.

Конечно, это *была* точка зрения Эйнштейна, и его выдающийся гений предопределяет наше понимание созданной им теории. Однако я считаю, что геометрический подход искусственно расчленяет общую теорию относительности и теорию элементарных частиц. До тех пор пока у нас, как и у Эйнштейна, оставалась надежда на то, что при известных обстоятельствах материю можно понять в геометрической интерпретации, имело смысл придавать геометрии Римана при описании теории гравитации главенствующую роль. Но время склоняет нас к неверию в то, будто сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия

можно понять с помощью геометрии, и приводит к мысли, что слишком большой упор на геометрию может только затемнить глубокую связь, существующую между гравитацией и остальной физикой.

Я основываю обсуждение общей теории относительности не на геометрии Римана, а на принципе, следующем из эксперимента,— принципе эквивалентности гравитации и инерции. Может показаться, что такие геометрические понятия, как метрика, аффинная связность и тензор кривизны, проникают все-таки в теорию гравитации, основанную на принципе эквивалентности, и участвуют в создании общей теории относительности Эйнштейна. Однако я попытался здесь без необходимости не вводить геометрических понятий, и потому риманова геометрия используется только как математический аппарат при объяснении принципа эквивалентности, а не как фундаментальная основа теории гравитации.

Такой подход приводит нас естественным образом к вопросу: почему гравитация должна подчиняться принципу эквивалентности? Ответ, на мой взгляд, нельзя найти ни в сфере классической физики, ни, тем более, в римановой геометрии, но он будет продиктован ограничениями квантовой теории гравитации. По-видимому, невозможно построить какую-либо лоренц-инвариантную квантовую теорию частиц с нулевой массой и спином 2 так, чтобы эта теория не соответствовала классической теории поля, подчиняющейся принципу эквивалентности. Таким образом, принцип эквивалентности служит наилучшим мостом между теорией гравитации и теорией элементарных частиц. В параграфе, посвященном квантовой теории гравитации, я коснулся квантовых основ принципа эквивалентности, но углубляться в этот вопрос в данной книге у меня не было возможности.

Негеометрический подход, принятый в этой книге, влияет до некоторой степени на выбор обсуждаемых вопросов. В частности, я не стал подробно обсуждать вывод и классификацию сложных точных решений уравнений поля Эйнштейна, поскольку мне кажется, что большая часть соответствующего материала не необходима для основательного понимания теории гравитации и едва ли хоть какая-либо часть его имеет отношение к экспериментам, которые, возможно, будут выполнены в обозримом будущем. При таком самоограничении мне пришлось опустить многие работы, проделанные профессиональными релятивистами за последнее десятилетие, но я попытался обеспечить полноту книги за счет ссылок и библиографии.

Я с сожалением опустил здесь подробное обсуждение прекрасных теорем Пенроуза и Хоукинга о гравитационном коллапсе; эти теоремы только коротко упомянуты в § 11 гл. 9 и § 15 гл. 11, достаточно же подробное их обсуждение требует много большего времени и соответствующего объема в книге.

Я старался дать исчерпывающий список литературы, относящейся к эксперименту по проверке общей теории относительности и космологии. Я ссылался также на подробные теоретические вычисления всякий раз, когда цитировал экспериментальные результаты. Тем не менее я даже не пытался привести всех теоретических работ по вопросам, обсуждаемым в этой книге. Многие из результатов стали уже классическими, и подбор ссылок на исходные оригинальные работы был бы сродни экскурсу в историю науки, для которого я не чувствую себя достаточно подготовленным. Отсутствие литературной ссылки поэтому не обязательно означает, что результат оригинален, хотя в ряде случаев это и так.

Мне доставляет удовольствие поблагодарить многих людей за неоценимую помощь при написании этой книги. Студенты, которые слушали мой курс последние семь лет, помогли мне своими вопросами и замечаниями освободить выкладки от ошибок и неясностей. Я особенно признателен Джиллу Пански за внимательную проверку многих вычислений. Я усиленно эксплуатировал знания многих моих коллег, включая Стенли Дезера, Роберта Дикке, Джорджа Филда, Икко Ибена мл., Филиппа Моррисона, Мартина Риса, Леонарда Шиффа, Мартена Шмидта, Джозефа Вебера, Райнера Вейса и особенно Ирвина Шапиро. И наконец, я в долгу у Конни Фридман и Лиллиан Хортон за неоднократную перепечатку рукописи, проведенную с неистощимым терпением и огромным мастерством.

Стивен Вейнберг

Кембридж, Массачусетс,
апрель 1971 г.

Предисловие автора к русскому изданию

Я благодарен издательству «Мир», сделавшему мою книгу доступной советским читателям. Работая над книгой, я пытался по-новому подойти к общей теории относительности, основываясь скорее на физических, чем на геометрических принципах, придавая значение скорее наблюдаемым явлениям, чем математической структуре теории. В тоже самое время я пытался охватить все существенные элементы общей теории относительности, с которыми необходимо познакомиться каждому студенту. Достиг ли я своих целей, читатель может судить сам.

Новое, русское издание позволяет мне отметить успехи, которые были сделаны за два года, истекшие со времени опубликования моей книги. Исследования Дикке несферичности Солнца и данные Вебера о космическом потоке гравитационного излучения проверялись в других лабораториях, включая московские. Недалеко то время, когда эти эффекты будут либо опровергнуты, либо подтверждены. Измерение геодезической прецессии гироскопа на околоземной орбите было проведено ранее, в 1967 г.; сверхтонкое измерение было выполнено несколько позже. По-видимому, летом 1975 г. будет также измерено гравитационное красное замедление часов, помещенных в ракете. В настоящее время я не вижу причин менять позицию осторожного оптимизма относительно правильности общей теории относительности, которую я занял два года назад.

Среди космологических проблем у нас остаются важные вопросы о средней плотности масс во Вселенной, о параметре замедления и о кривизне Вселенной. Проблема избытка содержания гелия все еще существует, особенно из-за того, что эксперимент Дэвиса с нейтринным излучением Солнца пока не повторен другими исследователями. Космологическое значение избытка содержания дейтерия в космическом пространстве много обсуждалось в последнее время, но я все же думаю, что при столь малом космическом избытке у нас всегда останутся сомнения в том, что мы замечаем все некосмологические механизмы рождения и распада дейтерия. Возможно, наиболее важный новый успех в космологии — это новые оценки масс галактик, выполненные Острайкером, Пиблзом и Яхилом[1]) . Если они правы, то средняя плотность масс во Вселенной может оказаться на порядок больше.

Наиболее серьезная ошибка, о которой я знаю, сделана в моей книге при обсуждении измерения отношения гравитационной массы к инертной массе Земли путем наблюдения аномальных ускорений искусственного спутника к Солнцу и от него. В конце

[1]) *Qstriker J. P., Peebles P. J. E., Kahil A.*, Astroph. J. Lett., 193, L1 (1974). См. и более раннюю работу: *Einaoto J.*, Proc. 1st Europ. Meeting, 2, 291 (1972), Springer. — *Прим. ред.*

§ 1 гл. 3 я замечаю, что «этот крошечный эффект полностью маскируется «приливной» силой, возникающей из-за того, что расстояние между спутником и центром масс Земли велико, и нет надежды измерить этот эффект». Действительно верно, что аномальное ускорение любого спутника много меньше, чем ускорение, создаваемое приливными силами. Однако, как указал Нордведт[1]), аномальное отношение гравитационной массы к инертной массе Земли и приливные эффекты по-разному влияют на угол между направлениями Земля — Солнце и Земля — спутник. Это малое различие в угловой зависимости позволяет отделить малое аномальное ускорение от много больших приливных эффектов. Именно такой эксперимент находится в процессе подготовки в настоящее время; в нем будет использован лазер, нацеленный на уголковый отражатель, находящийся не на спутнике, а на Луне.

Я также сожалею, что не расширил главы 11 и не дал более реалистического обсуждения физических эффектов, связанных с нейтронными звездами и черными дырами. Недавние данные рентгеновской астрономии придали этой ветви общей теории относительности такое значение, которого она не имела во время написания книги. К счастью, русский читатель имеет прекрасную и достаточно полную книгу: Зельдовича и Новикова, недавно переведенную на английский язык.

Что касается оснований теории, мне кажется, что наиболее важный успех за последние годы состоит в подтверждении, сделанном Хуфтом, Велтманом, а также Дезером и Ван Ньювенхузеном [1]), что расходимости квантового варианта общей теории относительности не могут быть устранены путем перенормировок. Для меня это означает, что формулы общей теории относительности должны быть изменены на близких расстояниях, возможно, путем введения членов, пропорциональных квадрату тензора кривизны, в гравитационное действие. Такая модификация не изменила бы гравитационные эффекты в макроскопических масштабах, которые составляют главный предмет этой книги, но могла бы иметь интересные следствия при изучении черных дыр и молодой Вселенной. Если удовлетворительная квантовая теория гравитации будет развита именно в таком направлении, то это будет наиболее убедительным оправданием точки зрения, принятой в моей книге, что общая теория относительности может быть лучше понята как ветвь физики, а не дифференциальной геометрии.

Кембридж, Массачусетс,
июнь 1974

Стивен Вейнберг

---

[1]) *Nordvedt K.*, Phys. Rev., D3, 1683 (1971). *Deser S., Tsao H. S., van Nieuwenhuizen* P., Phys. Lett., 50B, 491 (1974). *Deser S., van Nieuwenhuizen P.*, Phys. Rev. Lett., 32, 245 (1974); Lett. Nuovo Cim., 11, 218 (1974). *t'Hooft G., Veltman M.*, Ann. Inst. J. H. Poincaré, sec. A, 20, 69 (1974). — *Прим. перев.*

Обозначения

Латинские индексы i, j, k, l и т. д. пробегают в основном три пространственные координаты, обозначаемые обычно 1, 2, 3 или x, y, z.

Греческие индексы α, β, γ, δ и т. д. пробегают в основном четыре пространственно-временные инерциальные координаты, обозначаемые 1, 2, 3, 0 или x, y, z, t.

Греческие индексы μ, ν, $\varkappa$, λ и т. д. пробегают в основном по четырем координатам в общей координатной системе.

По повторяющимся индексам проводится суммирование, если не указано иное.

Метрика $\eta_{\alpha\beta}$ имеет в инерциальной системе координат такие диагональные элементы: $+1$, $+1$, $+1$, -1.

Точка над любой величиной означает производную по времени от этой величины.

Декартовы 3-векторы набраны жирным шрифтом.

Скорость света везде принята за единицу, за исключением случаев применения системы единиц СГС. Постоянная Планка не принимается за единицу.

Часть I

ПРОЛОГ

Поток времени в своем неудержимом и вечном течении влечет за собой все сущее. Он ввергает в пучину забвения как незначительные события, так и великие, достойные памяти; туманное как говорится в трагедии, он делает явным, а очевидное скрывает. Однако историческое повествование служит надежной защитой от потока времени и как бы сдерживает его неудержимое течение; оно вбирает в себя то, о чем сохранилась память, и не даст этому погибнуть в глубинах забвения.

Анна Комнина, Алексиада

Глава 1

ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Физику нельзя представлять себе как логически стройную систему. Скорее, в любой момент она увязывает как-то огромное число неупорядоченных идей, часть из которых пришла к нам, подобно эпосу, из героических периодов прошлого, а другая возникла, подобно утопическим романам, из наших смутных предчувствий всеобъемлющего синтеза в будущем. Автор книги по физике может навести порядок в этом хаосе, организуя свой материал любым из двух способов: либо беспристрастно прослеживая всю его историю, либо следуя своим собственным идеям о том, что такое завершенная логическая структура физических законов. Оба способа приемлемы, важно только, используя первый, не перепутать физику с историей, а историю с физикой.

В этой книге я изложил теорию гравитации, согласно собственным представлениям о внутренней логике этой ветви физической науки, а не в последовательности ее исторического развития. Общеизвестен тот исторический факт, что, когда Альберт Эйнштейн работал над общей теорией относительности, у него под рукой имелся законченный математический аппарат римановой геометрии, который он и использовал целиком. Тем не менее

этот исторический факт вовсе не означает, что суть общей теории относительности состоит именно в применении римановой геометрии к пространству и времени.

С моей точки зрения, наиболее полезно рассматривать общую теорию относительности прежде всего как теорию гравитации, чья связь с геометрией возникает из-за особых эмпирических свойств гравитации — свойств, которые были сконцентрированы в принципе эквивалентности гравитации и инерции Эйнштейна. В связи с этим повсюду в этой книге я пытался отложить введение таких геометрических понятий, как метрика, аффинная связность и кривизна, до тех пор, пока использование этих понятий не будет продиктовано физической необходимостью. Поэтому порядок глав здесь весьма слабо связан с ходом исторического развития.

Однако, поскольку мы не должны позволить истории физики «погибнуть в глубинах забвения», мы посвящаем эту первую главу краткой ретроспективе трех основных разделов физической науки, предшествовавших общей теории относительности,— неевклидовой геометрии, ньютоновой теории тяготения и принципу относительности. Историю этих разделов физики можно проследить вплоть до 1916 г., когда все они были собраны воедино Эйнштейном в его общей теории относительности [1].

§ 1. История создания неевклидовой геометрии

Евклид в «Элементах» [1]) показал, как с помощью нескольких определений, аксиом и постулатов можно было бы построить геометрию. Его предположения в основном относятся к самым фундаментальным свойствам точек, линий и фигур, и школьникам XX в. они кажутся столь же очевидными, как и эллинским математикам III в. до н. э. Однако одно из утверждений Евклида всегда казалось менее очевидным, чем другие. Пятый постулат Евклида гласит: «Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньше двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых» [2]).

В течение двух тысяч лет геометры пытались освободить евклидову систему постулатов от этого последнего, доказывая, что он является логическим следствием остальных. Сегодня мы знаем, что это невозможно. Евклид был прав: нельзя обнаружить противоречия в геометрии без пятого постулата, а потому, если он

---

[1]) Основное английское издание [2] с введением и комментариями Т. Хитса.

[2]) «Начала Евклида», перевод с греческого Д. Д. Мордухай-Болтовского, т. 1—3, М.— Л., 1948—1950.— *Прим. перев.*

нам нужен, его необходимо ввести с самого начала, а не пытаться доказывать в конце. Тем не менее борьба за *доказательство* пятого постулата привела в конечном итоге к одному из величайших достижений в истории математики — созданию неевклидовой геометрии.

Список тех, кто надеялся доказать пятый постулат как теорему, включает Птолемея (умер в 168 г.), Прокла (418—485), Насирэддина Туси (XIII в.), Леви бен Герзона (1288—1344), П. А. Катальди (1548—1626), Джованни Альфонсо Борелли (1608—1679), Витали Джордано (1633—1711), Джона Валлиса (1616—1703), Джироламо Саккери (1667—1733), Иоганна Генриха Ламберта (1728—1777) и Адриена Мари Лежандра (1752—1833). Все они, без исключения, преуспели лишь в замене пятого постулата каким-либо другим более или менее эквивалентным постулатом, который, однако, не удавалось вывести из других постулатов Евклида. Так, последователь Платона Прокл из Афин предложил следующую замену пятого постулата: «Если прямая пересекает одну из двух параллельных, она пересекает и другую» (т. е. если определить параллельные как нигде не пересекающиеся прямые, то существует не более одной прямой, проходящей через любую заданную точку и параллельной данным). Джон Валлис, профессор Оксфорда, показал, что пятый постулат Евклида можно заменить следующим эквивалентным утверждением: «Для любой заданной фигуры существует фигура, подобная ей, причем любого размера». Лежандру удалось доказать эквивалентность пятого постулата такому утверждению: «Существует треугольник, в котором сумма трех углов равна двум прямым» [1]).

В XVIII в. попытки обойти пятый постулат Евклида приняли другое направление. В 1733 г. иезуит Джироламо Саккери опубликовал детальное изучение вопроса, какой могла бы быть геометрия, если бы пятый постулат оказался ложным. В частности, он рассмотрел следствия своей «гипотезы об острых углах»— утверждения, что «для любой заданной прямой можно провести прямую, перпендикулярную к ней, и прямую, пересекающую ее под острым углом, которые не пересекали бы одна другую» [1]). В действительности Саккери не считал это возможным; он был убежден в необходимости пятого постулата и исследовал неевклидову геометрию только в надежде отыскать в итоге логическое противоречие. Аналогичные попытки исследования неевклидовой геометрии были начаты Ламбертом и Лежандром.

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), кажется, был первым, у кого хватило смелости принять логическую возможность суще-

[1]) Цитируется по работе [3].

ствования неевклидовой геометрии [1]). Его постепенное прозрение увековечено в цикле писем (см. [4]) к Бойяи, Олберсу, Шумахеру, Герлингу, Тауринусу и Бесселю, написанных за период с 1799 по 1844 г. В письме, датированном 1824 г., он просил Тауринуса хранить молчание о «высказанном им еретическом мнении». Гаусс обращался даже к триангуляционной съемке в горах Гарца, производя съемку треугольника, образуемого вершинами Инзельберг, Брокен и Высокий Хаген, чтобы увидеть, будет ли сумма его внутренних углов равна 180° (так и оказалось). Затем в 1832 г. он получил письмо от своего друга Вольфганга Бойяи, в котором была описана неевклидова геометрия, развитая его сыном, Яношем Бойяи (1802—1860), офицером австрийской армии. Впоследствии Гаусс узнал, что профессор из Казани Николай Иванович Лобачевский (1793—1856) получил аналогичные результаты в 1826 г.

Гаусс, Бойяи и Лобачевский независимо друг от друга открыли то, что сейчас называется *двумерным пространством постоянной отрицательной кривизны*. Пространства такого вида весьма интересны; позже, в главе, посвященной космографии, мы увидим, что пространство, в котором мы обитаем, возможно, является трехмерным пространством с постоянной кривизной. Однако для создателей новой геометрии было важным то, что она описывает бесконечное двумерное пространство, для которого справедливы все предположения Евклида — за исключением пятого постулата! Существует только одно такое пространство, и этим, возможно, объясняется, почему открытие новой геометрии было сделано более или менее независимо в Германии, Австрии и России. (Поверхность сферы также удовлетворяет геометрии Евклида без пятого постулата, но, поскольку такая поверхность конечна, на ней нет места параллельным линиям.)

В гл. 13, посвященной симметричным пространствам, мы увидим, что двумерное пространство постоянной отрицательной кривизны нельзя представить как поверхность в обычном трехмерном евклидовом пространстве. Это объясняет, почему потребовались два тысячелетия, чтобы найти его. По этой же причине становятся неверными альтернативные почти очевидные версии пятого постулата Евклида, выдвигавшиеся Проклом, Валлисом и Лежандром, так как теперь через любую заданную точку можно провести *бесконечное* множество прямых, параллельных

---

[1]) У Гаусса не хватило смелости опубликовать свои заметки о пятом постулате. Это было сделано великим русским математиком Николаем Лобачевским, который и получил весь запас злой критики не понявших его математиков. Роль Яноши Бойяи столь же велика, однако он не довел развитие аппарата неевклидовой геометрии до той полноты и совершенства, какую последний получил в работах Лобачевского.— *Прим. ред.*

данной прямой, никакие фигуры различного размера не могут быть подобными и, наконец, сумма углов *любого треугольника* меньше 180°. Однако все еще оставалась открытой возможность того, что пятый постулат Евклида вытекает из других постулатов, так как, вообще говоря, не было очевидным, что геометрия Гаусса, Бойяи и Лобачевского не содержит логических противоречий. Обычный способ «доказательства» того, что система математических постулатов самосогласована, сводится к конструированию модели, удовлетворяющей этим же постулатам, но сделано это должно быть из объектов и понятий, взятых из другой системы, непротиворечивость которой (на данный момент) не вызывает сомнений. Как для евклидовой, так и для неевклидовой геометрии в качестве «модели» служит теория действительных чисел. Если декартовы координаты точки на плоскости отождествить с парой действительных чисел (x_1, x_2), а расстояние между двумя точками (x_1, x_2) и (X_1, X_2) записать в виде $[(x_1 - X_1)^2 + (x_2 - X_2)^2]^{1/2}$, то все евклидовы постулаты можно доказать как теоремы о действительных числах. В 1870 г. аналитическая геометрия такого типа [5] была построена Феликсом Клейном (1849—1925) для пространства Гаусса, Бойяи, Лобачевского [1]. Точка в такой геометрии задается парой действительных чисел x_1 и x_2, удовлетворяющих условию

$$x_1^2 + x_2^2 < 1, \tag{1.1.1}$$

а расстояние $d(x, X)$ между двумя точками равно

$$\operatorname{ch}\left[\frac{d(x, X)}{a}\right] = \frac{1 - x_1X_1 - x_2X_2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}(1 - X_1^2 - X_2^2)^{1/2}}, \tag{1.1.2}$$

где a — фундаментальная длина, устанавливающая масштаб в данной геометрии. Отметим, что такое пространство является бесконечным, так как $d(x, X) \to \infty$ при $(X_1^2 + X_2^2) \to 1$. При таком определении «точки» и «расстояния» модель, очевидно, удовлетворяет всем постулатам Евклида, кроме пятого, и действительно подчиняется геометрии Гаусса, Бойяи и Лобачевского.

Итак, прошли два тысячелетия, прежде чем была установлена логическая независимость пятого постулата Евклида.

С этого и началось развитие неевклидовой геометрии. Мы видели, что для открытия геометрии Гаусса, Бойяи, Лобачевского необходимо было оставить идею о том, что кривую поверхность можно изучить, только вложив ее в обычное трехмерное пространство. Но как же тогда описывать и классифицировать кривые пространства? Чтобы разобраться в этом вопросе, нужно вернуться к 1827 г., когда Гаусс опубликовал свои «Общие изыскания о кривых поверхностях». Гаусс впервые устанавливает

[1]) Модель Евклида для геометрии Гаусса - Бойяи — Лобачевского была дана в книге [6].

См. сб. «Об. основаниях геометрии» 2 изд. Казань 1895. — *Ред.*

различие между внутренними свойствами поверхности, т. е. геометрией, которую могли бы исследовать маленькие плоские жуки, живущие на этой поверхности, и *внешними* ее свойствами, проявляющимися при вложении этой поверхности в пространство большего числа измерений. Он осознает, что *внутренние* свойства поверхностей «в высшей степени заслуживают самого пристального изучения геометрами».

Гаусс понял также, что существенным внутренним свойством любой поверхности является ее метрическая функция $d(x, X)$, задающая расстояние между точками x и X по кратчайшему пути между ними на рассматриваемой поверхности. Например, конус или цилиндр имеют те же локальные внутренние свойства, что и плоскость, потому что последнюю можно свернуть в конус или цилиндр без растяжений и разрезов, т. е. не искажая метрических соотношений. Все картографы знают, что сферу нельзя развернуть в плоскость без искажений, т. е. локальные внутренние свойства сферы и плоскости различны.

Существует простой пример, к которому обращались Эйнштейн, Уилер и др., чтобы проиллюстрировать, как исследование метрики поверхности позволяет изучить ее внутренние свойства (фиг. 1.1). Рассмотрим N точек на плоскости. Одну из них примем за начало координат. Ось x проведем из начала координат через другую заданную точку, тогда расстояния между различными точками будут задаваться с помощью $(2N - 3)$ координат, а именно x-координаты второй точки и x- и y-координат остальных $(N - 2)$ точек. Существует $N(N - 1)/2$ различных расстояний между N-точками, и для достаточно больших N их можно связать M различными алгебраическими соотношениями, где

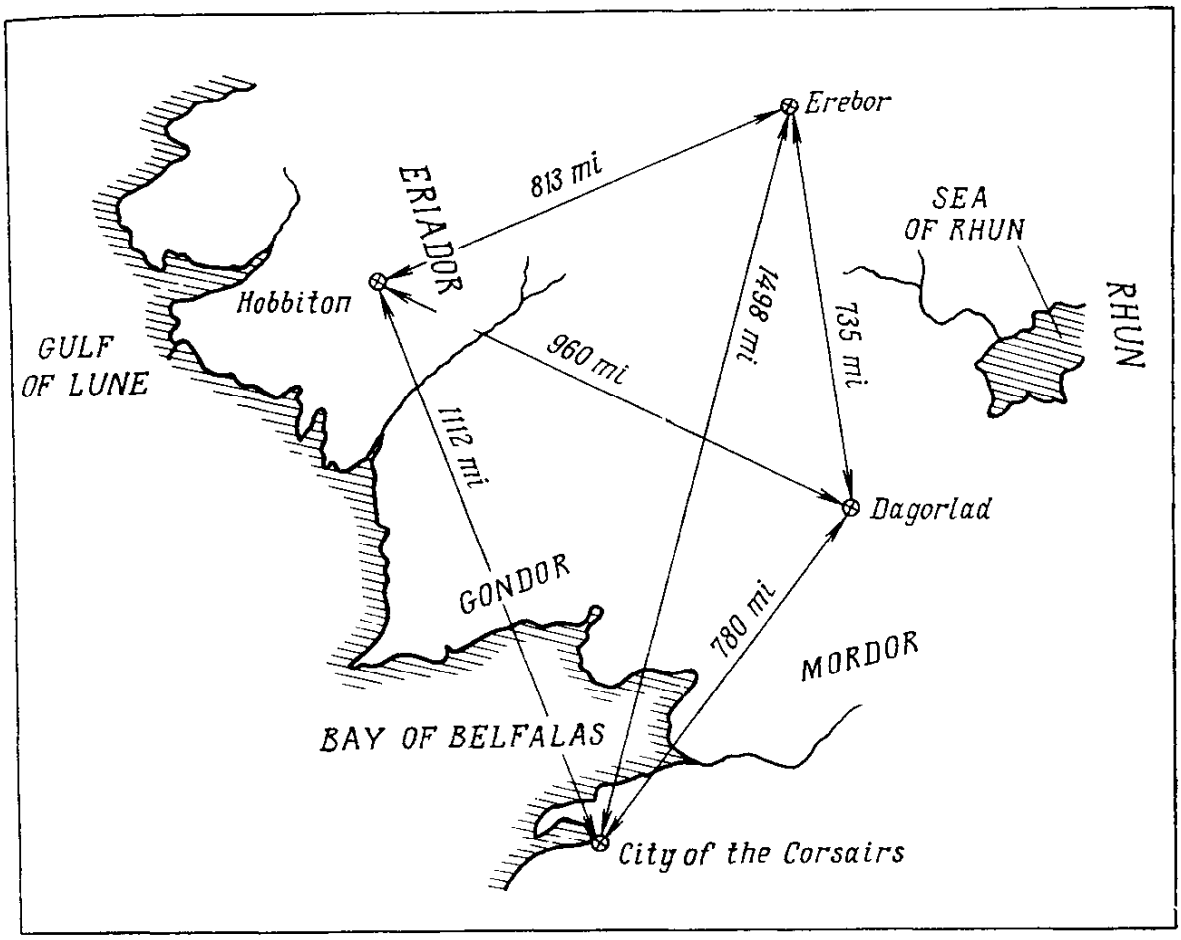
$$M = \frac{N(N-1)}{2} - (2N-3) = \frac{(N-2)(N-3)}{2}. \qquad (1.1.3)$$

В простейшем нетривиальном случае $N = 4$ легко показать, что расстояния d_{mn} между m-й и n-й точками связаны соотношением

$$\begin{aligned} 0 = {} & d_{12}^4 d_{34}^2 + d_{13}^4 d_{24}^2 + d_{14}^4 d_{23}^2 + d_{23}^4 d_{14}^2 + d_{24}^4 d_{13}^2 + d_{34}^4 d_{12}^2 + d_{12}^2 d_{23}^2 d_{31}^2 + \\ & + d_{12}^2 d_{24}^2 d_{41}^2 + d_{13}^2 d_{34}^2 d_{41}^2 + d_{23}^2 d_{34}^2 d_{42}^2 - d_{12}^2 d_{23}^2 d_{34}^2 - d_{13}^2 d_{32}^2 d_{24}^2 - d_{12}^2 d_{24}^2 d_{43}^2 - \\ & - d_{14}^2 d_{42}^2 d_{23}^2 - d_{13}^2 d_{34}^2 d_{42}^2 - d_{14}^2 d_{43}^2 d_{32}^2 - d_{23}^2 d_{31}^2 d_{14}^2 - d_{21}^2 d_{13}^2 d_{34}^2 - d_{24}^2 d_{41}^2 d_{13}^2 - \\ & - d_{21}^2 d_{14}^2 d_{43}^2 - d_{31}^2 d_{12}^2 d_{24}^2 - d_{32}^2 d_{21}^2 d_{14}^2. \end{aligned} \qquad (1.1.4)$$

Это соотношение удовлетворяется на любом односвязном участке поверхности цилиндра или конуса, так как эти фигуры обладают теми же внутренними свойствами, что и плоскость.

Однако уже протяженности авиационных маршрутов между любыми четырьмя городами не будут удовлетворять соотношению (1.1.4), так как поверхность Земли имеет иные внутренние свойства. Длины авиамаршрутов связаны другим соотношением,



Фиг. 1.1. Карта Средней Земли[1]). Является ли Средняя Земля плоской?

соответствующим сферической поверхности. С помощью этого соотношения можно также определить радиус Земли, хотя это не самый удобный метод и не им пользовался Эратосфен. Существенно, однако, то, что кривизна поверхности Земли может быть определена из локальных внутренних свойств этой поверхности.

Обладая богатым воображением, можно представить себе множество метрических функций $d(x, X)$. Гаусс внес значительный вклад в выделение одного частного класса метрических пространств, достаточно широкого, чтобы включать в себя пространство Гаусса, Бойяи, Лобачевского и обычные кривые поверхности, но достаточно узкого, чтобы иметь право называться геометрией. Он предположил, что в любой достаточно малой области пространства можно ввести локальную евклидову систему координат (ξ_1, ξ_2), такую, что расстояние между двумя точками с координатами (ξ_1, ξ_2) и $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2)$ удовлетворяет теореме Пифагора

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2. \qquad (1.1.5)$$

[1] Из трилогии Толкина «Повелитель колец».— *Прим. ред.*

Такую локальную евклидову систему координат можно задать, например, в любой точке гладкой кривой поверхности, используя декартовы координаты на плоскости, касающейся рассматриваемой поверхности в данной точке. Однако рассуждение Гаусса ни в коей мере не связано с внешними свойствами поверхности, оно относится только к внутренним метрическим свойствам бесконечно малой окрестности выбранной точки.

Если поверхность неевклидова, то ни в какой *конечной* ее части нельзя ввести евклидову систему координат (ξ_1, ξ_2) и, следовательно, нельзя удовлетворить теореме Пифагора. Допустим, что все же имеется некая система координат (x_1, x_2), *покрывающая* кривое пространство. Возникает вопрос: какую форму принимает в такой системе координат предположение Гаусса? Легко вычислить, что расстояние ds между точками (x_1, x_2) и $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ будет задаваться следующим образом:

$$ds^2 = g_{11}(x_1, x_2)\,dx_1^2 + 2g_{12}(x_1, x_2) \times \\ \times dx_1\,dx_2 + g_{22}(x_1, x_2)\,dx_2^2, \qquad (1.1.6)$$

где

$$g_{11} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right)^2,$$
$$g_{12} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right), \qquad (1.1.7)$$
$$g_{22} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right)^2.$$

Такая форма ds^2 — признак *метрического пространства.* [В гл. 3 мы увидим, что справедливо и обратное утверждение: в произвольной точке любогопр остранства с ds, определяемым (1.1.6), можно выбрать *локальные* евклидовы координаты ξ_1, ξ_2, удовлетворяющие (1.1.5).] Для сферы радиуса a можно использовать полярные координаты θ, φ; тогда метрика определяется следующим образом:

$$g_{\theta\theta} = a^2, \quad g_{\theta\varphi} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \sin^2\theta. \qquad (1.1.8)$$

Сомножитель $\sin^2\theta$ в $g_{\varphi\varphi}$ как раз и придает сфере внутренние свойства, отличные от тех, которые имеет плоскость. В геометрии Гаусса, Бойяи и Лобачевского можно использовать координаты x_1, x_2 модели Клейна и с помощью приведенной выше формулы для $d(x, X)$ показать, что

$$g_{11} = \frac{a^2(1-x_2^2)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}, \qquad g_{12} = \frac{a^2 x_1 x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2},$$
$$g_{22} = \frac{a^2(1-x_1^2)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}. \qquad (1.1.9)$$

Длину любого пути можно определить, интегрируя ds вдоль всего пути.

Метрические функции g_{ij} определяют все внутренние свойства метрического пространства, но сами при этом зависят от выбора координатной сетки. Если, например, для описания плоскости использовать полярные координаты r, θ, то метрические функции будут иметь вид

$$g_{rr}=1, \qquad g_{r\theta}=0, \qquad g_{\theta\theta}=r^2. \tag{1.1.10}$$

Хотя эти формулы и *не выглядят* формулами евклидова пространства, они описывают евклидово пространство, что можно формально показать, переходя к декартовым координатам $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. В более общем случае переход от координат (x_1, x_2) к координатам (x_1', x_2') будет переводить метрические функции g_{ij} в новые функции g'_{ij}, где, например,

$$\begin{aligned} g'_{11} &= \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1'}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1'}\right)^2=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}+\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)^2+ \\ &+\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1'}\right)^2=g_{11}\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1'}\right)^2+ \\ &+2g_{12}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}\frac{\partial x_2}{\partial x_1'}+g_{22}\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1'}\right)^2. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Что же можно сказать о внутренних свойствах пространства, рассматривая его метрические коэффициенты? Очевидно, необходима некоторая функция от g_{ij} и его производных, которая зависела бы только от внутренних свойств пространства и не зависела, как зависит g_{ij}, от выбора конкретной системы координат.

Гаусс нашел такую функцию и показал ее единственность; это — так называемая кривизна Гаусса

$$\begin{aligned} K(x_1, x_2) &= \frac{1}{2g}\left[2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1^2}\right]- \\ &-\frac{g_{22}}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right)-\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)^2\right]+ \\ &+\frac{g_{12}}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}\right)-2\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right)+\right. \\ &\left.+\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right)\right]- \\ &-\frac{g_{11}}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)-\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right)^2\right], \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

где g — детерминант

$$g(x_1, x_2)\equiv g_{11}g_{22}-g_{12}^2.$$

(Пусть читатель не теряет присутствия духа от ужасного вида этой формулы. В гл. 6, вводя более мощный математический

аппарат, мы сможем извлечь и обсудить понятие кривизны в более компактных и изящных обозначениях.) Применяя формулу (1.1.12) к метрическим функциям (1.1.8) и (1.1.9), находим, что сфера есть пространство с постоянной положительной кривизной

$$K = \frac{1}{a^2} \text{ (сфера)}, \tag{1.1.13}$$

а пространство Гаусса, Бойяи и Лобачевского имеет постоянную отрицательную кривизну

$$K = -\frac{1}{a^2} \text{ (ГБЛ)}. \tag{1.1.14}$$

(Кстати, в понятии «отрицательная кривизна» нет ничего экзотического; обычное седло имеет отрицательную кривизну. Однако то, что кривизна K *постоянна*, не дает возможности реализовать геометрию Гаусса, Бойяи, Лобачевского на обычных искривленных поверхностях. Очевидно также, что только при постоянной K можно удовлетворить другим постулатам Евклида, поскольку эти постулаты описывают истинно однородное пространство. Если же K при переходе от точки к точке меняется, то и внутренние свойства пространства изменяются вместе с ней.) И наконец, применив формулу для K к метрике (1.1.10), описывающей плоскость в полярных координатах, получим, как и следовало ожидать,

$$K = 0 \text{ (плоскость)}. \tag{1.1.15}$$

Таким образом, даже допуская произвол при выборе системы координат, мы можем выявить внутренние свойства пространства, вычисляя непосредственно величину K.

После того как это было выяснено, математики довольно скоро занялись проблемой описания внутренних свойств кривых пространств, имеющих три или более измерений. Однако обобщение работы Гаусса на более чем два измерения оказалось нетривиальным делом, поскольку внутренние свойства таких пространств нельзя описать единственной функцией кривизны K.

В пространстве D-измерений имеется $D(D+1)/2$ независимых метрических функций g_{ij}; так как мы вольны в выборе D координат, остается

$$C = \frac{D(D+1)}{2} - D = \frac{D(D-1)}{2}$$

функций, которые и определяют внутренние свойства пространства. При $D = 2$ $C = 1$, что и было получено Гауссом. При $D > 2$, $C > 1$, и геометрия усложняется. Эта проблема была полностью решена Георгом Фридрихом Бернхардом Риманом (1826—1866), изложившим в 1854 г. то, что мы сейчас называем римановой геометрией, в своей лекции при торжественном вступлении

в должность в Геттингене «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» [1]). Последующие работы Кристоффеля, Риччи, Леви-Чивита, Бельтрами и других развили идеи Римана и превратили их в прекрасную математическую конструкцию, описанную в терминах тензорного анализа и кривизны в главах этой книги. Но только Эйнштейну удалось понять, каким образом можно использовать в физике неевклидову геометрию.

§ 2. История создания теории тяготения

Исаак Ньютон (1642—1727), заканчивая свои «Начала», назвал гравитацию причиной того, что взаимодействие Солнца и планет осуществляется «пропорционально количеству твердой материи, содержащейся в них, и распространяется во все стороны на бесконечное расстояние, а сила взаимодействия убывает всегда обратно пропорционально квадрату расстояния» [7]. Закон Ньютона состоит из двух частей, которые были открыты различными путями и каждая из которых сыграла свою роль в развитии механики от Ньютона до Эйнштейна.

Начнем, естественно, с открытия Галилео Галилея (1564—1642), который обнаружил, что скорость свободного падения тел не зависит от их массы. Его инструментами были наклонная плоскость, служившая для замедления падения тел, водяные часы для измерения времени и маятник для исключения трения качения. Эти опыты позже были улучшены Христианом Гюйгенсом (1629—1695). Таким образом, Ньютон мог применить свой второй закон и прийти к выводу, что сила, вызванная гравитацией, пропорциональна массе тела, на которое она действует. Третий закон утверждает, что сила пропорциональна также и массе тела, являющегося источником силы.

Ньютон вполне сознавал, что эти выводы справедливы, вероятно, только приближенно и что «инертная масса», входящая во второй закон, может и не быть в точности такой же, как «гравитационная масса», содержащаяся в законе гравитации. Если бы так оказалось, то второй закон Ньютона нужно было бы записать в виде

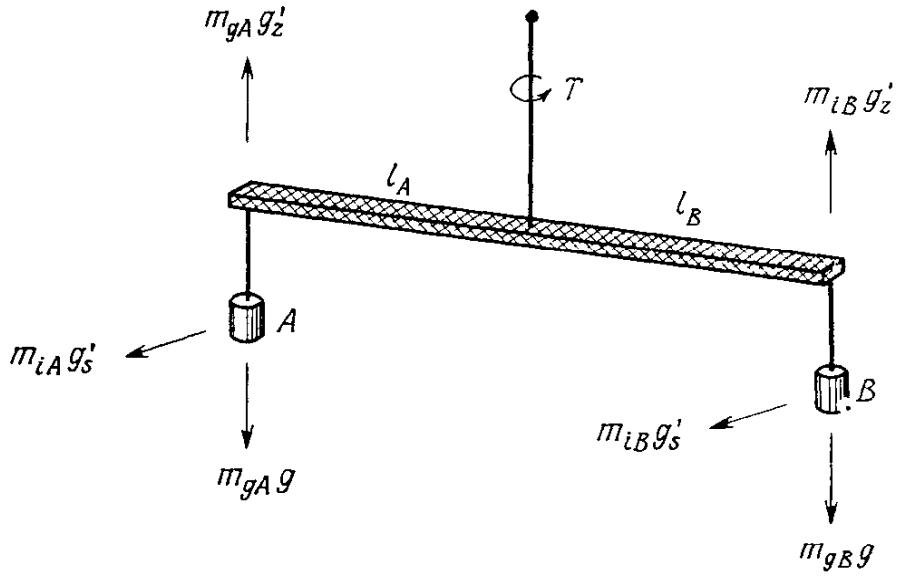
$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}, \tag{1.2.1}$$

а закон гравитации в виде

$$\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}, \tag{1.2.2}$$

где $\mathbf{g}$ есть поле, зависящее от координат и от масс других тел. В любой заданной точке ускорение тогда задавалось бы следующим

[1]) См. *Риман Б.*, Соч., М.—Л., 1948.— *Прим. перев.*



Фиг. 1.2. Схема эксперимента Этвеша.

образом:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{m_g}{m_i}\right)\mathbf{g}. \tag{1.2.3}$$

Следовательно, тела, имеющие разные значения отношения m_g/m_i, обладали бы и различными ускорениями a; в частности, периоды колебаний маятников равной длины были бы пропорциональны величине $(m_i/m_g)^{1/2}$. В опыте с маятниками равной длины, но сделанными из различных материалов Ньютон проверил это и не обнаружил разницы между их периодами. Позже, в 1830 г., этот результат был подтвержден в более точном эксперименте Фридриха Вильгельма Бесселя (1784—1846). Затем в 1889 г. Роланд фон Этвеш [8, 9], используя другой метод, успешно продемонстрировал, что величина отношения m_g/m_i двух разных веществ отличается не более чем на 10^{-9} (фиг. 1.2). Этвеш укрепил два груза A и B на концах стержня длиной 40 см, подвешенного на тонкой нити, привязанной к его центру. В равновесии стержень несколько наклонялся так, что выполнялось следующее условие:

$$l_A(m_{gA}g - m_{iA}g'_z) = l_B(m_{gB}g - m_{iB}g'_z), \tag{1.2.4}$$

где g — ускорение в гравитационном поле Земли, g'_z — вертикальная компонента центростремительного ускорения, связанного с вращением Земли, а l_A и l_B — эффективные длины плеч для обоих грузов. [Конечно, Этвеш выбрал веса грузов и длины плеч почти равными, но особенностью метода было то, что, если даже груз A несколько превышал B, стержень наклонялся еще как раз так, чтобы выполнялось условие (1.2.4).] Центростремительное ускорение, связанное с вращением Земли, имеет на географической широте Будапешта также и заметную горизонтальную компоненту g'_s,

создающую относительно вертикальной оси крутящий момент, равный

$$T = l_A m_{iA} g'_s - l_B m_{iB} g'_s.$$

Используя для определения l_B условие равновесия, имеем

$$T = l_A m_{iA} g'_s \left[1 - \left(\frac{m_{gA}}{m_{iA}} g - g'_z\right)\left(\frac{m_{gB}}{m_{iB}} g - g'_z\right)^{-1}\right],$$

или, так как $g'_z \ll g$, получаем

$$T = l_A g'_s m_{gA} \left[\frac{m_{iA}}{m_{gA}} - \frac{m_{iB}}{m_{gB}}\right].$$

Если бы отношения масс m_i/m_g грузов были бы различными, возникало бы закручивание нити, на которой подвешивался стержень. Поскольку закручивания нити обнаружить не удалось, Этвеш сделал вывод, что, например, для дерева и платины значения m_i/m_g отличаются меньше чем на 10^{-9}.

Равенство гравитационной и инертной масс произвело на Эйнштейна глубокое впечатление [10] и, как мы увидим в дальнейшем, натолкнуло его непосредственно на формулировку принципа эквивалентности. (Это равенство накладывает также очень жесткие ограничения на любые возможные негравитационные силы. Например, электростатические силы любого нового типа, в которых нуклонное число выполняло бы роль заряда, должны быть намного меньше гравитационных сил [11].) Недавно в Принстоне группа, руководимая Р. Дикке [12, 13], улучшила метод Этвеша, используя для создания крутящего момента гравитационное поле Солнца и центростремительное ускорение Земли, направленное к Солнцу, т. е. связанное не с суточным, а с орбитальным ее вращением. Преимущество этого метода состояло в том, что угол между направлением на Солнце и линией равновесия плеча изменялся с периодом 24 ч и поэтому Дикке мог выделить результаты эксперимента на фоне, не имеющем суточной частоты. В результате эксперимента он пришел к выводу, что образцы из алюминия и золота при падении на Солнце будут иметь одно и то же ускорение; различие в ускорениях может составлять самое большее 10^{-11} [1]). Было также показано (правда, с намного меньшей точностью), что нейтроны падают с тем же ускорением, что и обычное вещество [14], и что гравитационная сила взаимодействия электронов в меди та же, что и у свободных электронов [15].

Перейдем теперь ко второй части ньютоновского закона гравитации, в которой утверждается, что сила гравитационного

[1]) Еще более точные измерения (ошибка $< 10^{-12}$) были проведены группой В. Брагинского [ЖЭТФ, 61, 873 (1971)]; см. также книгу: Брагинский В. Б., Манукин А. Б., Измерение малых сил в физических экспериментах, М., 1974.— *Прим. ред.*

взаимодействия убывает как обратный квадрат расстояния. Эта идея не принадлежит целиком Ньютону. Иоанн Скотт Эригена (800—877 гг.) уже догадывался о том, что тяжесть и легкость тел убывают с удалением от Земли. Впоследствии эту теорию возродил Аделяр из Бата (XII в.), который считал, что если камень уронить в очень глубокий колодец, то он долетит только до центра Земли, но не дальше. (Кстати, именно Аделяр перевел Евклида с арабского на латынь, сделав тем самым его доступным средневековой Европе.) Первое исследование «закона обратных квадратов» было предпринято около 1640 г. Исмаилом Булиалдусом (1605—1694). Однако завершено это исследование было только Ньютоном, который в 1665 (или в 1666 г.) впервые вывел «закон обратных квадратов» из наблюдений. Он знал, что Луна удалена на расстояние 60 земных радиусов от центра Земли и что за каждую секунду она проходит по направлению к Земле расстояние 0,0045 фута. Следовательно, если гравитационные силы подчиняются закону обратных квадратов, то яблоко в Ланкашире, находящееся на расстоянии одного *земного* радиуса от центра Земли, должно проходить за первую секунду свободного падения расстояние в 3600 раз большее, чем 0,0045 фута, т. е. около 16 футов, что находится в хорошем согласии с измерениями. Однако Ньютон не публиковал результатов своих вычислений в течение 20 лет, поскольку не знал, как оправдать использованное им допущение, что вся масса Земли локализована в ее центре. Тем временем нескольким членам Королевского общества, включая Эдмунда Галлея (1656—1742), Кристофера Врена (1632—1723) и Роберта Гука (1635—1703), стало понятно, что при круговых орбитах планет из третьего закона Кеплера следует закон обратных квадратов. В самом деле, если квадраты периодов r^2/v^2 пропорциональны кубам радиусов r^3, то центростремительное ускорение v^2/r пропорционально $1/r^2$. Однако в действительности планеты движутся по эллипсам, а не по окружностям, и, как вычислить их центростремительные ускорения, никто не знал. Побуждаемый Галлеем, Ньютон в 1684 г. доказал, что планеты, движущиеся согласно закону обратных квадратов, действительно удовлетворяют всем эмпирическим законам Иоганна Кеплера (1571—1630): планеты движутся по эллипсам (в фокусе которых находится Солнце), выметая равные площади за равные промежутки времени, а квадраты периодов их вращения пропорциональны кубам главных осей. Таким образом, только в 1685 г. Ньютон смог завершить свои расчеты движения Луны, начатые в 1665 г. Эти огромной важности законченные исследования были опубликованы 5 июля 1686 г. под названием «Математические начала натуральной философии» [7].

В течение последующих столетий закон гравитации Ньютона дал блестящее объяснение целому ряду особенностей движения

Луны и других планет. Однако оставалось необъясненным некоторое возмущение орбиты Урана до тех пор, пока в 1846 г. Джон К. Адамс (1819—1892) в Англии и Урбен Ж. Ж. Леверье (1811—1877) во Франции независимо друг от друга не использовали этот факт для предсказания существования планеты Нептун и не вычислили ее положение. Экспериментальное обнаружение Нептуна вскоре после этого стало наиболее блестящим подтверждением теории Ньютона. Правда, движение Луны и кометы Энке (а позже и кометы Галлея) указали на отклонение от ньютоновской теории, но было ясно, что за это могли быть ответственны уже не гравитационные силы.

Одна проблема все же оставалась. За год до предсказания Нептуна Леверье подсчитал, что наблюдаемое смещение перигелия Меркурия, равное 35″, больше, чем то, которого следовало ожидать, исходя из ньютоновской теории и известных возмущающих полей, создаваемых движением других планет. Расхождение данных было подтверждено в 1882 г. Саймоном Ньюкомом (1835—1909), указавшим [16], что дополнительное смещение перигелия Меркурия за столетие составляет 43″. Леверье думал, что этот избыток, возможно, обусловлен группой малых планет между Меркурием и Солнцем. Однако после тщательных поисков в этом промежутке не было обнаружено ни одной планеты. Тогда Ньюком высказал предположение о том, что рассеянное вещество, ответственное за слабый «зодиакальный свет», видимый в плоскости эклиптики Солнечной системы, может вызывать также и дополнительное смещение перигелия Меркурия. Однако его вычисления показали, что то количество вещества, которое необходимо для объяснения прецессии перигелия Меркурия, если это вещество разместить в плоскости эклиптики, должно было бы приводить к вращению плоскостей орбит (т. е. к прецессии узлов), отличному от того, что наблюдается как у Меркурия, так и у Венеры). По этой причине Ньюком был вынужден к 1895 г. «признать эти исследования неудовлетворительными и принять временно гипотезу о том, что солнечная гравитация не в точности удовлетворяет закону обратных квадратов» [17].

К сожалению, это не стало последним словом. В 1896 г. Зелигер построил тщательно продуманную модель зодиакального света, в которой предполагаемое вещество размещалось на эллипсоидах, проходящих близко к Солнцу, что могло бы объяснить избыток смещения перигелия Меркурия без всяких противоречий между теорией и экспериментом, относящимся к вращению плоскостей орбит внутренних планет. Сейчас-то мы знаем, что эта модель совершенно неверна и что межпланетного вещества не хватает для объяснения наблюдаемого смещения перигелия Меркурия.

Однако гипотеза Зелигера вместе с успехами теории Ньютона в объяснении других явлений убедила к 1911 г. Ньюкома в том, что нет необходимости менять закон гравитации [17].

Не известно, сильно ли повлияла на Эйнштейна в процессе создания общей теории относительности проблема смещения перигелия Меркурия. Несомненно одно, что первым подтверждением этой теории было точное предсказание избыточного смещения перигелия в 43″ за столетие.

§ 3. История открытия принципа относительности

Механика Ньютона выделила семейство систем отсчета, так называемые *инерциальные системы*, в которых законы природы принимают форму, описанную в «Началах». Например, уравнения системы гравитационно-взаимодействующих точечных частиц записываются в виде

$$m_N \frac{d^2\mathbf{x}_N}{dt^2} = G \sum_M \frac{m_N m_M (\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_N)}{|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_N|^3}, \tag{1.3.1}$$

где m_N — масса N-й частицы, $\mathbf{x}_N$ — ее декартов вектор положения в момент времени t. Достаточно просто проверить тот факт, что эти уравнения сохраняют свой вид при записи в новых пространственно-временных координатах:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{d}, \\ t' &= t + \tau, \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

где $\mathbf{v}$, $\mathbf{d}$ и τ — любые действительные постоянные, а R — произвольная действительная ортогональная матрица. (Если наблюдатели O и O' используют штрихованную и нештрихованную системы координат, то O' видит координатную систему O повернутой с помощью R, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ и смещенной при $t = 0$ на величину $\mathbf{d}$, и к тому же часы у наблюдателя O отстают от часов у O' на величину τ.) Преобразование (1.3.2) образует 10-параметрическую группу (три угла Эйлера в R, по три компоненты векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{d}$ и время τ), называемую теперь *группой Галилея*. Инвариантность законов движения относительно таких преобразований называют галилеевой инвариантностью, или *принципом относительности Галилея*.

Что действительно удивляло Ньютона, так это то, что существует великое множество других преобразований, относительно которых уравнения движения неинвариантны. Например, уравнения (1.3.1) не сохраняют свою форму, если перейти к ускоряющейся, замедляющейся или, наконец, вращающейся координатным системам, т. е. если допустить, что $\mathbf{v}$ и R зависят от t. Уравнения движения сохраняют свою обычную форму только в огра-

ниченном классе координатных систем, называемых *инерциальными*. Как же определить, какие из систем отсчета являются инерциальными? Ньютон считал, что должно существовать абсолютное пространство, и из систем отсчета те являются инерциальными, которые находятся в состоянии покоя или равномерного движения относительно этого абсолютного пространства. Вот его слова (см. [7], стр. 30 русского издания):

«*Абсолютное* пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным.

Относительное есть его мера или какая-либо ограниченная подвижная часть, которая определяется нашими чувствами по положению относительно некоторых тел и которое в обыденной жизни принимается за пространство неподвижное».

Чтобы продемонстрировать то, что он трактовал как эффект вращения относительно абсолютного пространства, Ньютон описал также ряд экспериментов. Наиболее известным из них является эксперимент с вращающимся сосудом (см. [7], стр. 35 русского издания).

«Если на длинной нити подвесить сосуд и, вращая его, закрутить нить, пока она не станет совсем жесткой, затем наполнить сосуд водой и, удержав сперва вместе с водой в покое, пустить, то под действием появляющейся силы сосуд начнет вращаться, и это вращение будет поддерживаться достаточно долго закручиванием нити. Сперва поверхность воды будет оставаться плоской, как было до движения сосуда. Затем сосуд силой, постепенно действующей на воду, заставит и ее участвовать в своем вращении. По мере возрастания вращения вода будет постепенно отступать от середины сосуда и возвышаться по краям его, принимая впалую форму поверхности (я сам это пробовал делать)... Вначале, когда *относительное* движение воды в сосуде было наибольшее, оно совершенно не вызывало стремления удалиться от оси — вода не стремилась к окружности и не повышалась у стенок сосуда, а ее поверхность оставалась плоской и истинное вращательное ее движение еще не начиналось. Затем, когда относительное движение уменьшилось, повышение ее у стенок сосуда обнаруживало ее стремление удалиться от оси, и это стремление показывало ее постепенно возрастающее истинное вращательное движение, и когда оно стало наибольшим, то вода установилась в покое относительно сосуда».

Ньютоновская концепция абсолютного пространства была отвергнута его знаменитым оппонентом Готфридом Вильгельмом фон Лейбницем (1646—1716), который считал, что не существует философской необходимости в какой бы то ни было концепции пространства, помимо той, что вытекает из связей материальных объектов. Эти положения обсуждались в известном цикле писем [18] (переписка 1715—1716 гг.) между Лейбницем и сторонником

Ньютона Самюэлем Кларком (1675—1729) [1]). Философы продолжили спор, причем позицию Ньютона защищали Леонард Эйлер (1707—1783) и Иммануил Кант (1724—1804), а критиковал ее епископ Джордж Беркли (1685—1753) в его «Трактате о началах человеческого знания» (1710) и «Аналитике» (1734). Конечно, ни один из этих высокомудрых метафизиков не выдвинул никакой идеи относительно того, как же развить динамическую теорию, которая могла бы заменить ньютоновскую.

Первая конструктивная критика ньютоновского абсолютного пространства была высказана в 1880 г. австрийским философом Эрнстом Махом (1838—1916). В своей книге «Механика и ее развитие» [19] он замечает: «Опыт Ньютона с вращающимся сосудом с водой показывает только, что относительное вращение воды по отношению к стенкам сосуда не побуждает заметных центробежных сил, но что последние побуждаются относительным вращением по отношению к массе Земли и остальным небесным телам. Никто не может сказать, как протекал бы опыт, если бы стенки сосуда становились все толще и массивнее, пока, наконец, толщина их не достигла бы нескольких миль».

Гипотеза о том, что в определении инерциальных систем играют роль «массы Земли и остальных небесных тел», называется *принципом Маха.* Любому доступен в звездную ночь простой эксперимент, с помощью которого можно уяснить утверждение, называемое принципом Маха. Встанем прежде всего неподвижно и опустим свободно руки. Отметим, что звезды более или менее неподвижны, а наши руки направлены почти строго вниз. Теперь резко совершим полный оборот. Нам покажется, что звезды вращаются вокруг зенита, а руки за счет центробежной силы разойдутся в стороны. Если бы не существовало какой-нибудь взаимосвязи между звездами и нами, определяющей способ введения инерциальной системы, то было бы крайне удивительным совпадение системы, в которой руки висели свободно, и системы отсчета, в которой покоятся реперные звезды.

Аргументацию можно сделать более точной. Строго говоря, поверхность Земли не является инерциальной системой, и, конечно, орбитальное и суточное вращения Земли создают кажущееся вращение звезд, но этот эффект можно исключить в инерциальной системе отсчета, связанной со всей Солнечной системой в целом. В такой инерциальной системе отсчета среднее наблюдаемое вращение галактик относительно какой-либо оси, проходящей через Солнце, меньше 1″ за столетие [20, 21]!

Таким образом, мы сталкиваемся с неизбежным выбором: необходимо либо допустить существование ньютоновского абсо-

[1]) См. прежде всего пятое письмо Лейбница.

лютного пространства-времени, которое определяет инерциальные системы и относительно которых реперные галактики покоятся, либо верить, как и Мах, в то, что инерция обусловлена взаимодействием с усредненной массой всей Вселенной. И если Мах прав, то ускорение, сообщаемое частице любой заданной силой, должно зависеть не только от существования фиксированных звезд, но также, очень слабо, и от распределения материи в непосредственной близости от частицы.

Позже, в гл. 3, мы увидим, что принцип эквивалентности Эйнштейна обеспечивает такой подход к проблеме инерции, что она оказывается хотя и не связанной с ньютоновским абсолютным пространством, однако и не полностью согласованной с выводами Маха. Вопрос остался открытым.

Я до сих пор не упоминал специальный принцип относительности, так как, несмотря на свое название, он в действительности не имеет отношения к проблеме выбора между абсолютным и относительным пространством. Однако для того чтобы сформулировать принцип эквивалентности, нам понадобятся понятия специальной теории относительности, а потому подробный обзор специальной теории будет дан в следующей главе. Здесь же мы обратимся только к ее истории.

Теория электродинамики, развитая в 1864 г. Джеймсом Кларком Максвеллом (1831—1879), явно не удовлетворяет принципу галилеевой инвариантности. С одной стороны, уравнения Максвелла предсказывают, что скорость света в вакууме c является универсальной константой, однако, с другой стороны, если это утверждение верно в системе координат x^i, t, то оно не будет справедливым в «движущейся» системе координат x'^i, t', определяемой преобразованием Галилея (1.3.2). Сам Максвелл думал, что электромагнитные волны переносит некоторая среда [22], светоносный эфир. При этом уравнения Максвелла должны быть справедливы только в ограниченном классе галилеевых инерциальных систем, т. е. систем, покоящихся относительно эфира.

Однако все попытки измерить скорость Земли относительно эфира потерпели неудачу (для ознакомления с этими экспериментами см. [23]), хотя было известно, что относительно Солнца Земля обладает скоростью 30 км/с, а относительно центра нашей Галактики — около 200 км/с. Наиболее важным был эксперимент Альберта Майкельсона (1852—1931) и Е. Морли [24], которые в 1887 г. показали, что с точностью до 5 км/с скорость света будет одной и той же независимо от того, распространяется ли свет по направлению орбитального движения Земли или ортогонально к нему. Не так давно точность этого результата была доведена до 1 км/с [25].

Постоянные неудачи экспериментаторов по обнаружению эффектов движения Земли относительно эфира заставили таких теоре-

Фиг. 1.3. Основоположники специальной теории относительности на Первом Сольвеевском конгрессе в 1911 г.

Слева направо: (сидят) Нернст, Бриллюэн, Сольвей, Лоренц, Варбург, Перрен, Вин, мадам Кюри, Пуанкаре; (стоят) Гольдшмидт, Планк, Рубенс, Зоммерфельд, Линдеманн, де Бройль, Кнудсен, Хазенрол, Хостелет, Херзен, Джинс, Резерфорд, Камерлинг-Оннес, Эйнштейн, Ланжевен.

гиков, как Георг Фицджеральд (1851—1901) [26, 27], Гендрик Лоренц (1853—1928) [28] и Анри Пуанкаре (1854—1912) [29], выдумывать причины, по которым эффект «эфирного ветра» мог бы стать в принципе ненаблюдаемым. В частности, Пуанкаре, по-видимому, предвидел революционное значение этой проблемы для механики, и Уиттекер [30] отдает должное вкладу Пуанкаре и Лоренца в специальную теорию относительности. Не вникая в суть полемики вокруг этих вопросов (см., например, [31]), можно с уверенностью сказать лишь, что подробное, всестороннее решение проблемы относительности в механике и электродинамике было впервые дано в 1905 г. Альбертом Эйнштейном (1879—1955) [32].

Эйнштейн исходил из предположения о том, что преобразования Галилея (1.3.2) необходимо заменить другими 10-параметрическими пространственно-временными преобразованиями, называемыми *преобразованиями Лоренца*, поскольку эти преобразования оставляют инвариантными уравнения Максвелла и скорость света. (Не ясно, повлиял ли непосредственно на Эйнштейна

результат эксперимента Майкельсона — Морли (см. [31] и [33]), но известно что в статье 1905 г. [32] он ссылался на «безуспешные попытки обнаружить хоть какое-нибудь движение Земли относительно эфирной среды». См. также [34].) Уравнения ньютоновской механики типа (1.3.1) не инвариантны относительно преобразований Лоренца; поэтому Эйнштейн пришел к необходимости модифицировать законы движения таким образом, чтобы они были лоренц-инвариантны. Новая физика, состоящая из электродинамики Максвелла и механики Эйнштейна, теперь уже удовлетворяла новому принципу относительности, а именно принципу специальной относительности, который утверждает, что все физические уравнения должны быть инвариантны относительно лоренцевых преобразований. Эти идеи будут детально обсуждаться в следующей главе.

Группа преобразований Лоренца никоим образом не шире группы Галилея, и, следовательно, принцип относительности не порожден теорией относительности, а скорее *восстановлен* ею. До Максвелла можно было считать, что вся физика инвариантна относительно группы Галилея. Уравнения Максвелла не были инвариантны относительно этой группы, и до середины столетия казалось, что только механика, но не электродинамика подчиняется принципу относительности. После Эйнштейна стало ясно, что как уравнения механики, так и уравнения электродинамики являются инвариантными относительно лоренцевых, а не галилеевых преобразований. Физические законы в той форме, которую им придали Максвелл и Эйнштейн, претендуют на справедливость все еще в ограниченном классе инерциальных систем отсчета, а вопрос о том, что выделяет эти инерциальные системы, оставался после 1905 г. таким же таинственным, как и в 1686 г.

Необходимо было построить релятивистскую теорию тяготения. Решающий шаг в этом направлении был сделан в 1907 г., когда Эйнштейн ввел принцип эквивалентности гравитации и инерции [35] и вычислил на его основании красное смещение света в гравитационном поле. В гл. 3 мы увидим, что этот принцип определяет гравитационное воздействие на произвольную физическую систему, но не определяет самих уравнений гравитационных полей. Эйнштейн в 1911 г. пытался вычислить с помощью принципа эквивалентности отклонение света в гравитационном поле Солнца [37], но тогда он еще не достиг корректного понимания структуры поля, и результат, полученный им, составлял лишь половину «правильного» релятивистского [1]). Мы приведем этот результат в гл. 8. Эйнштейн [38], Абрахам [39] и Нордстрем [40] предприняли в 1911—1912 гг. ряд попыток сконструировать

[1]) В действительности такая формула была получена еще в 1801 г. Зандерлингом на основе ньютоновской теории тяготения.— *Прим. ред.*

релятивистские уравнения скалярного гравитационного поля, однако вскоре Эйнштейна перестали удовлетворять все эти теории, главным образом по эстетическим соображениям. (Гравитационное отклонение света в поле Солнца тогда еще измерено не было.) Сотрудничество с математиком Марселем Гроссманом навело в 1913 г. Эйнштейна на мысль [41—43], что гравитационное поле необходимо отождествлять с 10-компонентным метрическим тензором пространственно-временной геометрии Римана. Как будет показано в гл. 4 и 5, принцип эквивалентности вводится в этот формализм в виде требования, чтобы физические уравнения были инвариантны относительно общих преобразований координат, а не только лоренцевых преобразований, хотя я не знаю, в какой мере этот «общий принцип относительности» играл самостоятельную роль в представлениях Эйнштейна наряду с принципом эквивалентности. В течение последующих двух лет Эйнштейн представил в Прусскую Академию наук серию статей [44, 45], в которых вывел полевые уравнения для метрического тензора и вычислил гравитационное отклонение света и смещение перигелия Меркурия. Эти блестящие достижения были окончательно суммированы Эйнштейном в 1916 г. в его работе, озаглавленной «Основы общей теории относительности» [1].

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Я цитирую в тексте работы Ньютона, Маха, Максвелла, Ньюкома и Эйнштейна, но, не будучи историком, широко использую, помимо этого, и не первоисточники. Список таких работ приведен ниже.

Неевклидова геометрия

Bonola R., Non-Euclidean Geometry, Dover Publications, 1955.
Sarton G., Ancient Science and Modern Civilization, Yale University Press, 1951, Ch. I.
Weyl H., Raum, Zeit, Materien, 1 aufl., J. Springer, 1923.

Гравитация

Cajori E., историческое и пояснительное приложение к книге Newton I., Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, University of California Press, 1966.
Guth E., в книге Relativity — Proceedings of the Relativity Conference in the Midwest, ed. M. Carmeli, S. I. Fickler, L. Witten, Plenum Press, 1970, p. 161.
Jammer M., Concepts of Force, Harper and Brothers, 1962, Ch. IV—VII.
Whittaker E., A History of the Theories of Aether and Electricity, Thomas Nelson and Sons, 1953, Vol. II, Ch. V.
Wightman W. P. D., The Growth of Scientific Ideas, Yale University Press, 1951, Ch. VIII, X.

Принцип относительности

Holton G., Am. J. Phys., 28, 627 (1960).
Koyré A., From the Closed World to the Infinite Universe, Harper and Row, 1958, Ch. VII, IX—XI.
Møller C., The Theory of Relativity, Oxford University Press, 1952, Ch. I.
Pauli W., Theory of Relativity, Pergamon Press, 1958, Parts I, IV. 50 (см. перевод: *Паули В.*, Теория относительности, Гостехиздат, 1947).
Whittaker E., A History of the Theories of Aether and Electricity, Thomas Nelson and Sons, 1953, Vol. I, Ch. VIII—X, XIII; Vol. II, Ch. II, V.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Einstein A.*, Ann. Phys. (Leipzig), 49, 769 (1916); английский перевод см. в книге The Principle of Relativity, Methuen, 1923, p. 35 (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1965, т. 1, стр. 452).
2. «Euclid's Elements», rev. ed., Cambridge, 1926.
3. *Sarton G.*, Ancient Science and Modern Civilization, University of Nebraska Press, 1954, p. 26.
4. *Bonola N.*, Non-Euclidean Geometry, Dover Press, 1955, p. 65.
5. *Klein F.*, Math. Ann. 4, 573 (1871); 6, 112 (1873); 37, 544 (1890) (цитируется в книге *Weyl H.*, Space, Time, Matter, Dover Press, 1952, p. 80).
6. *Beltrami E.*, Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, 1868 (цитируется в книге *North J. D.*, The Measure of the Universe, Oxford, 1965, p. 60).
7. *Newton Isaac*, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, University of California Press, 1966, p. 546 (см. перевод: *Ньютон Исаак*, Математические начала натуральной философии, перевод акад. А. Н. Крылова, Собр. тр. акад. А. Н. Крылова, т. 7, М., 1936).
8. *Eötvös R.*, Math. nat. Ber. Ungarn, 8, 65 (1890).
9. *Eötvös R.*, *Pekár D.*, *Fekete E.*, Ann. Phys. 68, 11 (1922); см. также *Renner J.*, *Hung. Acad. Sci. Vol.* 53, Part II, 1935.
10. *Einstein A.*, The Meaning of Relativity, 2nd ed., Princeton, 1946, p. 56 (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1966, т. II, стр. 5).
11. *Lee T. D.*, *Yang C. N.*, Phys. Rev., 98, 1501 (1955).
12. *Dicke R. H.*, в книге Relativity, Groups, and Topology, ed. C. DeWitt and B. S. DeWitt, Gordon and Breach, 1964, p. 167.
13. *Roll P. G.*, *Krotkov R.*, *Dicke R. H.*, Ann. Phys. (N.Y.), 26, 442 (1967).
14. *Dobbs J. W. T.*, *Harvey J. A.*, *Paya D.*, *Horstmann H.*, Phys. Rev., 139, B756 (1965).
15. *Witteborn F. C.*, *Fairbank W. M.*, Phys. Rev. Lett., 19, 1049 (1967).
16. *Newcomb S.*, Astron. Papers of the American Ephemeris, 1, 472 (1882).
17. *Newcomb S.*, The Encyclopaedia Britannica, 11th ed., XVIII, 155 (1910—1911) (статья «Mercury»).
18. *Alexander G. H.*, The Leibniz-Clarke Correspondence, Manchester University Press, 1956 (цитируется *Koyré A.*, в книге From the Closed World to the Infinite Universe, Harper and Row, 1958, Ch. XI).
19. *Mach E.*, The Science of Mechanics 2nd ed., Open Court Publ. Co., 1893 (см. перевод: *Мах Э.*, Механика, СПб, 1904).
20. *Schiff L. I.*, Rev. Mod. Phys., 36, 510 (1964).
21. *Clemence G. M.*, Rev. Mod. Phys., 19, 361 (1947); 29, 2 (1957).
22. *Maxwell J. C.*, The Encyclopaedia Britannica, 9th ed., 1875—1889 (статья «Ether»); воспроизведено в книге The Scientific Papers of James Clark Maxwell, ed W. D. Niven, Dover Publications, 1965, p. 763; см. также Maxwell's Treatise on Electricity and Magnetism, vol. II, Dover Publications, 1954, p. 492 (см. перевод: *Максвелл Дж. К.*, Избранные сочинения

по теории электромагнитного поля, Гостехиздат, 1954; *Максвелл Дж. К.*, Статьи и речи, «Наука», 1968).
23. *Møller C.*, The Theory of Relativity, Oxford Press, 1952, Ch. I.
24. *Michelson A. A.*, *Morley E. W.*, Am. J. Sci., **34**, 333 (1887); воспроизведено в книге Relativity Theory: Its Origins and Impact on Modern Thought, ed. L. Pearce Williams, John Wiley and Sons, 1968.
25. *Jaseja T. S.*, *Javan A.*, *Murray J.*, *Townes C. H.*, Phys. Rev., **133** A1221 (1964).
26. *Fitzgerald G. F.*, цитируется в статье *Lodge O.*, Nature, **46**, 165 (1892).
27. *Lodge O.*, Phil. Trans. Roy. Soc., **184A** (1893).
28. *Lorentz H. A.*, Zittungsverslagen der Akad. van Wettenschappen, **1**, 74 (November 26, 1892); Versuch einer Theorie der elektrischen und optische Erscheinungen in bewegten Körpern, E. J. Brill, 1895; английский перевод: Proc. Acad. Sci. Amsterdam, **6**, 809 (1904) (см. перевод: *Лоренц Г. А.*, Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, изд. 2-е, испр., Гостехиздат, 1953).
29. *Poincaré J. H.*, Rapports présentés au Congrès International de Physique réuni à Paris, Gauthier-Villiers, 1900; The Monist, **15**, 1 (1905); воспроизведено в книге, упомянутой в [24] [см. перевод в сб. «Принцип относительности», Атомиздат, 1973, стр. 27; УФН, **113**, 663 (1974)].
30. *Whittaker E.*, A History of The Theories of Aether and Electricity, Thomas Nelson and Sons, 1953, Vol. II, Ch. I (см. перевод в сб. «Принцип относительности», Атомиздат, 1973, стр. 205).
31. *Holton G.*, Am. J. Phys., **28**, 627 (1960); частично воспроизведено в книге, упомянутой в [24].
32. *Einstein A.*, Ann. Phys. (Leipzig), **17**, 891; **18** 639 (1905); англ. перевод в книге The Principle of Relativity, см. [1] (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1965, т. 1, стр. 7, 36).
33. *Holton G.*, см. [31], а также Isis., **60**, 133 (1969).
34. См. [32], а также статью *Grünbaum A.* в книге Current Issues in the Philosophy of Science, ed. H. Feigl and G. Maxwell, New York, 1961, частично воспроизведено в книге, упомянутой в [24].
35. *Einstein A.*, Jahrb. Radioakt., **4**, 411 (1907) (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1965, т. 1, стр. 65).
36. *Planck M.*, Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., June 13, 1907; p. 542; Ann. Phys. (Leipzig), **26** (1908).
37. *Einstein A.*, Ann. Phys. (Leipzig), **35**, 898 (1911); английский перевод дан в книге The Principle of Relativity, см. [1] (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов. «Наука», 1965).
38. *Einstein A.*, Ann. Phys. (Leipzig), **38**, 355, 443 (1912) (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1965, т. 00, стр. 189).
39. *Abraham M.*, Lincei Atti, **20**, 678 (1911); Phys. Zs., **13**, 1, 4, 176, 310, 311, 793 (1912); Nuovo Cimento, **4**, 459 (1912).
40. *Nordström G.*, Phys. Zs., **13**, 1126 (1912); Ann. Phys. (Leipzig), **40**, 856 (1913); **42**, 533 (1913); **43**, 1101 (1914); Phys. Zs., **15**, 375 (1914); Ann. Acad. Sci. fenn., **57** (1914, 1915).
41. *Einstein A.*, Phys. Zs., **14**, 1249 (1913).
42. *Einstein A.*, *Grossmann M.*, Zs. Math. Phys., **62**, 225 (1913); **63** 215 (1914).
43. *Einstein A.*, Vierteljahr Nat. Ges. Zürich, **58**, 284 (1913); Archives sci. phys. nat., **37**, 5 (1914); Phys. Zs., **14**, 1249 (1913) (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1965, т. 1, стр. 227, 267, 273, 399).
44. *Einstein A.*, Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1914, p. 1030; 1915, pp. 778, 799, 831, 844.
45. *Hilbert D.*, Nachschr. Ges. Wiss. Göttingen, November 20, 1915, p. 395 (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1965, т. 1, стр. 326, 425, 435, 439, 448).

...Существуют четыре измерения, из которых три мы называем пространственными, а четвертое — временным. Правда, существует тенденция противопоставить три первых измерения последнему, но только потому, что наше сознание от начала нашей жизни и до ее конца движется рывками лишь в одном-единственном направлении этого последнего измерения.
— Это,— произнес Очень Молодой Человек, делая отчаянные усилия раскурить от лампы свою сигару,— это ... право, яснее ясного.

Г. Уэллс, Машина времени

Глава 2
СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В этой главе мы дадим обзор специальной теории относительности Эйнштейна. Хотя глава и представляет самостоятельный интерес, она содержит только краткое изложение результатов и основная цель ее — ввести обозначения и выписать некоторые формулы, полезные в дальнейшем. Читателю, которому необходимо более обширное введение в специальную теорию относительности, можно посоветовать прежде всего обратиться к монографиям, перечисленным в конце главы, а затем вернуться к чтению этой главы. Читателю, чувствующему себя свободно в этих вопросах, можно порекомендовать перейти непосредственно к главе 3.

§ 1. Преобразования Лоренца

Принцип специальной теории относительности гласит, что законы природы инвариантны относительно особой группы пространственно-временных преобразований координат, называемых преобразованиями Лоренца. В конце первой главы мы показали, что законы движения Ньютона инвариантны относительно галилеевых преобразований координат (1.3.2), а уравнения Максвелла не инвариантны относительно этих преобразований. Эйнштейн разрешил это противоречие, заменив галилееву инвариантность лоренц-инвариантностью. Я не стану продолжать обсуждения этой проблемы в историческом аспекте, а просто дам определение преобразований Лоренца, показав затем, как лоренц-инвариантность помогает исследовать законы природы.

Преобразования Лоренца есть переход от одной системы пространственно-временных координат x^α в другую систему x'^α.

Переход выполняется согласно правилу

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha}, \tag{2.1.1}$$

где a^{α} и $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ — константы, ограниченные условиями

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} \Lambda^{\beta}{}_{\delta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}, \tag{2.1.2}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1, & \alpha = \beta = 1, 2, 3, \\ -1, & \alpha = \beta = 0, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

В наших обозначениях α, β, γ, ... пробегают значения 1, 2, 3, 0; x^1, x^2, x^3 — декартовы компоненты положительного вектора $\mathbf{x}$, а x^0 есть время t. Мы будем использовать естественную систему единиц, в которой скорость света равна единице, так что все компоненты x^{α} имеют размерность длины. Если не оговорено иное, то по любому индексу, появляющемуся дважды (один раз как нижний, другой раз как верхний), подобно β в уравнении (2.1.1), производится суммирование. Таким образом, (2.1.1) есть сокращенная запись следующего выражения:

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{0} x^0 + \Lambda^{\alpha}{}_{1} x^1 + \Lambda^{\alpha}{}_{2} x^2 + \Lambda^{\alpha}{}_{3} x^3 + a^{\alpha}.$$

Фундаментальным свойством, отличающим преобразование Лоренца, является то, что оно оставляет инвариантным «собственное время», определяемое так:

$$d\tau^2 \equiv dt^2 - d\mathbf{x}^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}. \tag{2.1.4}$$

В новой системе координат x'^{α} дифференциалы координат задаются в виде

$$dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\, dx^{\gamma},$$

а потому новое координатное время записывается следующим образом:

$$d\tau'^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha}\, dx'^{\beta} = -\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} \Lambda^{\beta}{}_{\delta}\, dx^{\gamma}\, dx^{\delta} = -\eta_{\gamma\delta}\, dx^{\gamma}\, dx^{\delta},$$

и, следовательно,

$$d\tau'^2 = d\tau^2. \tag{2.1.5}$$

Именно это свойство преобразований Лоренца объясняет то, что Майкельсон и Морли обнаружили неизменность скорости света во всех инерциальных системах. Фронт световой волны имеет скорость $|\, d\mathbf{x}/dt \,|$, равную скорости света, которая в выбранной естественной системе равна единице; следовательно, распространение света описывается формулой

$$d\tau = 0. \tag{2.1.6}$$

При преобразовании Лоренца величина $d\tau$ не меняется, т. е. $d\tau'^2 = 0$, и, следовательно, $|\, d\mathbf{x}'/dt' \,| = 1$, т. е. скорость света и в новой системе равна единице.

Можно также показать, что преобразования Лоренца (2.1.1) являются *единственными* несингулярными преобразованиями $x \to x'$, которые оставляют инвариантным $d\tau^2$ (несингулярность преобразования означает, что $x'(x)$ и $\dot{x}(x')$ являются хорошими дифференцируемыми функциями и что матрица $\partial x'^{\alpha}/\partial x^{\beta}$ имеет хорошо определенную обратную матрицу $\partial x^{\beta}/\partial x'^{\alpha}$). Произвольные преобразования координат $x \to x'$, приводящие к замене $d\tau \to d\tau'$, задаются в виде

$$d\tau'^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha}\, dx'^{\beta} = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}\, dx^{\gamma}\, dx^{\delta}.$$

Если для всех dx^{γ} это выражение равно $d\tau^2$, должно выполняться условие

$$\eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}. \tag{2.1.7}$$

Дифференцируя (2.1.7) по x^{ε}, имеем

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\, dx^{\varepsilon}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}\, \partial x^{\varepsilon}} = 0.$$

Для того чтобы вычислить вторые производные, прибавим к этому выражению такое же уравнение с переставленными индексами γ и ε и вычтем уравнение с переставленными индексами ε и δ. В результате получим

$$\eta_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\, \partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}\, \partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon}\, \partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}\, \partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\, \partial x^{\delta}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\varepsilon}} - \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\varepsilon}\, \partial x^{\delta}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}\right] = 0.$$

Поскольку $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$, последний и предпоследний члены сокращаются со вторым и четвертым соответственно, а первый и третий оказываются равными. Тогда остается

$$2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\, \partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} = 0.$$

Но как $\eta_{\alpha\beta}$, так и $\partial x'^{\beta}/\partial x^{\delta}$ являются несингулярными матрицами. Поэтому получаем

$$\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\, \partial x^{\varepsilon}} = 0. \tag{2.1.8}$$

Общее решение уравнения (2.1.8) есть как раз линейная функция (2.1.1), и, подставляя (2.1.1) в (2.1.7), мы убеждаемся в том, что $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ должно удовлетворять условию (2.1.2). Это доказательство является элементарным примером того сорта соображений относительно симметричных пространств, которые мы изложим в главе 13. (Отметим попутно следствия из следующего предположения. Если преобразования $x \to x'$ оставляют $d\tau$ инвариантным только при $d\tau = 0$, т. е. для частицы, движущейся со скоростью света, то мы обнаружим, что эти преобразования являются в общем нелинейными и образуют 15-параметрическую группу, называемую конформной. Эта группа содержит преобразования Лоренца в качестве подгруппы. Но утверждение о том, что свободная частица движется с постоянной скоростью, не являлось бы инвариантным утверждением, если скорость частицы не равнялась бы скорости света. Зная, однако, о том, что в природе существуют массивные частицы, мы должны отвергнуть конформную симметрию как возможный принцип инвариантности природы.)

Сейчас принято называть весь набор преобразований Лоренца, записанных в форме (2.1.1), *неоднородной группой Лоренца* или *группой Пуанкаре*. Подгруппа, в которой все $a^{\alpha} = 0$, называется *однородной группой Лоренца*. Как однородная, так и неоднородная группы Лоренца имеют подгруппы, определяемые с помощью следующих дополнительных условий, налагаемых на Λ^{α}_{β}:

$$\Lambda^{0}{}_{0} \geqslant 1, \qquad \operatorname{Det} \Lambda = +1. \tag{2.1.9}$$

Эти подгруппы называются соответственно *собственной* однородной и собственной неоднородной группами Лоренца.

Отметим, что из (2.1.2) следует

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^2 = 1 + \sum_{i=1,\,2,\,3} (\Lambda^{i}{}_{0})^2 \geqslant 1 \tag{2.1.10}$$

$$(\operatorname{Det} \Lambda)^2 = 1. \tag{2.1.11}$$

[Выражение (2.1.10) вытекает из (2.1.2), если положить в нем $\gamma = \delta = 0$. Формулу (2.1.11) можно получить, если записать (2.1.2) как матричное уравнение $\eta = \Lambda^{T}\eta\Lambda$ и взять его детерминант.] Из (2.1.9) — (2.1.11) следует, что любая матрица Λ^{α}_{β}, которая непрерывным изменением параметров может быть превращена в тождественную матрицу δ^{α}_{β}, реализует собственное преобразование Лоренца. Действительно, никаким непрерывным изменением параметров нельзя перейти от $\Lambda^{0}{}_{0} \leqslant -1$ к $\Lambda^{0}{}_{0} \geqslant +1$, или, что то же самое, от $\operatorname{Det} \Lambda = -1$ к $\operatorname{Det} \Lambda = +1$, а тождественное преобразование имеет $\Lambda^{0}{}_{0} = +1$ и $\operatorname{Det} \Lambda = +1$. *Несобственные* преобразования Лоренца включают в себя инверсию пространства, обращение времени, либо их произведение. Как

известно, инверсия пространства (Det $\Lambda = -1$, $\Lambda^0{}_0 \geqslant 1$) не является точной симметрией природы [1—4]; что же касается обращения времени (Det $\Lambda = -1$, $\Lambda^0{}_0 \leqslant -1$), то весьма сомнительно, чтобы природа была строго симметрична относительно этого преобразования [5]. Если не оговорено иное, то мы почти всегда будем иметь дело с собственными преобразованиями Лоренца, т. е. с теми, которые удовлетворяют условиям (2.1.9). Далее, собственные однородные преобразования Лоренца имеют подгруппу вращений, для которой выполняются условия

$$\Lambda^i{}_j = R_{ij}, \qquad \Lambda^i{}_0 = \Lambda^0{}_i = 0, \qquad \Lambda^0{}_0 = 1.$$

Здесь R_{ij} — унимодулярная ортогональная матрица (Det $R = 1$ и $R^TR = 1$), а индексы i, j пробегают значения 1, 2, 3. Что касается вращений и пространственно-временных трансляций $x^\alpha \to x^\alpha + a^\alpha$, то между группой Лоренца и группой Галилея, обсужденной в первой главе, нет никаких различий. Различие содержится только в бустах[1]), т. е. в тех преобразованиях, которые изменяют скорость системы координат. Пусть один наблюдатель O видит частицу в покое, а по отношению к другому наблюдателю O' она движется со скоростью $\mathbf{v}$. Из (2.1.1) следует

$$dx'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \, dx^\beta \tag{2.1.12}$$

или, поскольку $d\mathbf{x} = 0$, имеем

$$dx'^i = \Lambda^i{}_0 \, dt \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2.1.13}$$

$$dt' = \Lambda^0{}_0 \, dt. \tag{2.1.14}$$

Отношение $d\mathbf{x}'/dt'$ определяет скорость $\mathbf{v}$, так что

$$\Lambda^i{}_0 = v_i \Lambda^0{}_0. \tag{2.1.15}$$

Второе соотношение между $\Lambda^i{}_0$ и $\Lambda^0{}_0$ можно вывести, положив в выражении (2.1.2) индексы $\gamma = \delta = 0$:

$$-1 = \Lambda^\alpha{}_0 \Lambda^\beta{}_0 \eta_{\alpha\beta} = \sum_{i=1,\,2,\,3} - (\Lambda^0{}_0)^2. \tag{2.1.16}$$

Решение уравнений (2.1.15) и (2.1.16) имеет вид:

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma, \tag{2.1.17}$$

$$\Lambda^i{}_0 = \gamma v_i, \tag{2.1.18}$$

где

$$\gamma \equiv (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}. \tag{2.1.19}$$

[1]) «Бустом» в физической литературе называют преобразование Лоренца от системы покоя к движущейся системе координат.— *Прим. ред.*

Другие компоненты $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ не определяются однозначно, так как если преобразование $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ переводит частицу из состояния покоя в состояние движения со скоростью $\mathbf{v}$, то это же можно сделать и с помощью преобразования $\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}R^{\gamma}{}_{\beta}$, где R — произвольное вращение. Удобен следующий выбор $\Lambda^{i}{}_{j}$, удовлетворяющий (2.1.2):

$$\Lambda^{i}{}_{j} = \delta_{ij} - v_i v_j \frac{(\gamma - 1)}{\mathbf{v}^2}, \tag{2.1.20}$$

$$\Lambda^{0}{}_{j} = \gamma v_j. \tag{2.1.21}$$

Легко видеть, что любое собственное однородное преобразование Лоренца можно выразить как произведение буста $\Lambda(\mathbf{v})$ на матрицу поворота R.

§ 2. Изменение масштаба времени

Хотя преобразования Лоренца были придуманы для того, чтобы объяснить инвариантность скорости света, замена галилеевой относительности релятивистской приводит немедленно к кинематическим следствиям для материальных объектов, движущихся со скоростью, меньшей скорости света. Простейшим и наиболее важным из них является изменение масштаба времени у движущихся часов. Предположим, что относительно данного наблюдателя часы покоятся. Тогда два последовательных временных отсчета разделены пространственно-временным интервалом $d\mathbf{x} = 0$, $dt = \Delta t$, где Δt — стандартная единица времени, задаваемая изготовителем часов. Собственный интервал времени в его системе равен

$$d\tau \equiv (dt^2 - d\mathbf{x}^2)^{1/2} = \Delta t.$$

Другой наблюдатель, относительно которого эти же часы движутся со скоростью $\mathbf{v}$, замечает, что два последовательных отсчета времени разделены не только временным интервалом dt', но также и пространственным интервалом $d\mathbf{x}' = \mathbf{v}\, dt'$. Он находит, что в его системе собственный интервал времени определяется следующим образом:

$$d\tau' \equiv (dt'^2 - d\mathbf{x}'^2)^{1/2} = (1 - \mathbf{v}^2)^{1/2}\, dt'.$$

Но по предположению оба наблюдателя находятся в инерциальных системах координат, т. е. в системах, связанных преобразованием Лоренца, и при сравнении наблюдений они должны обнаружить, что в согласии с уравнением (2.1.5) $d\tau = d\tau'$. Отсюда следует, что для наблюдателя, относительно которого часы движутся, временные отметки следуют с периодом

$$dt' = \Delta t\,(1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}. \tag{2.2.1}$$

[Соотношение (2.2.1) можно также вывести, используя выражения (2.1.14), (2.1.17) и (2.1.19).] Это соотношение буквально каждый день проверяется в экспериментах по измерению среднего времени жизни быстрых нестабильных частиц, рождающихся в космических лучах и на ускорителях. Частицы, естественно, не дают временных отметок; в этом случае уравнение (2.2.1) говорит о том, что движущаяся частица обладает средним временем жизни, большим, чем покоящаяся, из-за множителя $(1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$. Это находится в полном согласии с экспериментальными значениями, определяемыми с помощью электроники или по длине свободного пробега. Изменение масштаба времени (2.2.1) не следует путать с кажущимися растяжениями и сокращениями времени, известными как *эффект Доплера*. Пусть наши «часы»— движущийся источник света, частота которого $\nu = 1/\Delta t$. Тогда время между излучением двух последовательных волновых фронтов (характеризуемых, например, максимальными значениями какой-либо компоненты электрического поля) задается с помощью (2.2.1) в виде $dt' = \Delta t\,(1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$. Однако за это время расстояние между наблюдателем и источником света возрастет на величину $v_r\,dt'$, где v_r — компонента $\mathbf{v}$, направленная от наблюдателя к источнику света. Тогда периоды между *прибытиями* волновых фронтов в точку наблюдения равны

$$dt_0 = (1 + v_r)\,dt' = (1 + v_r)\,(1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}\,\Delta t.$$

Следовательно, отношение реально измеряемой частоты света к частоте покоящегося источника света равно

$$\frac{\nu_{\text{набл}}}{\nu} = (1 + v_r)^{-1}\,(1 - \mathbf{v}^2)^{1/2}. \qquad (2.2.2)$$

Если источник света удаляется от наблюдателя, то $v_r > 0$ и обязательно возникает красное смещение. Если источник света движется перпендикулярно направлению на наблюдателя, то $v_r = 0$ и мы будем иметь красное смещение только за счет изменения масштаба времени, обсужденного выше. Если же световой источник движется по направлению к наблюдателю, тогда $v_r = -v$ и (2.2.2) дает фиолетовое смещение, определяемое коэффициентом $(1 + v)^{1/2}\,(1 - v)^{-1/2}$. Переход от фиолетового к красному смещению возникает в том случае, когда источник движется под некоторым углом к линии источник — наблюдатель, отличным от 0 и 90°.

§ 3. Динамика частицы

Пусть частица движется в поле сил со скоростью, настолько большой, что ньютоновская механика не описывает удовлетворительно ее движение. Предположим, что, как и в случае электродинамики, мы знаем, как вычислить силу $\mathbf{F}$, действующую на нашу

частицу, в любой лоренцевой системе, в которой в данный момент частица покоится. Тогда движение нашей частицы можно рассчитать, переходя с помощью преобразования Лоренца к системе, в которой в некоторый момент времени t_0 частица находится в покое, затем вычисляя в момент времени $t_0 + dt$ скорость $d\mathbf{v} = \mathbf{F}\, dt/m$ и снова совершая преобразование Лоренца к системе, в которой скорость равна нулю уже в момент времени $t_0 + dt$ и т. д. К счастью, существует более легкий путь.

Определим *релятивистскую силу* f^α, действующую на частицу с координатой $x^\alpha(\tau)$, следующим образом:

$$f^\alpha = m \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}. \tag{2.3.1}$$

Очевидно, что, если f^α известна, можно рассчитать движение нашей частицы. Свяжем f^α с ньютоновской силой, замечая следующие два ее свойства:

А. Если частица находится в данный момент в покое, то собственный временной интервал $d\tau$ равен dt, так что $f^\alpha = F^\alpha$, где F^i — декартовы компоненты нерелятивистской силы $\mathbf{F}$, причем

$$F^0 \equiv 0. \tag{2.3.2}$$

Б. При преобразованиях Лоренца общего вида (2.1.1) дифференциал от координаты преобразуется по закону $dx'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\, dx^\beta$, тогда как $d\tau$ — инвариантно. Поэтому из (2.3.1) следует, что правило лоренцева преобразования для величины f^α имеет вид

$$f'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta f^\beta. \tag{2.3.3}$$

Любая величина, такая, как dx^α или f^α, преобразующаяся по правилу (2.3.3), называется *4-вектором*.

Предположим теперь, что в некоторый момент времени t_0 частица имеет скорость $\mathbf{v}$, и введем новую систему координат x'^α, определяемую следующим образом:

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta(\mathbf{v})\, x'^\beta,$$

где $\Lambda(\mathbf{v})$ является «бустом», задаваемым выражениями (2.1.17) — (2.1.21). Буст $\Lambda(\mathbf{v})$ построен так, что переводит частицу из состояния покоя в состояние движения со скоростью $\mathbf{v}$, а поскольку наша частица в системе координат x^α имеет в момент времени t_0 скорость $\mathbf{v}$, то в системе координат x'^α она должна в этот момент времени покоиться. Следовательно, согласно свойству «А», 4-вектор силы f^α в системе координат x'^α должен быть в момент времени t_0 равен нерелятивистской силе F^α. Далее, согласно свойству «Б», сила f^α в первоначальной системе координат равна

$$f^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta(\mathbf{v})\, F^\beta. \tag{2.3.4}$$

Менее формальная запись (2.3.4) с учетом того, что $F^0 = 0$, такова:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} + (\gamma - 1)\,\mathbf{v}\,\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F})}{v^2}, \tag{2.3.5}$$

$$f^0 = \gamma \mathbf{v}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{v}\ \mathbf{f}. \tag{2.3.6}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — мгновенное значение скорости.

Теперь, когда известно, как вычислить f^α, можно использовать дифференциальное уравнение (2.3.1), чтобы найти четыре связанные переменные $x^\alpha(\tau)$, а затем, исключив τ, определить $\mathbf{x}(t)$. Однако начальные значения $dx^\alpha/d\tau$ должны быть выбраны так, чтобы $d\tau$ действительно было собственным временем, т. е. чтобы выполнялось условие

$$-1 = \eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}. \tag{2.3.7}$$

Отметим, что (2.3.7) будет справедливо при всех τ, если оно справедливо при некотором начальном значении τ, при условии, что производная (2.3.7) равна нулю, т. е.

$$0 = 2\eta_{\alpha\beta}f^\alpha\frac{dx^\beta}{d\tau}. \tag{2.3.8}$$

То, что это *действительно* верно, можно видеть непосредственно из (2.3.4) либо более элегантным способом, замечая, что правая часть (2.3.8) лоренц-инвариантна, т. е.

$$\eta_{\alpha\beta}f'^\alpha\frac{dx'^\beta}{d\tau} = \eta_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta f^\gamma\frac{dx^\delta}{d\tau} = \eta_{\gamma\delta}f^\gamma\frac{dx^\delta}{d\tau},$$

и в силу условия (2.3.2) равна нулю в той системе отсчета, в которой частица покоится.

§ 4. Энергия и импульс

Релятивистская форма второго закона Ньютона немедленно приводит к следующему определению 4-вектора энергии-импульса:

$$p^\alpha \equiv m\frac{dx^\alpha}{d\tau}. \tag{2.4.1}$$

Тогда второй закон Ньютона записывается в виде

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = f^\alpha. \tag{2.4.2}$$

Напомним, что

$$d\tau \equiv (dt^2 - d\mathbf{x}^2)^{1/2} = (1 - \mathbf{v}^2)^{1/2}dt,$$

где

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

Тогда пространственные компоненты p образуют вектор импульса

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}, \tag{2.4.3}$$

а временная компонента дает энергию

$$\mathbf{p}^0 \equiv E = m\gamma, \tag{2.4.4}$$

где

$$\gamma \equiv \frac{dt}{d\tau} = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}. \tag{2.4.5}$$

Из этих определений следует, что при малых $\mathbf{v}$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + 0(\mathbf{v}^3), \tag{2.4.6}$$

$$E = m + \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + 0(\mathbf{v}^4) \tag{2.4.7}$$

в соответствии с нерелятивистскими формулами, за исключением слагаемого m в E. (Напомним, что в наших единицах 1 с равна $3 \cdot 10^{10}$ см, а потому 1 г равен $9 \cdot 10^{20}$ эрг.) Иногда коэффициент $m\gamma$ называют релятивистской массой и обозначают $\tilde{m}$, так что $\mathbf{p} = \tilde{m}\mathbf{v}$. Мы не будем здесь придерживаться таких обозначений; далее под m мы будем подразумевать постоянную «массу».

Почему $\mathbf{p}$ и E называют релятивистскими импульсом и энергией? Эти названия можно приписать чему угодно, но, чтобы понятия импульса и энергии были полезны, их нужно отнести к *сохраняющимся* величинам. Существенной особенностью определенных выше $\mathbf{p}$ и E является то, что если один наблюдатель отмечает сохранение этих величин в какой-нибудь реакции, то это же может сказать и любой другой наблюдатель в системе, связанной с первой преобразованием Лоренца. Заметим, что dx^α есть 4-вектор, в то время как m и $d\tau$ — инварианты. Поэтому для любой отдельной частицы p^α является 4-вектором, т. е. при преобразованиях (2.1.1) импульс трансформируется следующим образом:

$$p'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta p^\beta,$$

поскольку Λ зависит только от выполняемого преобразования Лоренца, то в любой реакции изменение суммы импульсов p^α всех частиц есть также 4-вектор, т. е.

$$\Delta \sum_n p_n'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \Delta \sum_n p_n^\beta.$$

(Суммирование здесь производится по всем частицам, а символ Δ означает разность между импульсами начального и конечного состояний.)

Сохранение $\mathbf{p}$ и E в первоначальной инерциальной системе означает, что $\Delta \sum_n p_n^\beta$ исчезает, так что в любой системе координат

связанной с первой преобразованием Лоренца, величины $\mathbf{p}$ и E также будут сохраняться, т. е. $\Delta \sum_n p_n^\alpha$ будет обращаться в нуль.

Не станем показывать здесь, что $\mathbf{p}$ и E являются *единственными* функциями скорости, сохранение которых лоренц-инвариантно [6]. Однако стоит обратить особое внимание на тот факт, что E должно сохраняться, если сохраняется $\mathbf{p}$. Действительно, пусть в двух различных системах координат, связанных преобразованием Лоренца, импульс сохраняется, т. е. справедливы следующие соотношения:

$$\Delta \sum_n \mathbf{p}_n = 0, \qquad \Delta \sum_n \mathbf{p}'_n = 0.$$

Так как $\Delta \sum_n p_n^\alpha$ есть 4-вектор, имеем

$$\Delta \sum_n p_n'^i = \Lambda^i{}_\beta \Delta \sum_n p_n^\beta$$

и, учитывая сохранение импульса в обеих системах координат, получаем

$$0 = \Lambda^i{}_0 \Delta \sum_n p_n^0.$$

Но Λ_0^i с необходимостью отлично от нуля, поэтому $p^0 = E$ сохраняется.

При нулевой скорости энергия E имеет конечное значение m. По этой причине мы будем иногда называть величину $E - m$ «кинетической энергией», поскольку для малых $\mathbf{v}$ она приближенно равна $^1/_2 m\mathbf{v}^2$. Если в реакции сохраняется полная масса (как в случае упругого рассеяния), то кинетическая энергия сохраняется. Но если какое-то количество массы уничтожается (как в радиоактивном распаде, при делении или синтезе), то высвобождается большое количество кинетической энергии, важность чего хорошо известна.

Из уравнений (2.4.3) и (2.4.4) можно исключить скорость, что дает соотношение между энергией и импульсом:

$$E(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}. \tag{2.4.8}$$

То же самое можно вывести, замечая, что из (2.4.1) и определения $d\tau$ следует

$$\eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = -m^2.$$

Для фотона или нейтрино нужно положить $\mathbf{v}^2 = 1$ и $m = 0$; отсюда немедленно следуют выражения (2.4.3) и (2.4.4), а их отношение приводит к связи, справедливой для всех частиц:

$$\frac{\mathbf{p}}{E} = \mathbf{v}. \tag{2.4.10}$$

Отметим, что для $m = 0$ формула (2.4.8) сводится к равенству $E = |\mathbf{p}|$, как и должно быть для безмассовых частиц, поскольку их скорость $\mathbf{v}$ — единичный вектор.

§ 5. Векторы и тензоры

Теперь мы переходим к электродинамике и релятивистской гидродинамике, но для удобства перехода сделаем отступление и введем сперва систему обозначений, которая сделает лоренц-преобразования физических величин более прозрачными. В гл. 4 эта система будет распространена на тензорный анализ, чтобы включить и общие координатные преобразования, но фактически для этого почти не потребуется изменений.

Мы уже ввели термин «4-вектор» для любой величины, такой, как dx^α, f^α или p^α, которая преобразуется следующим образом:

$$V^\alpha \to V^{\alpha'} = \Lambda^\alpha{}_\beta V^\beta, \tag{2.5.1}$$

при замене системы координат:

$$x^\alpha \to x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x_\beta. \tag{2.5.2}$$

Точнее будет назвать такой вектор V^α *контравариантным* 4-вектором, чтобы отличить его от *ковариантного* 4-вектора U_α, который определяется как величина, преобразующаяся по следующему правилу

$$U_\alpha \to U'_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta U_\beta, \tag{2.5.3}$$

где

$$\Lambda_\alpha{}^\beta \equiv \eta_{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}\Lambda^\gamma{}_\delta. \tag{2.5.4}$$

Матрица $\eta^{\beta\delta}$, введенная здесь, численно та же, что и $\eta_{\beta\delta}$, т. е.

$$\eta^{\beta\delta} = \eta_{\beta\delta}, \tag{2.5.5}$$

но мы записываем ее с поднятыми вверх индексами в соответствии с нашим условным обозначением операции суммирования. Отметим, что

$$\eta^{\beta\delta}\eta_{\alpha\delta} = \delta^\beta{}_\alpha \equiv \begin{cases} +1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \tag{2.5.6}$$

а потому $\Lambda_\alpha{}^\beta$ — матрица, обратная $\Lambda^\beta{}_\alpha$, т. е.

$$\Lambda_\alpha{}^\gamma \Lambda^\alpha{}_\beta = \eta_{\alpha\delta}\eta^{\gamma\varepsilon}\Lambda^\delta{}_\varepsilon\Lambda^\alpha{}_\beta = \eta_{\varepsilon\beta}\eta^{\gamma\varepsilon} = \delta^\gamma{}_\beta. \tag{2.5.7}$$

Отсюда следует, что скалярное произведение контравариантного и ковариантного 4-векторов есть инвариант, т. е.

$$U'_\alpha V'^\alpha = \Lambda_\alpha{}^\gamma \Lambda^\alpha{}_\beta U_\gamma V^\beta = U_\beta V^\beta. \tag{2.5.8}$$

Каждому контравариантному 4-вектору V^α соответствует ковариантный 4-вектор

$$V_\alpha \equiv \eta_{\alpha\beta} V^\beta, \tag{2.5.9}$$

а каждому ковариантному U_α соответствует контравариантный

$$U^\alpha \equiv \eta^{\alpha\beta} U_\beta. \tag{2.5.10}$$

Заметим, что поднимание индекса у V_α дает просто V^α, а опускание индекса у U^α переводит его обратно в U_α, т. е.

$$\eta^{\alpha\beta} V_\beta = \eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma} V^\gamma = V^\alpha,$$
$$\eta_{\alpha\beta} U^\beta = \eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} U_\gamma = U_\alpha.$$

Отметим также, что в соответствии с (2.5.3) величина (2.5.9) в самом деле является ковариантным вектором, поскольку

$$V'_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V'^\beta = \eta_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\gamma V^\gamma = \eta_{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}\Lambda^\beta{}_\gamma V_\delta = \Lambda_\alpha{}^\delta V_\delta.$$

Аналогично величина (2.5.10) действительно является контравариантным вектором.

Хотя любой вектор можно записать, как в ко-, так и в контравариантной форме, существуют некоторые векторы, такие, как dx^α, которые выглядят более естественно в контравариантном виде. Другие же, напротив, более естественны как ковариантны. Примером последнего может служить градиент $\partial/\partial x^\alpha$, подчиняющийся трансформационному правилу:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \to \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}.$$

Умножая (2.5.1) на $\Lambda_\alpha{}^\gamma$, получаем

$$x^\gamma = \Lambda_\alpha{}^\gamma x'^\alpha,$$
$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = \Lambda_\alpha{}^\beta,$$

а потому градиент ковариантен:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \Lambda_\alpha{}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \tag{2.5.11}$$

Отсюда следует, во-первых, что дивергенция контравариантного вектора $\partial V^\alpha/\partial x^\alpha$ есть инвариант и, во-вторых, что скалярное произведение $\partial/\partial x^\alpha$ самого на себя, называемое оператором Даламбера,

$$\Box^2 = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2.5.12}$$

есть также инвариант.

Многие физические величины не являются ни скалярами, ни векторами, а являются более сложными объектами, которые называются тензорами. Тензор имеет несколько контравариантных и (или) ковариантных индексов с соответствующими свойствами лоренц-преобразований по ним, например

$$T^{\nu}{}_{\alpha\beta} \to T'^{\nu}{}_{\alpha\beta} = \Lambda^{\nu}{}_{\delta}\Lambda_{\alpha}{}^{\varepsilon}\Lambda_{\beta}{}^{\zeta}T^{\delta}{}_{\varepsilon\zeta}.$$

Контравариантный или ковариантный вектор можно рассматривать как тензор, имеющий один индекс, а скаляр — как тензор без индексов. Существует несколько способов образования тензоров из других тензоров:

А. Линейная комбинация. Линейная комбинация тензоров с одними и теми же верхними и нижними индексами есть тензор с теми же индексами. Например, если R^{α}_{β} и S^{α}_{β} — тензоры, а a и b — скаляры, и мы зададим T^{α}_{β} в виде

$$T^{\alpha}{}_{\beta} \equiv aR^{\alpha}{}_{\beta} + bS^{\alpha}{}_{\beta},$$

то $T^{\alpha}{}_{\beta}$ есть тензор, т. е.

$$T'^{\alpha}{}_{\beta} \equiv aR'^{\alpha}{}_{\beta} + bS'^{\alpha}{}_{\beta} = a\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}R^{\nu}{}_{\delta} + b\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}S^{\nu}{}_{\delta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}T^{\nu}{}_{\delta}.$$

Б. Прямое произведение. Произведение компонент двух тензоров есть тензор, верхние и нижние индексы которого состоят соответственно из всех верхних и нижних индексов двух исходных тензоров. Например, если $A^{\alpha}{}_{\beta}$ и B^{ν} являются тензорами

$$T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\nu} \equiv A^{\alpha}{}_{\beta}B^{\nu},$$

то $T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\nu}$ есть тензор, т. е.

$$T'^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\nu} = A'^{\alpha}{}_{\beta}B'^{\nu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\delta}\Lambda_{\beta}{}^{\varepsilon}\Lambda^{\nu}{}_{\zeta}T^{\delta}{}_{\varepsilon}{}^{\zeta}.$$

В. Свертка. Приравняв какие-нибудь верхние и нижние индексы попарно и произведя суммирование по их значениям 0, 1, 2, 3, получим тензор, у которого этих двух индексов уже не будет. Например, если $T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\nu\delta}$ — тензор и

$$T^{\alpha\nu} \equiv T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\nu\beta},$$

то $T^{\alpha\nu}$ тоже является тензором, т. е.

$$\begin{aligned} T'^{\alpha\nu} \equiv T'^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\nu\beta} = \\ = \Lambda^{\alpha}{}_{\delta}\Lambda_{\beta}{}^{\varepsilon}\Lambda^{\nu}{}_{\zeta}\Lambda^{\beta}{}_{\varkappa}T^{\delta}{}_{\varepsilon}{}^{\zeta\varkappa} = \\ = \Lambda^{\alpha}{}_{\delta}\Lambda^{\nu}{}_{\zeta}\delta^{\varepsilon}{}_{\varkappa}T^{\delta}{}_{\varepsilon}{}^{\zeta\varkappa} = \\ = \Lambda^{\alpha}{}_{\delta}\Lambda^{\nu}{}_{\zeta}T^{\delta\zeta}. \end{aligned}$$

Г. Дифференцирование. Производная $\partial/\partial x^\alpha$ любого тензора есть тензор, имеющий один дополнительный нижний индекс α. Например, если $T^{\beta\nu}$ — тензор и

$$T_\alpha{}^{\beta\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\beta\nu},$$

то $T_\alpha{}^{\beta\nu}$ также является тензором, поскольку

$$T'_\alpha{}^{\beta\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} T'^{\beta\nu} =$$

$$= \Lambda_\alpha{}^\delta \frac{\partial}{\partial x^\delta} \Lambda^\beta{}_\varepsilon \Lambda^\nu{}_\zeta T^{\varepsilon\zeta} =$$

$$= \Lambda_\alpha{}^\delta \Lambda^\beta{}_\varepsilon \Lambda^\nu{}_\zeta T_\delta{}^{\varepsilon\zeta};$$

отметим, что порядок следования индексов существен даже в расстановке верхних и нижних индексов. Например, $T_\alpha{}^{\beta\nu}$ может и не совпадать с $T^\beta{}_\alpha{}^\nu$.

Кроме скаляров, еще три особых тензора обладают тем свойством, что компоненты их одинаковы во всех координатных системах:

1. Тензор Минковского. Из определения преобразования Лоренца немедленно следует, что $\eta_{\alpha\beta}$ есть ковариантный тензор, т. е.

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\nu{}_\alpha \Lambda^\delta{}_\beta \eta_{\nu\delta}.$$

Умножая это соотношение на $\eta^{\alpha\varepsilon}\eta^{\beta\zeta}$ и используя (2.5.6) и (2.5.4), находим, что

$$\eta^{\varepsilon\zeta} = \eta^{\nu\varkappa}\eta^{\delta\lambda}\Lambda_\varkappa{}^\varepsilon \Lambda_\lambda{}^\zeta \eta_{\nu\delta} =$$

$$= \eta^{\varkappa\lambda}\Lambda_\varkappa{}^\varepsilon \Lambda_\lambda{}^\zeta,$$

а потому $\eta^{\alpha\beta}$ является контравариантным тензором. (Напомним, что $\eta_{\alpha\beta}$ и $\eta^{\alpha\beta}$ численно совпадают, следовательно, это матрица, которая может быть и ковариантной и контравариантной.) Можно построить смешанный тензор, опуская один индекс у $\eta^{\alpha\beta}$ или поднимая один индекс у $\eta_{\alpha\beta}$; это даст нам символ Кронекера

$$\delta^\alpha{}_\beta = \eta^{\alpha\nu}\eta_{\nu\beta}.$$

То, что это действительно тензор, следует из правил Б и В и из того факта, что $\eta^{\alpha\nu}$ и $\eta_{\nu\beta}$ — тензоры.

2. Тензор Леви-Чивита. Это величина $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, определяемая следующим образом:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, & \text{если индексы } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ составляют четную перестановку } 0123, \\ -1, & \text{если индексы } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ составляют нечетную перестановку } 0123, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.5.13}$$

Заметим, что справедливо соотношение

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\varepsilon}\Lambda^{\beta}{}_{\zeta}\Lambda^{\gamma}{}_{\varkappa}\Lambda^{\delta}{}_{\lambda}\varepsilon^{\varepsilon\zeta\varkappa\lambda} \sim \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

так как левая часть его должна быть нечетной при любой однократной перестановке индексов $\alpha\beta\gamma\delta$. Для того чтобы найти коэффициент пропорциональности, положим $\alpha\beta\gamma\delta = 0123$. Тогда левая часть рассматриваемого соотношения есть просто детерминант Λ, который при собственных преобразованиях Лоренца равен единице (см. § 1 гл. 2). Таким образом, коэффициент пропорциональности равен единице, т. е.

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\varepsilon}\Lambda^{\beta}{}_{\zeta}\Lambda^{\gamma}{}_{\varkappa}\Lambda^{\delta}{}_{\lambda}\varepsilon^{\varepsilon\zeta\varkappa\lambda} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{2.5.14}$$

и, следовательно, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — *действительно* тензор.

3. Нулевой тензор. Такой тензор можно определить как объект с произвольным числом верхних и нижних индексов, у которого все компоненты равны нулю.

Поскольку $\eta^{\alpha\beta}$ и $\eta_{\alpha\beta}$ являются тензорами, их можно использовать, чтобы поднимать или опускать индексы у произвольного тензора; из правил Б и В вытекает, что это дает нам новый тензор, у которого становится на один верхний или нижний индекс больше и соответственно на один нижний или верхний индекс меньше. Например, если $T_{\alpha\beta\gamma}$ — тензор, то таким новым тензором будет

$$T_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\gamma} \equiv \eta^{\delta\beta}T_{\alpha\beta\gamma}.$$

В частности, у тензора Леви-Чивита $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно опустить вниз некоторые или все индексы. Опустив все индексы, получаем то же численное значение, но со знаком минус:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{2.5.15}$$

Польза этого алгебраического подхода заключается в том, что мы можем по виду уравнения моментально определить, является ли оно лоренц-инвариантным. Фундаментальная теорема утверждает, *что если два тензора с одинаковыми верхними и нижними индексами равны в одной системе координат, то они равны в любой другой системе координат, связанной с первой преобразованием*

Лоренца. Например, если $T^{\alpha}_{\beta} = S^{\alpha}{}_{\beta}$, то

$$T'^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}T^{\gamma}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}S^{\gamma}{}_{\delta} = S'^{\alpha}{}_{\beta}.$$

Частный случай этой теоремы — *утверждение, что нулевой тензор лоренц-инвариантен.* Формализм, приведенный в общих чертах в этом параграфе, есть не что иное, как описание представлений однородной группы Лоренца. Мы займёмся исследованием этих представлений в более общем виде в § 12 гл. 2.

§ 6. Токи и плотности

Пусть у нас есть система частиц с зарядами e_n, а их положение задается радиусами-векторами $\mathbf{x}_n(t)$. Ток и плотность зарядов, как обычно, определим следующим образом:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{d\mathbf{x}_n(t)}{dt}, \tag{2.6.1}$$

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)). \tag{2.6.2}$$

Здесь δ^3 — дельта-функция Дирака, определяемая с помощью условия, что для любой гладкой функции $f(x)$ должно выполняться условие

$$\int d^3x f(\mathbf{x})\, \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}).$$

Мы можем объединить $\mathbf{J}$ и ε в 4-вектор J^{α}, положив

$$J^0 \equiv \varepsilon, \tag{2.6.3}$$

т. е.

$$J^{\alpha}(x) \equiv \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{dx_n^{\alpha}(t)}{dt}. \tag{2.6.4}$$

Для того чтобы показать, что это действительно 4-вектор, зададим $x_n^0(t) = t$ и запишем (2.6.4) в виде

$$J^{\alpha}(x) = \int dt' \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(t')) \frac{dx_n^{\alpha}(t')}{dt'}.$$

Дифференциалы dt' сокращаются, поэтому их можно заменить инвариантами $d\tau$:

$$J^{\alpha}(x) = \int d\tau \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{dx_n^{\alpha}(\tau)}{d\tau}. \tag{2.6.5}$$

Но $\delta^4(x - x_n(\tau))$ есть скаляр (так как $\mathrm{Det}\,\Lambda = 1$), а dx_n^{α} — 4-вектор, следовательно, и J^{α} является 4-вектором.

Отметим также, что

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} =$$

$$= -\sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{\partial x_n^i(t)}{dt} =$$

$$= -\sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\mathbf{x}, t),$$

или в четырехмерной записи

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha(x) = 0. \tag{2.6.6}$$

Лоренц-инвариантность этого уравнения очевидна. Если ток $J^\alpha(x)$ удовлетворяет инвариантному закону сохранения (2.6.6), можно построить полный заряд

$$Q \equiv \int d^3x J^0(x). \tag{2.6.7}$$

Эта величина не зависит от времени, так как (2.6.6) и теорема Гаусса приводят к результату

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^0} J^0(x) = -\int d^3x \nabla \cdot \mathbf{J}(x) = 0.$$

Если $J^\alpha(x)$ есть 4-вектор, то Q является не только константой, но и скаляром. Для того чтобы убедиться в этом, запишем Q в виде

$$Q = \int d^4x J^\alpha(x) \partial_\alpha \theta(n_\beta x^\beta), \tag{2.6.8}$$

где θ — функция Хэвисайда (ступенька):

$$\theta(s) = \begin{cases} 1 & s > 0, \\ 0 & s < 0, \end{cases}$$

а n_λ задается следующим образом:

$$n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv 0, \qquad n_0 \equiv +1.$$

Тогда преобразование Лоренца величины Q сводится, очевидно, просто к замене в ней $n \to n'$:

$$Q' = \int d^4x J^\alpha(x) \partial_\alpha \theta(n'_\beta x^\beta),$$

$$n'_\beta \equiv \Lambda_\beta{}^\gamma n_\gamma.$$

Если же использовать (2.6.6), изменение Q выражается так:

$$Q' - Q = \int d^4x \partial_\alpha [J^\alpha(x) \{\theta(n'_\beta x^\beta) - \theta(n_\beta x^\beta)\}].$$

Можно считать, что ток $J^\alpha(x)$ исчезает при $|\mathbf{x}| \to \infty$ и фиксированном t, в то время как функция $\theta(n'_\beta x^\beta) - \theta(n_\beta x^\beta)$ обращается в нуль, если $|t| \to \infty$, а $|\mathbf{x}|$ фиксировано. Следовательно, можно воспользоваться четырехмерной теоремой Гаусса и показать, что $Q' - Q = 0$, т. е. Q есть скаляр. [Для плотности тока J^0, определяемой с помощью (2.6.2), заряд (2.6.7) задается в виде

$$Q = \sum_n e_n$$

и является, конечно, скалярной константой. Однако, если иметь дело с распределениями заряда и тока протяженных частиц, важно отчетливо понимать, что (2.6.7) вводит не зависящий от времени скаляр для *любого* сохраняющегося 4-вектора J^α.]

§ 7. Электродинамика

Уравнения Максвелла для электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, создаваемых заданной плотностью заряда ε и плотностью тока $\mathbf{J}$, имеют вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon, \tag{2.7.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \tag{2.7.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.7.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{2.7.4}$$

Для того чтобы исследовать свойства $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ при лоренц-преобразованиях, введем матрицу $F^{\alpha\beta}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} F^{12} &= B_3, & F^{23} &= B_1, & F^{31} &= B_2 \\ F^{01} &= E_1, & F^{02} &= E_2, & F^{03} &= E_3, \\ F^{\alpha\beta} &= -F^{\beta\alpha}. \end{aligned} \tag{2.7.5}$$

Тогда (2.7.1) и (2.7.2) можно переписать в виде (напомним, что $J^0 \equiv \varepsilon$)

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = -J^\beta, \tag{2.7.6}$$

в то время как (2.7.3) и (2.7.4) запишутся так:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\delta} = 0, \tag{2.7.7}$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — символ Леви-Чивита, определенный в § 5 гл. 2, а $F_{\gamma\delta}$ — ковариант, определяемый обычным образом:

$$F_{\gamma\delta} \equiv \eta_{\gamma\alpha}\eta_{\delta\beta}F^{\alpha\beta}.$$

Так как J^α — 4-вектор, можно сделать вывод, что $F^{\alpha\beta}$ есть тензор:

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta F^{\gamma\delta}. \tag{2.7.8}$$

Действительно, если $F^{\alpha\beta}$ является решением (2.7.6) и (2.7.7), то (2.7.8) будет решением в любой лоренц-преобразованной системе координат. Электромагнитная сила, действующая на заряженную частицу, определяется так:

$$f^\alpha = e\eta_{\beta\gamma} F^{\alpha\beta} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = eF^\alpha{}_\gamma \frac{dx^\gamma}{d\tau}. \tag{2.7.9}$$

В том, что эта формула правильная, можно убедиться, повторяя аргументы, приведенные в § 3. Выражение (2.7.9) справедливо в той системе отсчета, в которой покоится частица, так как в этой системе $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, $f^0 = 0$. Оно преобразуется как 4-вектор, а поэтому справедливо для всех скоростей. Отметим, кстати, что (2.7.9) и (2.4.2) дают

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\,[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

и, следовательно, формула для магнитной силы возникает как следствие специальной теории относительности.

Существует удобная альтернативная форма однородного уравнения (2.7.7), а именно

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} F_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.7.10}$$

Отметим, что, если все индексы α, β, γ различны, уравнение (2.7.10) совпадает с (2.7.7). Например, при $\alpha = 0$ уравнение (2.7.7) дает тот же результат, что и уравнение (2.7.10) при $\alpha\beta\gamma = 1\,2\,3$. Далее при двух равных индексах уравнение (2.7.10) обращается в тождество, например, при $\beta = \gamma$ (2.7.10) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\beta\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{(без суммирования)}$$

и выполняется тождественно, поскольку $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$. Уравнение (2.7.7) позволяет представить $F_{\gamma\delta}$ как ротор 4-вектора A_γ:

$$F_{\gamma\delta} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} A_\delta - \frac{\partial}{\partial x^\delta} A_\gamma \tag{2.7.11}$$

(см. § 11 гл. 4).

Можно ввести в A_γ член $\partial_\gamma \varphi$, не изменяя $F_{\gamma\delta}$, так как A_γ может быть определено таким образом, чтобы

$$\partial^\alpha A_\alpha = 0. \tag{2.7.12}$$

Если учесть (2.7.11) и (2.7.12), то остальные уравнения Максвелла сводятся к уравнению

$$\Box^2 A_\alpha = -J_\alpha. \tag{2.7.13}$$

§ 8. Тензор энергии-импульса

В § 5 мы ввели плотность электрического заряда ε и тока $\mathbf{J}$. Сейчас аналогичным образом мы дадим определение заряда и тока 4-вектора энергии-импульса p^α. Рассмотрим сначала систему n частиц с 4-вектором энергии-импульса $p_n^\alpha(t)$. Плотность p^α определяется следующим образом:

$$T^{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n p_n^\alpha(t)\, \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)), \tag{2.8.1}$$

а ток задается в виде

$$T^{\alpha i}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)). \tag{2.8.2}$$

Эти два определения можно объединить одной формулой:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)), \tag{2.8.3}$$

где $x_n{}^0(t) \equiv t$. Отметим, что из (2.4.10) следует

$$p_n^\beta = E_n \frac{dx_n^\beta}{dt},$$

поэтому (2.8.3) можно записать в виде

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{E_n} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)). \tag{2.8.4}$$

Отсюда видно, что тензор $T^{\alpha\beta}$ *симметричен*:

$$T^{\alpha\beta}(x) = T^{\beta\alpha}(x). \tag{2.8.5}$$

По аналогии с (2.6.5) мы можем переписать (2.8.3) еще и так:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n d\tau p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta}{d\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)), \tag{2.8.5а}$$

откуда видно, что $T^{\alpha\beta}$ действительно *тензор*, т. е. при преобразованиях Лоренца (2.1.1) ведет себя следующим образом:

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta T^{\gamma\delta}.$$

Чтобы установить закон сохранения для $T^{\alpha\beta}$, потребуются несколько бóльшие усилия. Возвращаясь к (2.8.1) и (2.8.2), мы

видим, что

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T^{\alpha i}(\mathbf{x}, t) = -\sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) =$$

$$= -\sum_n p_n^\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) + \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = G^\alpha, \tag{2.8.6}$$

где G^α — *плотность силы*:

$$G^\alpha(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} = \sum_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{d\tau}{dt} f_n^\alpha(t).$$

Если частицы свободны, то p_n^α будет постоянным, а $T^{\alpha\beta}$ сохраняется, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = 0. \tag{2.8.7}$$

Этот же закон справедлив, если частицы взаимодействуют только при столкновениях, строго локализованных в пространстве. В этом случае (2.8.6) дает

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = \sum_c \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)) \frac{d}{dt} \sum_{n \in c} p_n^\alpha(t),$$

где $\mathbf{x}_c(t)$ — координаты c-го столкновения, происходящего в момент времени t, а символ $n \in c$ означает, что мы суммируем только по частицам, участвующим в c-м столкновении. Но при каждом столкновении импульс сохраняется, поэтому величина $\sum_{n \in c} p_n^\alpha(t)$ не зависит от времени, и, следовательно, выполняется закон сохранения (2.8.7).

Тензор энергии-импульса (2.8.3) не сохраняется, если частицы являются объектами, испытывающими действие сил на расстоянии. Рассмотрим, например, газ, состоящий из заряженных частиц с зарядами e_n. Тогда (2.8.6), (2.4.1) и (2.7.9) дают

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n e_n F^\alpha{}_\gamma(x) \frac{dx_n^\gamma}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)),$$

и, если использовать (2.6.4), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = F^\alpha{}_\gamma(x) J^\gamma(x). \tag{2.8.8}$$

Такой тензор не сохраняется, но можно построить сохраняющийся тензор, добавив чисто электромагнитный член, имеющий вид:

$$T^{\alpha\beta}_{\text{эм}} \equiv F^\alpha{}_\gamma F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}. \tag{2.8.9}$$

Следовательно, плотности электромагнитной энергии и импульса задаются следующим образом:

$$T^{00}_{\text{эм}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \qquad T^{i0}_{\text{эм}} = (\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i. \tag{2.8.10}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}_{\text{эм}} = F^\alpha{}_\gamma \frac{\partial}{\partial x^\beta} F^{\beta\gamma} + F^{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\beta} F^\alpha{}_\gamma - \frac{1}{2} F_{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} F^{\gamma\delta}.$$

[Здесь $\partial/\partial x_\alpha = \eta^{\alpha\beta}(\partial/\partial x^\beta)$.] Небольшая перегруппировка индексов приводит к следующему выражению:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}_{\text{эм}} = F^\alpha{}_\gamma \frac{\partial}{\partial x^\beta} F^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} F_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} F^{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} T^{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} F^{\alpha\beta}\right).$$

Используя уравнения Максвелла (2.7.6) и (2.7.10), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}_{\text{эм}} = -F^\alpha{}_\gamma J^\gamma. \tag{2.8.11}$$

Сравнивая теперь (2.8.8) с (2.8.11), приходим к следующему переопределению тензора энергии-импульса:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n p^\alpha_n \frac{dx^\beta_n}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) + T^{\alpha\beta}_{\text{эм}}. \tag{2.8.12}$$

Этот тензор по-прежнему симметричен, но теперь он сохраняется:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0. \tag{2.8.13}$$

Можно прибавлять к тензору $T^{\alpha\beta}$ все новые и новые члены, вводя другие поля, но оставляя тензор $T^{\alpha\beta}$ сохраняющимся. Систематический метод построения таких членов описан в гл. 12.

Интеграл от плотности заряда J^0 есть как раз полный заряд, а интеграл от плотности $T^{\alpha 0}$ импульса p^α — полный импульс $p^\alpha_{\text{полн}}$:

$$p^\alpha_{\text{полн}} = \int d^3x T^{\alpha 0}(\mathbf{x}, t). \tag{2.8.14}$$

То, что это сохраняющийся 4-вектор, можно показать таким же образом, как мы показали в § 6, что полный заряд (2.6.7) является сохраняющимся скаляром.

§ 9. Спин

Тензор энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$ можно использовать для определения углового момента и спина. Рассмотрим изолированную систему, для которой *полный* тензор энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$ сохраняется:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} T^{\beta\nu} = 0.$$

Можно с помощью тензора T построить другой тензор

$$M^{\alpha\beta\nu} \equiv x^\alpha T^{\beta\nu} - x^\beta T^{\alpha\nu}. \tag{2.9.1}$$

Поскольку T симметричен и сохраняется, M будет также сохраняться:

$$\frac{\partial M^{\nu\alpha\beta}}{\partial x^\nu} = T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} = 0. \tag{2.9.2}$$

Построим теперь *полный угловой момент*:

$$J^{\alpha\beta} = \int d^3x M^{0\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha}. \tag{2.9.3}$$

Следуя аргументам, приведенным в предыдущем параграфе, мы найдем из (2.9.2), что $J^{\alpha\beta}$ является тензором, сохраняющимся во времени. Заметим далее, что

$$J^{ij} = \int d^3x \, (x^i T^{j0} - x^j T^{i0}),$$

и, так как T^{j0} есть плотность j-й компоненты импульса, можно рассматривать J^{23}, J^{31} и J^{12} как 1-ю, 2-ю и 3-ю компоненты углового момента. Другие компоненты $J^{\alpha\beta}$ выглядят следующим образом:

$$J^{0i} = tp^i - \int x^i T^{00} \, d^3x.$$

Эти компоненты не имеют явного физического смысла, и фактически их можно исключить, фиксируя при $t = 0$ начало координат в «центре энергии», т. е. полагая, что при $t = 0$ момент $\int x^i T^{00} \, d^3x$ равен нулю. Хотя относительно однородных преобразований Лоренца $x^\alpha \to \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta$ полный угловой момент является тензором, при трансляциях $x^\alpha \to x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha$ он ведет себя необычно. Действительно, из (2.9.3) и (2.8.13) следует, что

$$J^{\alpha\beta} \to J'^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta} + a^\alpha p^\beta - a^\beta p^\alpha. \tag{2.9.4}$$

Такое преобразование возникает, конечно, из-за того, что $J^{\alpha\beta}$ содержит орбитальный угловой момент, задаваемый всегда относи-

тельно центра вращения. Для того чтобы выделить в $J^{\alpha\beta}$ *внутреннюю* часть, удобно следующим образом *определить 4-вектор спина*:

$$S_\alpha \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}J^{\beta\gamma}U^\delta, \tag{2.9.5}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — полностью антисимметричный тензор, введенный в § 5, а $U^\alpha \equiv p^\alpha/(-p_\beta p^\beta)^{1/2}$ есть 4-вектор скорости системы. Из-за антисимметричности $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ трансляция $x^\alpha \to x^\alpha + a^\alpha$, изменяющая $J^{\beta\gamma}$ по правилу (2.9.4), оставляет S_α *неизменным*. Кроме того, S_α с очевидностью является вектором и для свободных частиц сохраняется

$$\frac{dS_\alpha}{dt} = 0. \tag{2.9.6}$$

В заключение отметим, что в системе центра масс частиц имеем $U^i = 0$ и $U^0 = 1$, а потому в этой системе

$$S_1 = J^{23}, \qquad S_2 = J^{31}, \qquad S_3 = J^{12}, \qquad S_0 = 0. \tag{2.9.7}$$

Это дает нам право рассматривать S_α как внутренний угловой момент системы. Если даже скорость **U** отлична от нуля, S_α имеет в действительности только три независимые компоненты, так как (2.9.5) дает

$$U^\alpha S_\alpha = 0. \tag{2.9.8}$$

Эти свойства S_α мы используем позже при обсуждении прецессии гироскопа в свободном падении.

§ 10. Релятивистская гидродинамика

Многие физические системы, включая, вероятно, саму Вселенную, можно рассматривать приближенно как *идеальную несжимаемую жидкость*. Идеальная жидкость имеет в каждой точке какую-то скорость **v**, причем по определению наблюдатель, движущийся с этой скоростью, воспринимает жидкость как изотропную. Это осуществляется в том случае, когда средняя длина свободного пробега частиц между столкновениями меньше линейного масштаба используемого наблюдателем. (Например, звуковые волны распространяются в воздухе, если их длина волны велика по сравнению со средней длиной свободного пробега. Однако при очень коротких длинах волн важную роль начинает играть вязкость, и воздух уже нельзя считать идеальной средой.) Сформулируем приведенное выше определение идеальной жидкости с помощью тензора энергии-импульса.

Предположим, что вначале мы находимся в такой системе отсчета (будем отмечать ее знаком «тильда»), в которой рассмат-

риваемая жидкость покоится в какой-то заданной области пространства и времени. Из описанных свойств идеальной жидкости следует, что в этой пространственно-временной области тензор энергии-импульса имеет сферически симметричный вид:

$$\tilde{T}^{ij} = p\delta_{ij}, \tag{2.10.1}$$

$$\tilde{T}^{i0} = T^{0i} = 0, \tag{2.10.2}$$

$$\tilde{T}^{00} = \rho. \tag{2.10.3}$$

Коэффициенты p и ρ называются соответственно *давлением* и *плотностью собственной энергии*.

Перейдем теперь в лабораторную систему отсчета и предположим, что в этой системе жидкость движется (в рассматриваемой пространственно-временной точке) со скоростью $\mathbf{v}$. Тогда связь между сопутствующими координатами $\tilde{x}^\beta$ и координатами лабораторной системы x^α имеет вид

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta(\mathbf{v})\,\tilde{x}^\beta,$$

где $\Lambda^\alpha{}_\beta(\mathbf{v})$ — буст, определенный выражениями (2.1.17) — (2.1.21). Поскольку $T^{\alpha\beta}$ есть тензор, то в лабораторной системе он будет выглядеть так:

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma(\mathbf{v})\,\Lambda^\beta{}_\delta(\mathbf{v})\,\tilde{T}^{\gamma\delta},$$

или, в более явной форме,

$$T^{ij} = p\delta_{ij} + (p+\rho)\frac{v_i v_j}{1-\mathbf{v}^2}, \tag{2.10.4}$$

$$T^{i0} = (p+\rho)\frac{v_i}{1-\mathbf{v}^2}. \tag{2.10.5}$$

$$T^{00} = \frac{(\rho + p\mathbf{v}^2)}{1-\mathbf{v}^2}. \tag{2.10.6}$$

Дабы убедиться в том, что это действительно тензор, заметим, что, объединяя уравнения (2.10.4) — (2.10.6), получаем простое выражение

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)U^\alpha U^\beta, \tag{2.10.7}$$

где U^α есть 4-вектор скорости:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = (1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}\mathbf{v}, \\ U^0 &= \frac{dt}{d\tau} = (1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}, \end{aligned} \tag{2.10.8}$$

нормированный как обычно:

$$U_\alpha U^\alpha = -1. \tag{2.10.9}$$

Действительно, выражение (2.10.7) легко вывести, заметив, что величина, стоящая справа, есть тензор, равный тензору $T^{\alpha\beta}$ в лоренцевой системе, движущейся вместе с жидкостью, а следовательно, равный $T^{\alpha\beta}$ во всех лоренцевых системах.

Кроме энергии и импульса, жидкость будет в общем случае переносить одну или даже несколько сохраняющихся величин, таких, как заряд, число барионов минус число антибарионов и, при обычной температуре, число атомов. Рассмотрим одну из таких сохраняющихся величин и будем называть ее для краткости «числом частиц». Если n — лишь плотность числа частиц (в лоренцевой системе), движущихся в заданной пространственно-временной точке вместе с жидкостью, то в этой системе 4-вектор тока частиц в данной точке задается следующим образом:

$$\tilde{N}^i = 0, \qquad \tilde{N}^0 = n. \tag{2.10.10}$$

В любой другой лоренцевой системе, в которой жидкость в этой точке пространства-времени движется со скоростью $\mathbf{v}$, ток частиц связывается с (2.10.10) бустом $\Lambda(\mathbf{v})$:

$$N^i = \Lambda^i{}_\beta(\mathbf{v})\,\tilde{N}^\beta = (1-\mathbf{v}^2)^{-1/2} v^i n, \tag{2.10.11}$$

$$N^0 = \Lambda^0{}_\beta(\mathbf{v})\,\tilde{N}^\beta = (1-\mathbf{v}^2)^{-1/2} n \tag{2.10.12}$$

или, более компактным образом,

$$N^\alpha = nU^\alpha. \tag{2.10.13}$$

Движение жидкости подчиняется законам сохранения энергии и импульса

$$0 = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[(\rho + p)\,U^\alpha U^\beta\right] \tag{2.10.14}$$

и закону сохранения числа частиц

$$0 = \frac{\partial N^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(nU^\alpha) = \frac{\partial}{\partial t}\left(n\,(1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}\right) + \nabla\cdot\left(n\mathbf{v}\,(1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}\right). \tag{2.10.15}$$

Удобно разбить (2.10.14) на трехмерное векторное и скалярное уравнения. Уравнение для трехмерного вектора получается, если положить в (2.10.14) $\alpha = i$, подставить $U^i = v^i U^0$ и использовать (2.10.14) при $\alpha = 0$. Это дает

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{(1-\mathbf{v}^2)}{(\rho+p)}\left[\nabla p + \mathbf{v}\,\frac{\partial p}{\partial t}\right]. \tag{2.10.16}$$

Скалярное уравнение получается при умножении (2.10.14) на U_α. Используя соотношение

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^\beta}(U_\alpha U^\alpha) = 2U_\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{2.10.17}$$

приходим далее к выражению

$$0 = U_\alpha \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = U^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}[(p+\rho)U^\beta].$$

Если же использовать уравнение (2.10.15), то это можно переписать в таком виде:

$$0 = U^\beta\left[\frac{\partial p}{\partial x^\beta} - n\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{p+\rho}{n}\right)\right] =$$

$$= -nU^\beta\left[p\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\rho}{n}\right)\right]. \qquad (2.10.17a)$$

Второй закон термодинамики утверждает, что давление p, плотность энергии ρ и объем, приходящийся на одну частицу, $1/n$, можно выразить как функции температуры T и энтропии σk, приходящейся на одну частицу, так что

$$kT\,d\sigma = p\,d\left(\frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{\rho}{n}\right). \qquad (2.10.18)$$

(Постоянная Больцмана k введена, чтобы сделать σ безразмерной.) Тогда скалярное уравнение (2.10.17а) можно записать как

$$0 = U^\beta \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta} \sim \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\sigma. \qquad (2.10.19)$$

Удельная энтропия поэтому является постоянной во времени в любой точке, перемещающейся вместе с жидкостью. Фундаментальными уравнениями релятивистской гидродинамики являются уравнение непрерывности (2.10.15), уравнения Эйлера (2.10.16), уравнение энергии (2.10.19), а также уравнения состояния, выражающие p и ρ через n и σ.

Чтобы получить некоторое представление о допустимых уравнениях состояний, рассмотрим жидкость, состоящую из бесструктурных точечных частиц, взаимодействующих только посредством пространственно-локализованных столкновений. Как показано в § 8 гл. 2, тензор энергии-импульса можно записать в виде

$$T^{\alpha\beta} = \sum_N \frac{p_N{}^\alpha p_N{}^\beta}{E_N}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N) \qquad (2.10.20)$$

[см. выражение (2.8.4)]. В сопутствующей лоренцевой системе $T^{\alpha\beta}$ будет иметь изотропную форму (2.10.1) — (2.10.3), и поэтому давление и плотность энергии задаются в этой системе следующим образом:

$$p = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} T^{ii} = \frac{1}{3}\sum_N \frac{\mathbf{p}^2{}_N}{E_N}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N), \qquad (2.10.21)$$

$$\rho = T^{00} = \sum_N E_N \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N). \qquad (2.10.22)$$

Плотность числа частиц по аналогии с (2.6.2) будет выглядеть так:

$$n = \sum_N \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N). \tag{2.10.23}$$

Отсюда, вообще говоря, следует неравенство

$$0 \leqslant p \leqslant \frac{\rho}{3}. \tag{2.10.24}$$

Для холодного нерелятивистского газа справедливо приближение

$$E_N \approx m + \frac{\mathbf{p}^2{}_N}{2m},$$

и, следовательно, (2.10.22) дает

$$\rho \approx nm + \frac{3}{2} p. \tag{2.10.25}$$

Для горячего ультрарелятивистского газа имеем

$$E_N \approx |\mathbf{p}_N| \gg m,$$

а потому из (2.10.22) следует

$$\rho \approx 3p + nm. \tag{2.10.26}$$

Оба уравнения (2.10.25) и (2.10.26) можно объединить в одно, имеющее вид

$$\rho - nm \approx (\gamma - 1)^{-1} p, \tag{2.10.27}$$

где

$$\gamma = \begin{cases} \frac{5}{3} — \text{нерелятивистский газ,} \\ \frac{4}{3} — \text{ультрарелятивистский газ.} \end{cases} \tag{2.10.28}$$

Тогда соотношение (2.10.18) можно переписать так:

$$kT\, d\sigma = p d\left(\frac{1}{n}\right) + (\gamma - 1)^{-1} d\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{n^{\gamma - 1}}{\gamma - 1} d\left(\frac{p}{n^\gamma}\right). \tag{2.10.29}$$

В итоге уравнение (2.10.19) приобретает вид

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{n^\gamma}\right) + (\mathbf{v} + \nabla)\left(\frac{p}{n^\gamma}\right), \tag{2.10.30}$$

а выражая ρ через n и p с помощью (2.10.27), можно переписать аналогичным образом и уравнение (2.10.16). Пропорциональность между внутренней энергией и давлением, следующая из уравнения (2.10.27), в действительности имеет место при различных значениях γ для класса жидкостей, намного более широкого, чем рассмотренный здесь холодный газ, состоящий из точечных частиц. Для всех этих жидкостей уравнение энергии может быть записано в форме (2.10.30).

Вычислим в качестве примера скорость звука в статической однородной релятивистской жидкости. В невозмущенном состоянии величины n, ρ, p и σ постоянны в пространстве и во времени, а $\mathbf{v} = 0$. Звуковые волны порождают малые отклонения n_1, ρ_1, p_1 и $\mathbf{v}_1$ от n, ρ, p и $\mathbf{v}$; остается неизменным, согласно (2.10.19), лишь σ.

В первом порядке по малым величинам уравнения (2.10.15) и (2.10.16) запишутся в виде

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{\nabla p_1}{p+\rho}.$$

Но при $d\sigma = 0$ уравнение (2.10.18) приводит к соотношению

$$-\frac{p+\rho}{n} n_1 + \rho_1 = 0,$$

так что

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{v_s^2 \nabla n_1}{n},$$

где

$$v_s^2 \equiv \frac{p_1}{\rho_1} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\sigma=\text{const}} \tag{2.10.31}$$

Объединяя уравнения для n_1 и $\mathbf{v}_1$, получаем волновое уравнение

$$0 = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2\right] n_1,$$

из которого следует, что звуковые волны перемещаются со скоростью v_s точно так же, как и в нерелятивистской жидкости. В нерелятивистской жидкости скорость звука много меньше скорости света (равной единице), но она увеличивается с повышением температуры, так что представляет интерес проверить, будет ли для жидкости, состоящей из предельно-релятивистских частиц, такой, как водород при температуре $> 10^{13}$ К, скорость v_s превышать единицу. Для этой жидкости выражения (2.10.26) и (2.10.31) дают следующее значение скорости звука:

$$v_s = \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{2.10.32}$$

которое все еще существенно меньше единицы. Этот результат справедлив и с учетом электромагнитных сил, так как уравнения (2.10.7) и (2.8.9) налагают на электромагнитное давление $p_{\text{эм}}$ и плотность энергии $\rho_{\text{эм}}$ соотношение

$$T^{\alpha}_{\text{эм}\,\alpha} = 3p_{\text{эм}} - \rho_{\text{эм}} = 0 \tag{2.10.33}$$

и, следовательно, введение $p_{эм}$ и $\rho_{эм}$ не нарушает справедливости соотношений (2.10.26) или (2.10.32). Вопрос о том, останется ли v_s меньше единицы при учете неэлектромагнитных сил [7], остается открытым.

§ 11. Релятивистская реальная жидкость *

Предыдущий параграф был посвящен изучению идеальной жидкости, в которой средние длины свободного пробега и времена столкновений были настолько малы, что вокруг любой точки движущейся жидкости сохранялась идеальная изотропия. На практике мы часто имеем дело с далеко не идеальными жидкостями, в которых давление, плотность или скорость значительно меняются на расстояниях порядка длины свободного пробега, или за промежутки времени столкновений, или на обоих интервалах одновременно. В таких жидкостях тепловое равновесие не сохраняется строго и кинетическая энергия жидкости рассеивается в виде тепла.

При корректном рассмотрении диссипативных процессов в релятивистских жидкостях возникают некоторые тонкие принципиальные вопросы, которые не возникают в нерелятивистском случае. В связи с этим, а также из-за того, что диссипация приобретает все возрастающее значение в современной теории ранней эволюции Вселенной (см. § 8, 10 и 11 гл. 15), стоит потрудиться и обрисовать контуры общей теории релятивистских реальных жидкостей.

Предположим, что в реальной жидкости слабые пространственные и временные градиенты приводят к изменению тензора энергии-импульса и вектора тока частиц на $\Delta T^{\alpha\beta}$ и ΔN^{α}, являющиеся величинами первого порядка по этим градиентам. Тогда вместо (2.10.7) и (2.10.13) возникают соотношения

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho)\,U^{\alpha}U^{\beta} + \Delta T^{\alpha\beta} \tag{2.11.1}$$

$$N^{\alpha} = nU^{\alpha} + \Delta N^{\alpha} \tag{2.11.2}$$

Как только мы вводим такие поправочные члены, определения давления p, плотности энергии ρ, плотности числа частиц n и скорости жидкости U^{α} становятся несколько неопределенными.

Обычно определяют ρ и n как плотность полной энергии и плотность числа частиц в сопутствующей системе отсчета:

$$T^{00} \equiv \rho, \tag{2.11.3}$$

$$N^{0} \equiv n, \tag{2.11.4}$$

*) Этот и два последующих параграфа лежат несколько в стороне от основной линии изложения и при первом чтении могут быть опущены.

причем соответствующая система характеризуется условием, требующим, чтобы в заданной точке 4-вектор скорости был равен

$$U^i \equiv 0, \qquad U^0 \equiv 1. \tag{2.11.5}$$

Кроме того, давление p в общем случае задается той же функцией от ρ и n [скажем, (2.10.27)], что и в том случае, когда все градиенты в жидкости пренебрежимо малы и диссипация отсутствует. И наконец, в случае нерелятивистской жидкости необходимо знать, будет ли U^α скоростью переноса энергии или переноса частиц. У Ландау и Лифшица [8] U^α принято за скорость переноса энергии; тогда в движущейся системе T^{i0} исчезает. У Эккарта [9] U^α есть скорость переноса частиц, поэтому в сопутствующей системе исчезает величина N^i. Оба подхода совершенно эквивалентны, однако подход Эккарта кажется несколько более удобным, и в дальнейшем мы будем его придерживаться.

При таком определении U^α в сопутствующей системе имеем

$$N^i \equiv 0. \tag{2.11.6}$$

Из сравнения (2.11.3) — (2.11.6) с (2.11.1) и (2.11.2) следует, что в сопутствующей системе на диссипативные члены $\Delta T^{\alpha\beta}$ и ΔN^α накладываются следующие ограничения:

$$\Delta T^{00} = \Delta N^0 = \Delta N^i = 0, \tag{2.11.7}$$

и, следовательно, в любой лоренцевой системе будет выполняться условие

$$U^\alpha U^\beta \Delta T_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.11.8}$$

$$\Delta N^\alpha = 0. \tag{2.11.9}$$

Таким образом, все эффекты, связанные с диссипацией, появляются как вклады в тензор $\Delta T^{\alpha\beta}$. Наша задача теперь — построить наиболее общий диссипативный тензор $\Delta T^{\alpha\beta}$, который удовлетворял бы уравнению (2.11.8) и второму закону термодинамики.

Для этой цели вычислим энтропию, возникающую при движении жидкости. Как и в предыдущем параграфе, начнем с того, что свернем выражение (2.8.7) с 4-вектором U_α:

$$U_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \tag{2.11.10}$$

Исходя из тех же соображений, которые были использованы при выводе (2.10.19) для идеальной жидкости, убеждаемся, что в общем случае выполняется соотношение

$$U_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} [p\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho) U^\alpha U^\beta] = -kT \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (n\sigma U^\alpha),$$

где T и σk — температура и приходящаяся на одну частицу энтропия, определяемые уравнением (2.10.18). Следовательно, (2.11.10)

запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(n\sigma U^\alpha) = \frac{1}{kT} U_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Delta T^{\alpha\beta},$$

или в эквивалентном виде,

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{T}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x^\beta}\Delta T^{\alpha\beta} + \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^\beta} U_\alpha \Delta T^{\alpha\beta}, \qquad (2.11.11)$$

где

$$S^\alpha \equiv nk\sigma U^\alpha - T^{-1} U_\beta \Delta T^{\alpha\beta}. \qquad (2.11.12)$$

Плотность энтропии в сопутствующей системе равна $nk\sigma = S^0$, так что S^α можно рассматривать как 4-вектор тока энтропии, и, следовательно, выражение (2.11.11) дает скорость прироста энтропии в единичном объеме. Далее, второй закон термодинамики требует, чтобы $\Delta T^{\alpha\beta}$ было линейной комбинацией градиентов скорости и температуры. Следовательно, правая часть (2.11.11) *положительна* для всех возможных типов течения. Заметим, что это стало возможным только из-за включения в уравнение (2.11.12) второго члена. Без него величина $\partial S^\alpha/\partial x^\alpha$ не была бы квадратичной формой первых производных и, следовательно, не могла бы быть положительной для всех типов течения. Более того, тензор $\Delta T^{\alpha\beta}$ не должен содержать градиентов p, ρ, n и других величин, так как тогда в формулу (2.11.11) входили бы произведения градиентов давлений или плотности на градиенты скорости или температуры, а эти произведения не обязательно положительны для любых типов течения.

Теперь удобно перейти в сопутствующую систему координат, в которой U^α имеет в заданной пространственно-временной точке P форму (2.11.5). Из (2.10.17) следует, что в такой системе все градиенты U^0 обращаются в точке P в нуль. Полагая в уравнении (2.11.11) U^i, $\partial U^0/\partial x^\alpha$ и ΔT^{00} равными нулю, найдем, что в точке P в сопутствующей лоренцевой системе скорость прироста энтропии, приходящейся на единицу объема, равна

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\left(\frac{1}{T}\dot{U}_i + \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^i}\right)\Delta T^{i0} - \frac{1}{T}\frac{\partial U_i}{\partial x^j}\Delta T^{ij}. \qquad (2.11.13)$$

Для того чтобы это выражение было положительным всегда, должны выполняться соотношения

$$\Delta T^{i0} = -\chi\left(\frac{\partial T}{\partial x^i} + T\dot{U}_i\right), \qquad (2.11.14)$$

$$\Delta T^{ij} = -\eta\left(\frac{\partial U_i}{\partial x^j} + \frac{\partial U_j}{\partial x^i} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{U}\delta_{ij}\right) - \zeta\nabla\cdot\mathbf{U}\delta_{ij} \qquad (2.11.15)$$

с положительными коэффициентами

$$\chi \geqslant 0, \qquad \eta \geqslant 0, \qquad \zeta \geqslant 0, \qquad (2.11.16)$$

и, следовательно, (2.11.13) запишется в виде

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha}=\frac{\chi}{T^2}(\nabla T+T\dot{\mathbf{U}})^2+\frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x^j}+\frac{\partial U_j}{\partial x^i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{U}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial U_i}{\partial x^j}+\frac{\partial U_j}{\partial x^i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{U}\right)+\frac{\zeta}{T}(\nabla\cdot\mathbf{U})^2\geqslant 0. \quad (2.11.17)$$

За исключением релятивистской поправки $T\dot{\mathbf{U}}$, вид (2.11.14) и (2.11.15) тот же, что и в нерелятивистской теории реальных жидкостей [8], и, следовательно, величины χ, η и ζ можно отождествить соответственно с коэффициентом теплопроводности и двумя коэффициентами вязкости: вязкости сдвига и объемной вязкости.

Теперь нам остается только придать нашим результатам (2.11.5) (2.11.7), (2.11.14), (2.11.15), справедливым в такой форме только в сопутствующей системе отсчета, вид, который был бы справедлив в любой лоренцевой системе. Определим для этого *тензор сдвига* как

$$W_{\alpha\beta}\equiv\frac{\partial U_\alpha}{\partial x^\beta}+\frac{\partial U_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{2}{3}\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial U^\nu}{\partial x^\nu}, \quad (2.11.18)$$

тепловой поток как

$$Q_\alpha\equiv\frac{\partial T}{\partial x^\alpha}+T\frac{\partial U_\alpha}{\partial x^\beta}U^\beta \quad (2.11.19)$$

и тензор проецирования на гиперплоскость, нормальную к U^α,

$$H_{\alpha\beta}\equiv\eta_{\alpha\beta}+U_\alpha U_\beta \quad (2.11.20)$$

Можно непосредственно проверить, что в сопутствующей лоренцевой системе отсчета тензор $\Delta T^{\alpha\beta}$, записанный следующим образом:

$$\Delta T^{\alpha\beta}=-\eta H^{\alpha\nu}H^{\beta\delta}W_{\nu\delta}-\chi(H^{\alpha\nu}U^\beta+H^{\beta\nu}U^\alpha)Q_\nu-$$

$$-\zeta H^{\alpha\beta}\frac{\partial U^\nu}{\partial x^\nu}, \quad (2.11.21)$$

удовлетворяет соотношениям (2.11.7), (2.11.14) и (2.11.15). Поскольку формула (2.11.21) лоренц-инвариантна и справедлива в сопутствующей лоренцевой системе отсчета, она справедлива во всех лоренцевых системах.

Исходя из соображений размерности, можно вообще ожидать, что коэффициенты χ^T, η и ζ имеют тот же порядок, что и давление или плотность тепловой энергии, умноженные на некоторое среднее время. Существуют, однако, важные частные случаи (см., например, [11]), когда объемная вязкость ζ много меньше, чем η или χ^T. Чтобы увидеть, когда такие ситуации возникают, заметим, что выражения (2.11.1) и (2.11.21) приводят к следующему значе-

нию следа полного тензора энергии-импульса:

$$T^{\alpha}{}_{\alpha} = 3p - \rho - 3\zeta \frac{\partial U^{\nu}}{\partial x^{\nu}}. \qquad (2.11.22)$$

Пусть мы имеем дело со средой, для которой этот след можно выразить как функцию только ρ и n:

$$T^{\alpha}{}_{\alpha} = f(\rho, n). \qquad (2.11.23)$$

Например, для однородного газа, характеризуемого выражением (2.10.20), этот след имеет вид

$$T^{\alpha}{}_{\alpha} = -\sum_{N} \frac{m^2}{E_N} \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N).$$

В ультрарелятивистском случае при $E_N \gg m$ выражение (2.11.23) будет выполняться, если только

$$f(\rho, n) \approx 0.$$

В нерелятивистском случае имеем

$$\frac{1}{E_N} \approx \frac{1}{m} - \left(\frac{E_N - m}{m^2}\right),$$

поэтому (2.11.23) удовлетворяется при условии

$$f(\rho, n) \approx -mn + (\rho - mn).$$

Если градиенты скорости отсутствуют, уравнения (2.11.22) и (2.11.23) дадут следующую формулу для давления:

$$p = \frac{1}{3}[\rho + f(\rho, n)]. \qquad (2.11.24)$$

Но поскольку мы договорились определять p в общем случае в виде той же функции ρ и n, что и в отсутствие диссипации, то (2.11.24) должно быть справедливым и при наличии градиентов скорости. Поэтому выражения (2.11.22), (2.11.23) и (2.11.24) приводят к условию

$$\zeta = 0. \qquad (2.11.25)$$

Однако было бы неверным делать вывод, что ζ всегда пренебрежимо мало. Как мы видели, для однородного газа след тензора энергии-импульса является функцией исключительно ρ и n только в ультрарелятивистском или ультранерелятивистском пределах: для случая kT порядка m T^{α}_{α} нельзя привести к виду (2.11.23), и объемная вязкость будет иметь тот же порядок, что и вторая вязкость [10, 11]. Объемная вязкость является также важной [12] для сред, в которых легко происходит обмен энергией между поступательными и внутренними степенями свободы, как это имеет место для газа, состоящего из твердых шариков [13].

Другой частный случай, очень важный для космологии,— это материальная среда с очень коротким средним временем свободного пробега, которая взаимодействует с квантами излучения, имеющими конечное среднее время свободного пробега τ. Для такой среды коэффициент теплопроводности и оба коэффициента вязкости вычисляются в виде

$$\chi = \frac{4}{3} aT^3\tau, \tag{2.11.26}$$

$$\eta = \frac{4}{15} aT^4\tau, \tag{2.11.27}$$

$$\zeta = 4aT^4\tau\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_n\right]^2, \tag{2.11.28}$$

где a — постоянная Стефана — Больцмана, определяемая так, что плотность энергии излучения равна aT^4, и p и ρ являются полным давлением и плотностью энергии вещества и излучения. (Определение χ см. в [14], определение η — в [15], определения ζ, χ, η — в [16].) Отметим, что в общем случае χ^T, η и ζ сравнимы между собой, но если давление и тепловая энергия обусловлены в основном излучением, то $(\partial p/\partial \rho)_n \approx {}^1/_3$ и, как и ожидается, объемная вязкость будет мала.

§ 12. Представления группы Лоренца *

Тензорный формализм, описанный в § 5 гл. 2, вполне хорош для того, чтобы с его помощью разбирать проблемы релятивистской классической физики. Однако, рассматривая правила лоренцевых преобразований более общим путем, на основе достижений теории представлений однородной группы Лоренца, можно получить некоторые формальные преимущества. В § 5 гл. 12 мы увидим, что такой подход позволяет элегантным образом переформулировать эффекты гравитации на случай произвольных физических систем. Кроме того, поля с полуцелым спином можно изучать только с помощью группового подхода.

Согласно общим правилам, набор величин ψ_n под действием лоренцевого преобразования $\Lambda^\alpha{}_\beta$ переходит в новый набор величин

$$\psi'_n = \sum_m [D(\Lambda)]_{nm}\psi_m. \tag{2.12.1}$$

Для того чтобы два последовательно проведенных лоренцевых преобразования Λ_1 и Λ_2 приводили к тому же результату, что и преобразование $\Lambda_1\Lambda_2$, необходимо, чтобы матрица $D(\Lambda)$ определяла *представление* группы Лоренца, т. е

$$D(\Lambda_1)\,D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2). \tag{2.12.2}$$

Операция матричного умножения определена обычным образом.

Например, если ψ есть контравариантный вектор V^α, то $D(\Lambda)$ представляет собой просто выражение

$$[D(\Lambda)]^\alpha{}_\beta = \Lambda^\alpha{}_\beta, \tag{2.12.3}$$

если же ψ — ковариантный тензор $T_{\alpha\beta}$, то соответствующая D-матрица равна

$$[D(\Lambda)]_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \Lambda_\alpha{}^\gamma \Lambda_\beta{}^\delta. \tag{2.12.4}$$

Легко проверить, что выражения (2.12.3) и (2.12.4) удовлетворяют групповому правилу умножения (2.12.2). Мы можем перебрать все возможные правила преобразований Лоренца, конструируя наиболее общее представление однородной группы Лоренца.

Фактически большинство наиболее общих преобразований однородной группы Лоренца реализуется тензорными представлениями вида (2.12.3) и (2.12.4), и поэтому можно надеяться, что все физически интересные величины являются тензорами. Однако у *инфинитезимальной* группы Лоренца есть еще и другие представления — *спинорные представления*, играющие важную роль в релятивистской квантовой теории поля. Инфинитезимальная группа Лоренца содержит лоренцевы преобразования, бесконечно близкие к тождественным, т. е.

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta, \quad |\omega^\alpha{}_\beta| \ll 1. \tag{2.12.5}$$

Чтобы такое преобразование удовлетворяло основному условию преобразований Лоренца (2.1.2), необходимо выполнение следующего равенства:

$$(\delta^\alpha{}_\gamma + \omega^\alpha{}_\gamma)(\delta^\beta{}_\delta + \omega^\beta{}_\delta)\,\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta},$$

которое в первом порядке по ω имеет вид

$$\omega_{\gamma\delta} = -\omega_{\delta\gamma}, \tag{2.12.6}$$

причем индексы у ω опускаются, конечно, с помощью метрики η:

$$\omega_{\gamma\delta} \equiv \eta_{\gamma\alpha}\omega^\alpha{}_\delta.$$

Для такого преобразования матрица представления $D(\Lambda)$ должна быть бесконечно близка к тождественной, т. е.

$$D(1+\omega) = 1 + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}, \tag{2.12.7}$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ есть фиксированный набор матриц, которые благодаря (2.12.6) можно всегда выбрать антисимметричными по α и β:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}. \tag{2.12.8}$$

Например, для тензорного представления (2.12.3) и (2.12.4) имеем

$$[\sigma_{\alpha\beta}]^{\nu}{}_{\delta} = \delta_{\alpha}{}^{\nu}\eta_{\beta\delta} - \delta_{\beta}{}^{\nu}\eta_{\alpha\delta}, \tag{2.12.9}$$

$$[\sigma_{\alpha\beta}]_{\gamma\delta}{}^{\varepsilon\zeta} = \eta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta}{}^{\varepsilon}\delta^{\zeta}{}_{\delta} - \eta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha}{}^{\varepsilon}\delta^{\zeta}{}_{\delta} + \eta_{\alpha\delta}\delta_{\beta}{}^{\zeta}\delta^{\varepsilon}{}_{\gamma} - \eta_{\beta\delta}\delta_{\alpha}{}^{\zeta}\delta^{\varepsilon}{}_{\gamma}. \tag{2.12.10}$$

Матрицы $\sigma_{\alpha\beta}$ не могут быть произвольными по тоянными матрицами, а должны быть такими, чтобы матрица $D(\Lambda)$ удовлетворяла групповому правилу умножения (2.12.2). Применим прежде всего это правило к произведению $\Lambda[1 + \omega]\Lambda^{-1}$:

$$D(\Lambda)\, D(1 + \omega)\, D(\Lambda^{-1}) = D(1 + \Lambda\omega\Lambda^{-1}).$$

В нулевом порядке по ω это есть просто тождество $1 = 1$, но уже в первом порядке, приравнивая коэффициенты при $\omega_{\alpha\beta}$ с обеих сторон, получаем

$$D(\Lambda)\,\sigma_{\alpha\beta}D(\Lambda^{-1}) = \sigma_{\gamma\delta}\Lambda^{\gamma}{}_{\alpha}\Lambda^{\delta}{}_{\beta}. \tag{2.12.11}$$

Если положить теперь $\Lambda = 1 + \omega$, $\Lambda^{-1} = 1 - \omega$ (причем ω совсем не обязательно должно быть здесь тем же самым), то в первом порядке по ω выполнение этого условия требует, чтобы σ удовлетворяло коммутационным соотношениям

$$[\sigma_{\alpha\beta},\, \sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\beta}\sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\gamma\alpha}\sigma_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta}\sigma_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha}\sigma_{\gamma\beta}, \tag{2.12.12}$$

где квадратные скобки означают обычный коммутатор матриц

$$[u,\, v] \equiv uv - vu.$$

Читатель может легко проверить, что матрицы (2.12.9) и (2.12.10) удовлетворяют соотношению (2.12.12).

Этим коммутационным соотношениям можно придать несколько более простую форму, если ввести новые матрицы:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{2}[-i\sigma_{23} + \sigma_{10}], & b_1 &= \tfrac{1}{2}[-i\sigma_{23} - \sigma_{10}], \\ a_2 &= \tfrac{1}{2}[-i\sigma_{31} + \sigma_{20}], & b_2 &= \tfrac{1}{2}[-i\sigma_{31} - \sigma_{20}], \\ a_3 &= \tfrac{1}{2}[-i\sigma_{12} + \sigma_{30}], & b_3 &= \tfrac{1}{2}[-i\sigma_{12} - \sigma_{30}]. \end{aligned} \tag{2.12.13}$$

Тогда уравнение (2.12.12) примет вид:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = i\mathbf{a}, \tag{2.12.14}$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{b} = i\mathbf{b}, \tag{2.12.15}$$

$$[a_i,\, b_j] = 0. \tag{2.12.16}$$

Формулы (2.12.14) — (2.12.16) — просто коммутационные соотношения для пары независимых матриц углового момента. Правила построения таких матриц можно найти в любом учебнике по нерелятивистской квантовой механике (см., например, [17]).

В самом общем случае матрицы **a** и **b** являются прямой суммой «неприводимых» компонент, причем каждая матрица характеризуется целым или полуцелым числом A или B, т. е.

$$\mathbf{a}^2 = A\,(A+1), \qquad \mathbf{b}^2 = B\,(B+1) \tag{2.12.17}$$

и размерность матриц равна $2A+1$ и $2B+1$ соответственно. Следовательно, наиболее общие величины ψ_n, трансформирующиеся линейно при инфинитезимальных однородных преобразованиях Лоренца, можно разложить на «неприводимые» части, характеризуемые парой целых и (или) полуцелых чисел (A, B), причем каждая из неприводимых частей имеет $(2A+1)(2B+1)$ компонент.

Непосредственные вычисления показывают, что контравариантное векторное представление (2.12.9), так же как и соответствующий ему ковариант, характеризуется $A = B = {}^1/_2$. Любое тензорное представление вида (2.12.10) можно рассматривать как прямое произведение векторных представлений, и поэтому оно состоит только из неприводимых компонент, для которых $A+B$ есть *целое* число. Например, общее тензорное представление (2.12.10) для тензора второго ранга будет состоять из неприводимых компонент, для которых пара чисел (A, B) принимает значения (1, 1), (1, 0), (0, 1) и (0, 0). Представление, у которого $A+B$ — *полуцелое*, полностью отличается от тензорного и называется *спинорным представлением.* Простейшим примером такого представления служит дираковское представление поля электрона, состоящее из компонент $({}^1/_2, 0)$ и $(0, {}^1/_2)$.

Трансформационные свойства любого объекта при обычных пространственных вращениях определяются его поведением относительно инфинитезимальных преобразований Лоренца (2.12.5), у которых $\omega_{i0} = 0$ и, следовательно, определяется структурой чисто пространственных компонент σ_{12}, σ_{23}, σ_{31} матрицы $\sigma_{\alpha\beta}$. Из этих компонент можно построить векторную матрицу

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = -i\,\{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}, \tag{2.12.18}$$

которая, согласно (2.12.14) — (2.12.16), будет иметь те же коммутационные соотношения, что и угловой момент

$$\mathbf{s} \times \mathbf{s} = i\mathbf{s}. \tag{2.12.19}$$

Любое неприводимое представление (A, B) однородной группы Лоренца можно разложить [17] на составляющие, для каждой из которых величина $\mathbf{s}^2$ равна $s\,(s+1)$, где s — целое или полуцелое число, лежащее между $|A-B|$ и $A+B$. Каждая составляющая описывает возбуждение (например, частицу) со спином s. Далее из (2.12.18) вытекает, что тензорные представления могут описывать только возбуждения с целым спином, а спинорные представления — только с полуцелым спином.

Конечное преобразование Лоренца можно построить, перемножая бесконечное число инфинитезимальных лоренцевых преобразований. Таким образом, тензорное представление инфинитезимальной группы Лоренца можно использовать для построения тензорного представления вида (2.12.3) и (2.12.4) группы конечных лоренцевых преобразований. Однако если попытаться построить спинорное представление конечных преобразований Лоренца, то мы обнаружим, что можно получить «представление только с точностью до знака» [18], т. е. групповой закон умножения (2.12.2) будет иногда иметь с правой стороны знак минус. Например, произведение двух последовательных вращений на 180° вокруг любой заданной оси приводит к единичной матрице, но не со знаком плюс, а со знаком минус. Появление этого минуса означает, что спинорные поля сами по себе физически не наблюдаемы, хотя четные функции от спинорных полей вполне наблюдаемы.

§ 13. Временна́я последовательность и античастицы*

Одна из наиболее удивительных особенностей преобразований Лоренца заключается в том, что эти преобразования не оставляют инвариантным порядок событий. Пусть, например, в некоторой системе отсчета наблюдаемое событие в точке x_2 возникло позже, чем событие в точке x_1, т. е. $x_2^0 > x_1^0$. Для другого наблюдателя, движущегося относительно первого со скоростью $\mathbf{v}$, эти события будут разделены временны́м интервалом:

$$x_2'^{(0)} - x_1'^{(0)} = \Lambda^{(0)}{}_{\alpha}(\mathbf{v})(x_2^{\alpha} - x_1^{\alpha}),$$

где $\Lambda^{\beta}{}_{\alpha}(\mathbf{v})$ — буст, определяемый уравнениями (2.1.17) и (2.1.21). Применяя (2.1.17) и (2.1.21), получаем

$$x_2'^{(0)} - x_1'^{(0)} = \gamma(x_2^0 - x_1^0) + \gamma\mathbf{v}\cdot(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1),$$

и эта величина будет отрицательной, если

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) < -(x_2^0 - x_1^0). \tag{2.13.1}$$

На первый взгляд, возникла опасность логического парадокса. Пусть первый наблюдатель видит в точке x_1 радиоактивный распад $A \to B + C$ и последующее поглощение в точке x_2 частицы B, например $B + D \to E$. Не будет ли второй наблюдатель видеть поглощение частицы B в x_2 до ее излучения в точке x_1? Парадокс исчезнет, если мы обратим внимание на то, что скорость $|\mathbf{v}|$, характеризующая любое преобразование Лоренца $\Lambda(\mathbf{v})$, должна быть меньше единицы, поэтому соотношение (2.13.1) будет удовлетворяться, только если справедливо неравенство

$$|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| > |x_2^0 - x_1^0|. \tag{2.13.2}$$

Однако это невозможно, поскольку частица B, по предположению, перемещается из точки x_1 в точку x_2, а условие (2.13.2) с необходимостью требует, чтобы скорость при этом была больше единицы, т. е. больше скорости света.

Можно рассмотреть это несколько иначе и увидеть, что временно́й порядок событий в x_1 и x_2 зависит от преобразований Лоренца только в том случае, если x_1 и x_2 разделены *пространственноподобным* образом, т. е.

$$\eta_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)^\alpha (x_1 - x_2)^\beta > 0.$$

Только когда $x_1 - x_2$ *времениподобно*, т. е.

$$\eta_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)^\alpha (x_1 - x_2)^\beta < 0,$$

частица может перемещаться из точки x_1 в точку x_2.

Хотя вопрос об относительности временного порядка событий не создает никаких проблем в классической физике, в квантовой теории он имеет глубокий смысл. Принцип неопределенности утверждает, что если в момент t_1 определено положение частицы $\mathbf{x}_1$, то знать точно ее скорость мы не можем. Вследствие этого существует определенная вероятность, что частица из точки x_1 попадает в x_2, даже если $x_1 - x_2$ пространственно-подобно, т. е. $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| > |x_1^0 - x_2^0|$. Точнее, вероятность того, что частица, вышедшая из точки x_1, появится в точке x_2 будет отлична от нуля, если выполняется неравенство

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 - (x_1^0 - x_2^0)^2 \leqslant \frac{\hbar^2}{m^2},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка h, деленная на 2π, m — масса частицы. Такой пространственно-временной интервал будет мал даже для массы элементарной частицы, например если m — масса протона, то $\hbar/m = 2 \cdot 10^{-14}$ см, или, в единицах времени, $6 \cdot 10^{-25}$ с (напомним, что в наших единицах 1 с $= 3 \cdot 10^{10}$ см). Таким образом, мы вновь столкнулись с парадоксом: если один наблюдатель видит частицу, излучаемую в x_1 и поглощаемую в x_2, и если $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 - (x_1^0 - x_2^0)^2$ положительно (но меньше $\hbar^2/m^2$), то второй наблюдатель зарегистрирует в момент времени t_2 поглощение частицы в точке $\mathbf{x}_2$ до ее излучения в точке $\mathbf{x}_1$ в момент времени t_1.

Известен один выход из этого парадокса. Второй наблюдатель должен видеть частицу, излучаемую в $\mathbf{x}_2$ и поглощаемую в $\mathbf{x}_1$. Но вообще говоря, частица, за которой следит второй наблюдатель, обязательно будет отличаться от той, которую видит первый наблюдатель. Например, если первый наблюдатель видит, как в точке x_1 протон переходит в нейтрон и *положительный* π-мезон, а затем видит, как в точке x_2 π-мезон и некоторый другой нейтрон переходят в протон, то второй наблюдатель будет видеть,

как в точке x_2 нейтрон переходит в протон и частицу, имеющую *отрицательный* заряд, которая затем в точке x_1 поглощается протоном, переходящим в нейтрон. Поскольку масса есть лоренц-инвариант, то масса отрицательно заряженной частицы, обнаруженной вторым наблюдателем, должна быть в точности равна массе π^+-мезона, за которым следит первый наблюдатель. И действительно, существует частица, называемая отрицательным π^--мезоном, с той же массой, что и у π^+-мезона. Соображения подобного типа приводят нас к выводу, что для каждого типа заряженных частиц существуют противоположно заряженные частицы с той же массой, называемые античастицами. Обратим внимание, что к этому выводу нельзя было прийти ни в нерелятивистской квантовой механике, ни в релятивистской классической механике; только в релятивистской квантовой механике с необходимостью возникают представления об античастицах [1]). При этом их существование приводит к характерной особенности релятивистской квантовой динамики, а именно: при наличии достаточно большой энергии можно создавать произвольное число частиц и их античастиц.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Специальная теория относительности

Более полно ознакомиться со специальной теорией относительности можно, используя любую из следующих книг:

Anderson J. L., Principles of Relativity Physics, Academic Press, 1967, Ch. 6—9.
Møller C., The Theory of Relativity, Oxford University Press, 1952, Ch. I—VII.
Pauli W., Theory of Relativity, Pergamon Press, 1958, Part I (см. перевод: *Паули В.*, Теория относительности, Гостехиздат, 1947).
Rindler W., Special Relativity, 2nd ed., Oliver and Boyd, 1966.
Synge J. L., Relativity: The Special Theory, Interscience Publishers. 1956.

Релятивистская гидродинамика

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954, гл. XV.

Представления группы Лоренца

Любарский Г. Я., Теория групп и ее применение в физике, Физматгиз, 1958, гл. XV, XVI.

---

[1]) Строгое обсуждение необходимости введения античастиц в релятивистской квантовой механике можно найти в книге [19].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Lee T. D., Yang C. N.*, Phys. Rev., **104**, 254 (1956).
2. *Wu C. S. et al.*, Phys. Rev., **105**, 1413 (1957) (см. перевод в сб. «Новые свойства симметрии элементарных частиц, ИЛ, 1957, стр. 69).
3. *Garwin R., Lederman L., Weinrich M.*, Phys. Rev., **105**, 1415 (1957).
4. *Friedman J. I., Telegdi V. L.*, Phys. Rev., **105**, 1681 (1957).
5. *Christenson J. H., Cronin J. W., Fitch V. L. Turlay R.*, Phys. Rev. Lett., 13, 138 (1964).
6. *Einstein A.*, Bull. Amer. Mat. Soc., 223 (April 1935) (см. перевод: *Эйнштейн А.*. Собрание научных трудов, «Наука», 1966, т. 2, стр. 416).
7. *Bludman S. A., Ruderman M. A.*, Phys. Rev., **170**, 1176 (1968); **1**, 3243 (1970).
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.
9. *Eckart C.*, Phys. Rev., 58, 919 (1940).
10. *Anderson J. L.*, в книге Relativity—Proceedings of the Relativity Conference in the Midwest, ed. M. Carmeli, S. I. Fickler, L. Witten, Plenum Press, 1969, p. 109.
11. *Israel W., Vardalas J. N.*, Nuovo Cimento Lett., 4, 887 (1970).
12. *Tisza L.*, Phys. Rev., **61**, 531 (1942).
13. *Chapman S., Cowling T. G.*, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, 2nd ed., Cambridge University Press, 1952, Note B and Ch. 11 (см. перевод: *Чепмен С., Каулинг Т.*, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960).
14. *Misner C. W., Sharp D. H.*, Phys. Lett., **15**, 279 (1965).
15. *Misner C. W.*, Astroph. J., **151**, 431 (1968).
16. *Weinberg S.*, Astroph. J., **168**, 175 (1971).
17. *Schiff L. I.*, Quantum Mechanics, 3rd ed., McGraw-Hill, 1968, Sec. 27 (см. перевод 1-го изд.: *Шифф Л.*, Квантовая механика, ИЛ, 1959).
18. *Wigner E. P.*, Group Theory, Academic Press, 1959, Ch. 15 (см. перевод: *Вигнер Е.*, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961).
19. *Streater R. F., Wightman A. S.*, PCT, Spin & Statistics, and All That, W. A. Benjamin, 1964 (см. перевод: *Стритер Р. Ф., Вайтман А. С.*, PCT, спин и статистика и все такое, «Наука», 1966).

Часть II

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

То ли колодец был очень глубок, то ли падала она очень медленно, только времени у нее было достаточно, чтобы прийти в себя и подумать, что же будет дальше ... .

Л. Кэррол, Алиса в стране чудес

Глава 3

ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Принцип эквивалентности гравитации и инерции говорит о том, как реагирует физическая система на внешнее гравитационное поле. Мы начнем с того, что выясним смысл этого принципа, а затем в оставшейся части этой главы рассмотрим несколько его следствий. Однако математический формализм, необходимый для введения принципа эквивалентности, связан с тензорным анализом, и только после того, как мы закончим изложение тензорного анализа в следующей главе, мы сможем полностью раскрыть содержание этого принципа.

§ 1. Формулировка принципа

Принцип эквивалентности, сформулированный Эйнштейном, основывается на равенстве гравитационной и инертной масс, продемонстрированном Галилеем, Гюйгенсом, Ньютоном, Бесселем и Этвешем (см. § 2 гл. 1). Утверждается, что никакое внешнее статическое однородное гравитационное поле не может быть обнаружено в свободно падающем лифте, поскольку наблюдатель, пробные тела и сам лифт приобретают в этом поле одинаковые ускорения. Это легко доказать для системы N частиц, движущихся с нерелятивистскими скоростями под действием сил $\mathbf{F}(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M)$ (например, электростатических или гравитационных) и внешнего гравитационного поля. Уравнения движения выглядят так:

$$m_N \frac{d^2\mathbf{x}_N}{dt^2} = m_N \mathbf{g} + \sum_M \mathbf{F}(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M). \qquad (3.1.1)$$

Предположим, что мы делаем следующее негалилеево преобразование пространственно-временных координат:

$$\mathbf{x}' \to \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2, \qquad t' = t. \tag{3.1.2}$$

Тогда член с $\mathbf{g}$ компенсируется инерционной «силой», и уравнение движения принимает вид

$$m_N \frac{d^2\mathbf{x}'_N}{dt'^2} = \sum_M \mathbf{F}(\mathbf{x}'_N - \mathbf{x}'_M). \tag{3.1.3}$$

Следовательно, наблюдатель O, использующий координаты $\mathbf{x}$, t, и его свободно падающий коллега O', использующий координаты $\mathbf{x}'$, t', не найдут никаких различий в законах механики, за исключением того, что O будет наблюдать воздействие гравитационного поля, а O' этого наблюдать не будет. Принцип эквивалентности утверждает, что эта компенсация гравитационной силы инерционной (а следовательно, их эквивалентность) будет возникать во всех свободно падающих системах независимо от того, можно ли их описать такими простыми уравнениями, как (3.1.1).

Пока мы еще не готовы сформулировать принцип эквивалентности в его окончательной форме, так как наши замечания относятся только к статическому однородному гравитационному полю. Если бы $\mathbf{g}$ зависело от $\mathbf{x}$ или t, мы не смогли бы исключить это поле из уравнений движения с помощью преобразования (3.1.2). Например, Земля находится в состоянии свободного падения на Солнце, и мы на Земле большей частью не чувствуем гравитационного поля Солнца. Однако небольшая неоднородность этого поля (около одной шеститысячной, от полудня к полуночи) создает грозные приливы в океанах. Даже наблюдатель в свободно падающем лифте Эйнштейна мог бы в принципе обнаружить поле Земли, так как предметы в лифте падали бы по радиусам к центру Земли и, следовательно, приближались друг к другу по мере падения лифта.

Хотя инерционные силы не вполне компенсируют гравитационные силы в системах, свободно падающих в неоднородных или изменяющихся во времени гравитационных полях, мы все же можем ожидать их приближенной компенсации, если ограничимся рассмотрением столь малых областей пространства и времени, что поле в них не будет изменяться заметно. Следовательно, можно сформулировать принцип эквивалентности в виде утверждения, что *в каждой точке пространства-времени в произвольном гравитационном поле можно выбрать «локально-инерциальную систему координат», такую, что в достаточно малой окрестности рассматриваемой точки законы природы будут иметь такую же форму, как и в неускоренных декартовых системах координат.* Имеется

небольшая неясность в том, что мы подразумеваем под словами «такую же форму, как и в неускоренных декартовых системах координат». Чтобы избежать каких-либо возможных недоразумений в этом пункте, будем считать, что это означает форму, придаваемую законам природы специальной теорией относительности, например форму уравнений (2.3.1), (2.7.6), (2.7.7.), (2.7.9) и (2.8.7). Возникает также вопрос, что мы называем «достаточно малой окрестностью». Грубо говоря, считается, что окрестность должна быть малой настолько, чтобы гравитационное поле можно было рассматривать в ней как постоянное. Однако по этому поводу невозможно сказать что-либо точное, пока мы не узнаем, как гравитационное поле выражается математически (см. окончание § 1 гл. 4).

Внимательный читатель, возможно, заметил некоторое сходство между принципом эквивалентности и аксиомой, которую Гаусс положил в основу неевклидовой геометрии. Принцип эквивалентности гласит, что в любой точке пространства-времени мы можем вводить локально-инерциальные системы координат, в которых справедливы законы специальной теории относительности. Как мы видели в гл. 1, Гаусс предполагал, что в любой точке кривой поверхности можно задать локальную декартову систему координат, в которой расстояние вычисляется по теореме Пифагора. Ввиду явной глубокой аналогии этих утверждений можно было бы ожидать, что законы гравитации имеют большое сходство с формулами римановой геометрии. В частности, предположение Гаусса состоит в том, что все внутренние свойства кривой поверхности могут быть описаны с помощью производных $\partial\xi^\alpha/\partial x^\mu$ функций $\xi^\alpha(x)$, которые определяют преобразования $x \to \xi$ от некоторой общего вида системы координат x^μ, покрывающей поверхность, к локальной декартовой системе ξ^α. В то же время принцип эквивалентности говорит нам, что все эффекты гравитационного поля могут быть описаны с помощью производных $\partial\xi^\alpha/\partial x^\mu$ функций $\xi^\alpha(x)$, которые определяют преобразование от «лабораторных» координат x^μ к локально-инерционным координатам ξ^α. Кроме того, в гл. 1 было показано, что геометрически этим производным соответствуют величины $g_{\mu\nu}$, задаваемые выражением (1.1.7). В последующих параграфах данной главы мы увидим, что гравитационное поле описывается точно таким же образом.

Иногда различают «слабый принцип эквивалентности» и «сильный принцип эквивалентности». Сильный принцип эквивалентности — это данная выше формулировка, в которой под «законами природы» подразумевают *все* законы природы. Слабый принцип отличается тем, что слова «законы природы» заменяются в нем словами «законы движения свободно падающих частиц». Слабый принцип — это не что иное, как другая формулировка наблюдаемого равенства гравитационной и инертной масс, в то время как

сильный принцип представляет собой обобщение наблюдений за влиянием гравитации на любые физические объекты.

Опыты Этвеша, Дикке и их предшественников (см. § 2 гл. 2) дают прямое подтверждение только слабого принципа эквивалентности, а также некоторые косвенные данные в пользу сильного принципа. Массы различных веществ возникают в результате смешивания в различных *пропорциях масс* нейтронов и протонов плюс электронов за вычетом энергий электромагнитных и сильных связей, удерживающих эти частицы вместе; из этого следует, что отношение гравитационной массы к инертной будет одинаковым для всех этих веществ только в том случае, если оно одинаково для всех составляющих эти вещества частиц. Вапстра и Ней показали [1], что из ограничений, налагаемых экспериментом Этвеша на любые возможные неравенства отношений гравитационной и инертной масс стекла, пробки, антимонита латуни, вытекает, что равенство выполняется для нейтронов и протонов плюс электроны с точностью до $1/(6 \cdot 10^5)$, а для нейтронов и энергий связи — с точностью до $1/(1{,}2 \cdot 10^4)$. С этой точностью наблюдатель в свободно падающей системе отсчета не обнаружит никакого воздействия гравитации на нейтроны, водород и их энергии связи. Трудно было бы представить себе теорию, которая, удовлетворяя этому требованию, не включала бы также и сильный принцип (о ненаблюдаемости гравитационных эффектов любого вида в локально-инерциальной системе отсчета).

Мы могли бы, однако, различать два варианта сильного принципа эквивалентности: «очень сильный принцип», применимый ко всем явлениям, и «среднесильный принцип», применимый ко всем явлениям, исключая саму гравитацию. Эксперимента Этвеша и Дикке явно недостаточно, чтобы точно сказать, одинаковым ли образом входит гравитационная энергия связи в инертную и гравитационную массы. Этот вопрос можно было бы решить, изучая орбитальное движение малого тела, движущегося вокруг массивного, которое само находится в состоянии свободного падения в гравитационном поле. Например, гравитационная энергия связи Земли составляет $8{,}4 \cdot 10^{-10}$ от ее полной массы, в то время как гравитационная энергия связи искусственного спутника составляет значительно меньшую долю его массы. Таким образом, если (рассмотрим крайний случай) энергия гравитационной связи дает (отрицательный) вклад только в инертную массу и не дает вообще никакого вклада в гравитационную массу, тогда отношение гравитационной массы спутника к его инертной массе было бы больше, чем соответствующее отношение для Земли на $8{,}4 \cdot 10^{-10}$. Земля находится в состоянии свободного падения, в котором гравитационное притяжение Солнца уравновешивается инерционной силой, возникающей из-за обращения Земли вокруг Солнца. Гравитационная и инерционная силы, действующие на

спутник из-за наличия Солнца и обращения Земли, равны гравитационной и инерционной силам, действующим на Землю, умноженным на отношение гравитационной и инертной масс (если пренебречь расстоянием между спутником и центром массы Земли).

Таким образом, получается, что эти две силы не будут уравновешиваться для спутника, причем гравитационная сила будет больше инерционной силы на $8{,}4 \cdot 10^{-10}$. Ускорение из-за тяготения к Солнцу на околоземной орбите составляет $6 \cdot 10^{-4}$ от ускорения в поле тяжести Земли на ее поверхности. Отсюда следует, что если гравитационная энергия связи Земли полностью входит в ее инертную массу и не дает вообще никакого вклада в ее гравитационную массу, тогда искусственный спутник на проходящей близко у Земли орбите будет эффективно чувствовать притяжение к Солнцу, равное гравитационному притяжению к Земле, умноженному на коэффициент $5{,}4 \cdot 10^{-13}$. Этот крошечный эффект полностью маскируется «приливной» силой, возникающей из-за того, что расстояние между спутником и центром массы Земли велико, и нет надежды измерить этот эффект [1]). Это весьма огорчительно, поскольку такое измерение было бы явно самой строгой проверкой применимости принципа эквивалентности к гравитационным полям, из которого мы будем исходить в гл. 5 при получении уравнений поля Эйнштейна.

§ 2. Гравитационные силы

Рассмотрим частицу, свободно движущуюся под действием чисто гравитационных сил. Согласно принципу эквивалентности, имеется свободно падающая система координат ξ^α, в которой частица движется по прямой линии в пространстве-времени, что описывается уравнением

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \tag{3.2.1}$$

где $d\tau$ — собственное время

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta. \tag{3.2.2}$$

[Ср. уравнения (2.3.1) и (2.1.4).] Предположим теперь, что мы взяли любую другую систему координат x^μ, которой может быть система декартовых координат, покоящаяся относительно лаборатории, а также криволинейная, ускоренная, вращающаяся или любая другая система по нашему желанию. Координаты ξ^α свободно падающей системы отсчета являются функциями от x^μ, и

[1]) См., однако, стр. 11, 12 — *Прим. ред.*

уравнение (3.2.1) принимает вид

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)=\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu\, dx^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0.$$

Умножая это уравнение на $\partial x^\lambda/\partial \xi^\alpha$ и используя известное правило умножения, получаем

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}=\delta^\lambda_\mu,$$

что приводит к следующему уравнению движения:

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0, \tag{3.2.3}$$

где $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ — это *аффинная связность*, определяемая следующим образом:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\equiv\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}. \tag{3.2.4}$$

Собственное время (3.2.2) также может быть выражено в произвольной системе координат:

$$d\tau^2=-\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}dx^\mu\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\,dx^\nu, \tag{3.2.5}$$

или

$$d\tau^2=-g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu, \tag{3.2.6}$$

где $g_{\mu\nu}$ — *метрический тензор*, который определяется так:

$$g_{\mu\nu}\equiv\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}. \tag{3.2.7}$$

Для фотона или нейтрино уравнение движения в свободно падающей системе отсчета такое же, как (3.2.1), за исключением того, что собственное время (3.2.2) уже нельзя считать независимой переменной, поскольку для частицы с нулевой массой правая часть (3.2.2) исчезает. Вместо τ можно использовать $\sigma\equiv\xi^0$, так. что (3.2.1) и (3.2.2) принимают вид

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\sigma^2}=0,$$

$$-\eta_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{d\sigma}\frac{d\xi^\beta}{d\sigma}=0.$$

Действуя так же, как и выше, находим, что уравнение движения в произвольном гравитационном поле в произвольной системе

координат записывается следующим образом:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\frac{dx^\lambda}{d\sigma} = 0, \tag{3.2.8}$$

$$-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0, \tag{3.2.9}$$

где $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ и $g_{\mu\nu}$ определяются по-прежнему выражениями (3.2.4) и (3.2.7).

Между прочим, как в (3.2.3), так и в (3.2.8) нет необходимости знать, что такое τ и σ для определения движения нашей частицы; решения этих уравнений суть $x^\mu(\tau)$ или $x^\mu(\sigma)$, а τ или σ могут быть исключены при нахождении $\mathbf{x}(t)$. Мы привели формулу (3.2.6), чтобы показать, как вычисляется собственное время; формула же (3.2.9) показывает, как вводятся начальные условия для частицы с массой, равной нулю. В частности, уравнение (3.2.9) говорит нам о том, что время dt, за которое фотон проходит расстояние $d\mathbf{x}$, определяется из квадратного уравнения

$$g_{00}\,dt^2 + 2g_{i0}\,dx^i\,dt + g_{ij}\,dx^i\,dx^j = 0,$$

где i и j пробегают значения 1, 2, 3. Решение его имеет вид

$$\frac{1}{g_{00}}\left[-g_{i0}\,dx^i - \{(g_{i0}g_{j0} - g_{ij}g_{00})\,dx^i\,dx^j\}^{1/2}\right] = dt, \tag{3.2.10}$$

и, таким образом, время, за которое свет проходит какой-либо путь, можно вычислить, интегрируя dt по этому пути.

Значения метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и аффинной связности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ в точке X в произвольной системе координат — достаточная информация для определения локально-инерциальных координат $\xi^\alpha(x)$ в окрестности точки X. В самом деле, умножая уравнение (3.2.4) на $\partial\xi^\beta/\partial x^\lambda$ и используя правило умножения

$$\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha} = \delta^\beta_\alpha,$$

приходим к дифференциальному уравнению для ξ^α:

$$\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}. \tag{3.2.11}$$

Решение его имеет вид

$$\xi^\alpha(x) = a^\alpha + b^\alpha{}_\mu(x^\mu - X^\mu) + \frac{1}{2}b^\alpha{}_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x^\mu - X^\mu)(x^\nu - X^\nu) + \ldots, \tag{3.2.12}$$

где

$$a^{\alpha} = \xi^{\alpha}(X), \quad b^{\alpha}{}_{\lambda} = \frac{\partial \xi^{\alpha}(X)}{\partial X^{\lambda}}. \tag{3.2.13}$$

Из уравнения (3.2.7) находим также, что

$$\eta_{\alpha\beta} b^{\alpha}{}_{\mu} b^{\beta}{}_{\nu} = g_{\mu\nu}(X). \tag{3.2.14}$$

Таким образом, при заданных в точке X значениях $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ локально-инерциальные координаты ξ^{α} определены с точностью до порядка $(x - X)^2$, если опустить сложности определения постоянных a^{α} и $b^{\alpha}{}_{\lambda}$. Величины $b^{\alpha}{}_{\lambda}$ определяются уравнением (3.2.13) с точностью до лоренцева преобразования $b^{\alpha}{}_{\mu} \to \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} b^{\beta}_{\mu}$, так что неоднозначность решения $\xi^{\alpha}(x)$ отражает как раз тот факт, что если $\xi^{\alpha}(x)$ являются локально-инерциальными координатами, то ими же будут и $\Lambda^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta} + c^{\alpha}$. Следовательно, поскольку $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ определяют локально-инерциальные координаты с точностью до неоднородных преобразований Лоренца и поскольку гравитационное поле не может приводить к каким-либо эффектам в локально-инерциальной системе координат, то нет ничего удивительного в выводе, что все эффекты гравитации содержатся в $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$. Заметим, однако, что (3.2.12) удовлетворяет (3.2.11) только в точке $x = X$; для того чтобы найти решения (3.2.11) для всех x, необходимо, чтобы производные аффинной связности удовлетворяли некоторым условиям симметрии, которые будут обсуждаться в гл. 5.

§ 3. Связь между $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$

Наше рассмотрение свободно падающих частиц показало, что поля, определяющие гравитационную силу, выражаются через «аффинную связность» $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, в то время как интервал собственного времени между двумя событиями, происходящими в двух бесконечно близко расположенных пространственных точках, определяется «метрическим тензором» $g_{\mu\nu}$. Покажем теперь, что $g_{\mu\nu}$ является также гравитационным потенциалом, т. е. его производные задают поле $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Прежде всего вспомним, что метрический тензор определяется выражением (3.2.7)

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta}.$$

Дифференцирование по x^{λ} приводит к результату

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta}.$$

Используя теперь (3.2.11), получаем

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta}.$$

Подставляя сюда (3.2.7), снова находим, что

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}. \tag{3.3.1}$$

Прежде чем разрешить это соотношение относительно Γ, необходимо указать на некую тонкость в выводе соотношения (3.3.1), которая скрывалась за слишком компактными обозначениями. Когда мы выбираем локально-инерциальную систему координат $\xi^\alpha(x)$, мы привязываем ее к определенной точке X, и координаты, локально-инерциальные в X, в действительности должны обозначаться как $\xi^\alpha_X(x)$. Тогда уравнения (3.2.7) и (3.2.11) следует записать точнее:

$$g_{\mu\nu}(X) = \left(\frac{\partial \xi^\alpha_X(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta_X(x)}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \right)_{x=X}, \tag{3.3.2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha_X(x)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right)_{x=X} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(X) \left(\frac{\partial \xi^\alpha_X(x)}{\partial x^\lambda} \right)_{x=X}. \tag{3.3.3}$$

Если мы продифференцируем (3.3.2) по X^λ, то получим члены двух разных типов. Первые возникают, когда мы полагаем $x = X$; эти члены состоят лишь из вторых производных (3.3.3) и их легко вычислить, как и прежде. Второго типа члены возникают, поскольку $\xi^\alpha_X(x)$ имеет индекс X. Эти члены включают производные, подобные

$$\left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha_X(x)}{\partial X^\lambda \partial x^\mu} \right)_{x=X}. \tag{3.3.4}$$

Оказывается, что последние не имеют ничего общего с метрикой или аффинной связностью. Для того чтобы справиться с членами второго типа, необходимо более четко определить, что подразумевается под словами «локально-инерциальные» в формулировке принципа эквивалентности. В гл. 5 мы увидим, что первые производные метрического тензора могут быть измерены путем сравнения скоростей хода идентичных часов, расположенных бесконечно близко друг от друга. Тогда принцип эквивалентности можно понимать в том смысле, что *локально-инерциальные координаты ξ^α_X, которые мы вводим в данной точке X, могут быть выбраны так, что первые производные метрического тензора в точке X исчезают*. В системе координат ξ^α_X метрический тензор в точке X'

задается выражением (3.3.2) в виде

$$g^{X}_{\gamma\delta}(X') = \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}_{X'}(x)}{\partial \xi^{\gamma}_{X}(x)} \frac{\partial \xi^{\beta}_{X'}(x)}{\partial \xi^{\delta}_{X}(x)} \eta_{\alpha\beta} \right)_{x=X'},$$

и наша новая интерпретация принципа эквивалентности говорит о том, что данная величина становится стационарной по X', когда X' совпадает с X. Для того чтобы использовать эту информацию, введем произвольную «лабораторную» систему координат x^{α} и запишем

$$g_{\mu\nu}(X') \equiv \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}_{X'}(x)}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}_{X'}(x)}{\partial x_{\nu}} \eta_{\alpha\beta} \right)_{x=X'} =$$

$$= g^{X}_{\gamma\delta}(X') \left(\frac{\partial \xi^{\gamma}_{X}(x)}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\delta}_{X}(x)}{\partial x^{\nu}} \right)_{x=X'}.$$

Продифференцировав это выражение по X'^{λ} и положив $X' = X$, находим [ввиду стационарности $g^{X}_{\gamma\delta}(X')$] следующее соотношение:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(X)}{\partial X^{\lambda}} = g^{X}_{\gamma\delta}(X) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left\{ \frac{\partial \xi^{\gamma}_{X}(x)}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\delta}_{X}(x)}{\partial x^{\nu}} \right\} \right)_{x=X} =$$

$$= \eta_{\gamma\delta} \left(\frac{\partial^2 \xi^{\gamma}_{X}(x)}{\partial x^{\lambda}\, \partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\delta}_{X}(x)}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \xi^{\gamma}_{X}(x)}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\delta}_{X}(x)}{\partial x^{\lambda}\, \partial x^{\nu}} \right)_{x=X}.$$

Никаких производных, подобных (3.3.4), теперь не возникает, и можно использовать (3.3.2) и (3.3.3), как и прежде, чтобы показать справедливость соотношения

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(X)}{\partial X^{\lambda}} = \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}(X)\, g_{\rho\nu}(X) + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}(X)\, g_{\rho\mu}(X),$$

совпадающего по форме с (3.3.1).

Возвратимся теперь к нашим предыдущим компактным обозначениям и найдем с помощью этих соотношений аффинную связность. Прибавим к (3.3.1) аналогичное соотношение с переставленными индексами μ и λ и вычтем аналогичное соотношение с переставленными ν и λ. В результате получим

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = g_{\varkappa\nu}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu} + g_{\varkappa\mu}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\nu} +$$

$$+ g_{\varkappa\nu}\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} + g_{\varkappa\lambda}\Gamma^{\varkappa}_{\mu\nu} - g_{\varkappa\lambda}\Gamma^{\varkappa}_{\nu\mu} - g_{\varkappa\mu}\Gamma^{\varkappa}_{\nu\lambda} = 2g_{\varkappa\nu}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu}. \quad (3.3.5)$$

(Напомним, что $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ симметричны при перестановке μ и ν.) Определим матрицу $g^{\nu\sigma}$ как обратную к $g_{\nu\sigma}$, т. е.

$$g^{\nu\sigma}g_{\varkappa\nu} = \delta^{\sigma}_{\varkappa}. \quad (3.3.6)$$

Умножив предыдущее выражение на $g^{\nu\sigma}$, в результате получим

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right\}. \tag{3.3.7}$$

Следует отметить, что (3.2.7) действительно обеспечивает существование обратного тензора, равного

$$g^{\nu\sigma} \equiv g^{\sigma\nu} \equiv \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}}, \tag{3.3.8}$$

ибо, используя известное правило умножения

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\gamma}_{\alpha},$$

находим

$$g^{\nu\sigma} g_{\varkappa\nu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \eta_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial x^{\varkappa}} \frac{\partial \xi^{\delta}}{\partial x^{\nu}} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \eta_{\gamma\alpha} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial x^{\varkappa}} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\varkappa}} = \sigma^{\sigma}_{\varkappa},$$

что и совпадает с (3.3.6).] Иногда правую часть выражения (3.3.7) называют *символом Кристоффеля* и обозначают так:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{Bmatrix}.$$

Одним из важных следствий соотношения между аффинной связностью и метрическим тензором является то, что уравнение движения свободно падающей частицы автоматически сохраняет форму собственного временного интервала $d\tau$. Используя (3.2.3), можно найти, что

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right\} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} +$$

$$+ g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{d^2x^{\nu}}{d\tau^2} = \left[\frac{\partial g_{\varkappa\sigma}}{\partial x^{\lambda}} - g_{\mu\sigma} \Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda} - g_{\nu\varkappa} \Gamma^{\nu}_{\sigma\lambda} \right] \frac{dx^{\varkappa}}{d\tau} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau}.$$

Учитывая затем (3.3.5), легко видеть, что эта величина исчезает следовательно,

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = -C, \tag{3.3.9}$$

где C — интеграл движения. Далее, поскольку мы выбрали начальные условия так, что $d\tau^2$ определяется (3.2.6), получаем $C = 1$, и равенство (3.3.9) гарантирует, что формула (3.2.6) применима вдоль всего пути частицы. Аналогично начальные условия для безмассовой частицы приводят к $C = 0$ (τ заменяется при этом неким другим параметром σ), и уравнения движения будут обеспечивать равенство нулю величины $g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}$ вдоль всего пути.

Еще одним следствием соотношения (3.3.5) является возможность задавать теперь движение свободно падающих тел с помощью вариационного принципа. Введем произвольный параметр p, чтобы описать траекторию частицы, и будем определять собственное время, за которое частица падает из точки A в точку B, формулой

$$T_{BA} = \int_A^B \frac{d\tau}{dp} dp = \int_A^B \left\{ -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\}^{1/2} dp.$$

Теперь перейдем от траектории $x^\mu(p)$ к $x^\mu(p) + \delta x^\mu(p)$, фиксируя ее конечные точки, т. е. полагая $\delta x^\mu = 0$ в точках p_A и p_B. Тогда изменение T_{BA} равно

$$\delta T_{BA} = \frac{1}{2} \int_A^B \left\{ -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\}^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} - 2 g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\} dp.$$

Первый сомножитель под интегралом — это просто $dp/d\tau$, так что интеграл можно переписать следующим образом:

$$\delta T_{BA} = -\int_A^B \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right\} d\tau.$$

Проинтегрировав по частям, пренебрежем вкладом конечных точек, поскольку δx^μ обращается в нуль в A и B. При этом

$$\delta T_{BA} = -\int_A^B \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right\} \delta x^\lambda \, d\tau.$$

Используя соотношение (3.3.5) и учитывая, что $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ симметрична по нижним индексам, находим

$$\delta T_{BA} = -\int_A^B \left\{ \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right\} g_{\lambda\nu} \delta x^\lambda \, d\tau. \qquad (3.3.10)$$

Следовательно, мировая линия частицы в пространстве-времени, определяемая уравнениями свободного падения (3.2.3), будет такова, что затраченное собственное время окажется экстремальным (обычно минимальным), т. е.

$$\delta T_{BA} = 0.$$

Таким образом, мы можем интерпретировать уравнение движения (3.2.3) геометрически, считая, что частица, находящаяся в свобод-

ном падении в кривом пространстве-времени, называемом гравитационным полем, будет двигаться по кратчайшему (или самому длинному) из возможных путей между двумя точками; «длина» при этом измеряется собственным временем. Такие пути называют *геодезическими*. Например, можно считать, что Солнце искривляет пространство-время так, как большой груз искривляет резиновую пленку, и потому путь кометы, движущейся относительно Солнца, является «кратчайшим» из возможных. Однако такая геометрическая аналогия привлекается *после* решений уравнений движения, получаемых с помощью принципа эквивалентности, и не обязательна в нашем рассмотрении.

§ 4. Ньютоновское приближение

Чтобы найти связь с ньютоновской теорией, рассмотрим частицу, медленно движущуюся в слабом стационарном гравитационном поле. Если частица достаточно медленная, можно пренебречь $dx/d\tau$ по сравнению с $dt/d\tau$ и записать (3.2.3) в виде

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0.$$

Так как поле стационарно, все временные производные $g_{\mu\nu}$ исчезают и, следовательно,

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}.$$

А если поле еще и слабое, можно ввести почти декартову систему координат, в которой

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1. \tag{3.4.1}$$

Таким образом, в первом порядке по $h_{\alpha\beta}$ находим

$$\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}.$$

Подставляя это выражение аффинной связности в уравнения движения, получаем

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00},$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0.$$

Решение второго уравнения: $dt/d\tau = \text{const}$ (что можно увидеть, вычисляя $d\tau$ в пренебрежении $h_{\alpha\beta}$); поэтому, разделив уравнение с $d^2\mathrm{x}/d\tau^2$ на $(dt/d\tau)^2$, находим

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00}. \tag{3.4.2}$$

Соответствующий ньютоновский результат выглядит так:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\phi, \tag{3.4.3}$$

где ϕ — гравитационный потенциал, который на расстоянии r от центра сферического тела массы M имеет вид

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \tag{3.4.4}$$

Сравнивая (3.4.2) с (3.4.3), приходим к заключению, что

$$h_{00} = -2\phi + \text{const}.$$

Кроме того, на больших расстояниях система координат должна переходить в систему Минковского, так что h_{00} исчезает на бесконечности, а если мы потребуем, чтобы и ϕ исчезало на бесконечности [как (3.4.4)], то константа здесь будет равняться нулю. Таким образом, $h_{00} = -2\phi$, и, возвращаясь к метрике (3.4.1), получаем

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \tag{3.4.5}$$

Гравитационный потенциал имеет порядок 10^{-39} на поверхности протона, 10^{-9} — на поверхности Земли, 10^{-6} — на поверхности Солнца и 10^{-4} — на поверхности звезды типа белый карлик. Отсюда следует, что искривление в $g_{\mu\nu}$, вызываемое гравитацией, вообще говоря, очень невелико. (В системе СГС ϕ имеет размерность квадрата скорости; в наших единицах ϕ соответствует значению в единицах СГС, деленному на квадрат скорости света в единицах СГС.)

§ 5. Изменение масштаба времени

Рассмотрим часы, движущиеся с произвольной скоростью в произвольном гравитационном поле и не обязательно свободно падающие. Принцип эквивалентности говорит нам, что гравитационное поле не будет влиять на скорость их хода, если мы наблюдаем часы в локально-инерциальной системе координат ξ^α. Тогда, согласно § 2 гл. 2, пространственно-временной интервал $d\xi^\alpha$ между двумя отсчетами, даваемыми часами, подчиняется в этой системе соотношению

$$\Delta t = (-\eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta)^{1/2},$$

где Δt — период между этими отсчетами, когда часы находятся в покое в отсутствие гравитации. Следовательно, в любой произвольной системе координат пространственно-временной интервал между отсчетами определяется формулой

$$\Delta t = \left(-\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\,dx^\mu\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\,dx^\nu\right)^{1/2}.$$

Вводя метрический тензор, переписываем эту формулу так

$$\Delta t = (-g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu})^{1/2}.$$

Поскольку скорость часов — это dx^{μ}/dt, интервал времени dt между отсчетами определяется соотношением

$$\frac{dt}{\Delta t} = \left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{at}\frac{dx^{\nu}}{at}\right)^{-1/2}. \tag{3.5.1}$$

В частности, если часы покоятся, получаем

$$\frac{dt}{\Delta t} = (-g_{00})^{-1/2}. \tag{3.5.2}$$

Мы не можем наблюдать коэффициентов изменения масштаба времени, появляющихся в (3.5.1) и (3.5.2), просто путем измерения временного интервала dt между двумя отсчетами и сравнения его затем со значением Δt, задаваемым изготовителем часов. Дело в том, что гравитационное поле воздействует на временные стандарты точно таким же образом, как и на изучаемые часы. Следовательно, если наши стандартные часы показывают, что некоторый физический процесс протекает за одну секунду в покое в отсутствие гравитации, то мы можем также утверждать, что он занимает одну секунду и при наличии гравитации, поскольку поле воздействует одинаковым образом и на часы и на процесс. Однако мы можем сравнивать коэффициенты изменения масштаба времени в двух различных точках поля. Предположим, например, что в точке *1* мы наблюдаем свет, пришедший из точки *2*, где он возник в результате некоторого атомного перехода. Если в постоянном гравитационном поле точки *1* и *2* покоятся, то время, необходимое, чтобы волновой импульс, вышедший из точки *1*, достиг точки *2*, есть величина, определяемая интегралом (3.2.10) по данному пути. Следовательно, время между прибытием в точку *1* двух последовательных импульсов будет связано с временем между их выходами из точки *2*, согласно формуле (3.5.2), следующим образом:

$$dt_2 = \Delta t\, (-g_{00}\, (x_2))^{-1/2}.$$

Если аналогичный атомный переход происходит и в точке *1*, то время, разделяющее прибытия импульсов световых волн, измеряемые в точке *1*, равняется

$$dt_1 = \Delta t\, (-g_{00}\, (x_1))^{-1/2}.$$

Таким образом, для данного атомного перехода отношение частот (наблюдаемое в точке *1*) света, идущего из точки *2*, и света, выходящего из точки *1*, равно

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left(\frac{g_{00}\,(x_2)}{g_{00}\,(x_1)}\right)^{1/2}. \tag{3.5.3}$$

В предельном случае слабого поля имеем $g_{00} \approx -1 - 2\phi$ и $\phi \ll 1$, так что $\nu_2/\nu_1 = 1 + \Delta\nu/\nu$, где

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \phi(x_2) - \phi(x_1). \tag{3.5.4}$$

(Для *однородного* гравитационного поля этот результат можно было бы получить непосредственно из принципа эквивалентности без введения метрики или аффинной связности.)

Применим соотношение (3.5.4) к случаю, когда свет, испускаемый поверхностью Солнца, наблюдается на Земле. Гравитационный потенциал Солнца можно вычислить по формуле

$$\phi_\odot = \frac{-GM_\odot}{R_\odot},$$

где $M_\odot$ и $R_\odot$ — масса и радиус Солнца

$$M_\odot = 1{,}97 \cdot 10^{33} \text{ г},$$

$$R_\odot = 0{,}695 \cdot 10^{6} \text{ км},$$

а G — гравитационная постоянная

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-8} \text{ эрг} \cdot \text{см/г}^2 = 7{,}41 \cdot 10^{-29} \text{ см/г}, \tag{3.5.5}$$

(здесь, как мы условились, $c = 1$, а потому одна секунда равна $3 \cdot 10^{10}$ см; в единицах СГС величина $7{,}41 \cdot 10^{-29}$ см/г соответствует G/c^2). Отсюда находим, что потенциал на поверхности Солнца равен

$$\phi_\odot = -2{,}12 \cdot 10^{-6}.$$

По сравнению с $\phi_\odot$ гравитационным потенциалом Земли можно пренебречь. В этом случае частота света, приходящего от Солнца, будет смещаться в сторону красной части спектра на $2{,}12 \cdot 10^{-6}$ по сравнению с частотой света, испускаемого атомами на Земле.

Трудность в измерении гравитационного красного смещения солнечного света можно оценить, вспомнив, что движение источника со скоростью v вдоль оси Земля — Солнце приведет к дополнительному доплеровскому сдвигу частоты $\Delta\nu/\nu = v$ [см. выражение (2.2.2)], и, следовательно, доплеровский сдвиг сравняется с гравитационным красным смещением уже при скорости $2 \cdot 10^{-6}$, или, в единицах СГС, при $v = 0{,}6$ км/с. Вращение Земли или Солнца не создает здесь никаких сложностей; это известные эффекты, которые легко учесть. Тепловые эффекты более серьезны; при температуре 3000 К тепловая скорость распространенных легких элементов (C, N, O) равняется примерно 2 км/с, что дает доплеровское уширение, в три раза большее, чем ожидаемое гравитационное красное смещение. Однако тепловое движение только уширяет линии, но не сдвигает их, так что с этой трудностью

тоже можно справиться. Действительно большие неприятности вызывают неизвестные доплеровские сдвиги, возникающие из-за конвекции газов в солнечной атмосфере. Фактически оказывается, что наблюдаемый сдвиг частоты изменяется от места к месту на солнечном диске и иногда происходит даже в сторону голубой части спектра! Конвекция обычно бывает вертикальной, так что мы можем максимально уменьшить доплеровские сдвиги, наблюдая за периферией солнечного диска, где движение происходит главным образом под прямым углом к линии наблюдения. До недавнего времени наилучший результат, достигнутый таким способом,— это гравитационное красное смещение солнечного света порядка $2 \cdot 10^{-6}$ [2] [1]). В последние несколько лет была улучшена аппаратура [4, 5], что привело к гораздо более точному определению значения красного смещения: $1{,}05 \pm 0{,}05$ от предсказанной величины. Однако еще рано говорить, что этот результат решает вопрос, по крайней мере до тех пор, пока он не будет подтвержден.

Красное смещение намного больше для звезд типа белый карлик, подобных Сириусу B и 40 Эридан B. Такие звезды обычно имеют массы порядка одной солнечной массы и радиусы порядка от $^1/_{10}$ до $^1/_{100}$ от радиуса Солнца. Таким образом, красное смещение спектральных линий света, испускаемого их поверхностями, от 10 до 100 раз больше, чем для Солнца, или составляет приближенно 10^{-4} или 10^{-5}. Хотя это облегчает задачу отделения эффекта от доплеровских сдвигов, возникающих из-за конвекции или неоднородностей температуры и давления, мы сталкиваемся с новой трудностью: незнанием точного значения гравитационного потенциала φ, с которым надо сравнивать измеряемое значение $\Delta\nu/\nu$. Если известна масса белого карлика, можно грубо оценить величину его радиуса и гравитационного потенциала на его поверхности с помощью астрофизической теории [6]. Однако массы белых карликов могут быть измерены только в том случае, если они являются партнерами в двойных звездных системах. Например, масса Сириуса B определяется путем вычисления полной массы Сириуса A и B, исходя из расстояния между ними и периода их вращения, и вычитания затем массы Сириуса A, вычисленной по теории звезд. Однако рассеяние света, испускаемого Сириусом A, атмосферой Сириуса B приводит к тому, что гравитационное красное смещение света от Сириуса B весьма трудно измерить [2]). В системе двойной звезды 40 Эридан B возникает другая трудность. 40 Эридан B находится довольно далеко от 40 Эридан A,

[1]) Обзор и ссылки на более ранние работы см. в [3].

[2]) Спектроскопическое исследование Сириуса B, предпринятое недавно [19], дало для безразмерного поверхностного гравитационного потенциала величину $(2{,}8 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-4}$ и величину $(3{,}0 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-4}$ для относительного красного смещения.

и не возникает никакой проблемы с рассеянием света, а массу 40 Эридан B можно определить независимо от A путем установления положения их центра масс в дополнение к измерению периода их вращения и расстояния между ними. Однако, поскольку 40 Эридан B и A очень удалены друг от друга, период их вращения весьма велик и еще не прошло достаточное время, чтобы определить массу B с очень высокой точностью. Наилучшее предсказываемое значение поверхностного гравитационного потенциала — это $\phi = -(5{,}7 \pm 1)\cdot 10^{-5}$, что находится в хорошем согласии с наблюдаемым [7] [1]) красным смещением $\Delta\nu/\nu = -(7 \pm 1)\cdot 10^{-5}$. Если учесть расщепление Штарка в спектре 40 Эридан B, согласие улучшается [9].

Эмпирические данные по красному смещению, предсказываемому принципом эквивалентности, были значительно улучшены в 1960 г. в земных экспериментах, проведенных Паундом и Ребкой [10]. Они предоставили фотону, испускаемому в переходе 14,4 кэВ (0,1 мкс) атомом Fe^{57}, падать 22,6 м и наблюдали его резонансное поглощение мишенью из того же Fe^{57}. (В обычных условиях *резонансное* поглощение такой узкой линии невозможно, поскольку отдача излучающего ядра уменьшает энергию фотона, делая ее меньшей разности энергий уровней, тогда как для того, чтобы произошел обратный переход в ядре мишени, которое также испытывает отдачу, необходим квант с энергией, немного большей, чем разность энергий уровней. Этот эксперимент стал возможен благодаря эффекту Мёссбауэра [11], в котором импульсы отдачи при испускании и поглощении воспринимаются всем кристаллом, так что в этих актах энергия почти не теряется.) Разность значений гравитационного потенциала наверху, у источника, и внизу, у мишени, равняется

$$\Delta\phi = \phi_{\text{источ}} - \phi_{\text{мишень}} = -\frac{(980\ \text{см/с}^2)\,(2260\ \text{см})}{(3\cdot 10^{10}\ \text{см/с})^2} = -2{,}46\cdot 10^{-15}.$$

Если принцип эквивалентности справедлив, мы должны ожидать, что частота фотона, падающего на мишень, будет сдвинута на величину $\Delta\nu/\nu = -\Delta\varphi$, что уменьшает скорость счета на коэффициент

$$C = \frac{\Gamma^2}{\Delta\nu^2 + \Gamma^2},$$

где Γ — полная ширина линии на половине ее высоты. (Отметим, что в формулу входит Γ, а не $\Gamma/2$, так как приходится объединять коэффициент испускания, пропорциональный $[(\nu + \Delta\nu)^2 + (\Gamma/2)^2]^{-1}$, с коэффициентом поглощения, пропорциональным $[\nu^2 + (\Gamma/2)^2]^{-1}$)

[1]) По поводу других белых карликов см. [8].

Но в этом переходе относительная ширина равнялась $\Gamma/\nu = 1{,}13 \cdot 10^{-12}$, которая была больше, чем предсказываемое отношение $\Delta\nu/\nu$, в 460 раз, так что уменьшение скорости счета было только $1 : 2{,}1 \cdot 10^5$! Казалось бы, это делало эксперимент невозможным; и действительно, Паунд и Ребка сначала думали, что для того чтобы сдвиг $\Delta\nu$ становился сравнимым с Γ, фотоны должны падать несколько километров. К счастью, они придумали одну хитрость, позволившую им измерять очень малые сдвиги частот. Идея их состояла в том, что источник фотонов двигался вверх и вниз со скоростью $v_0 \cos \omega t$, где ω было некоторой произвольной фиксированной частотой (10—50 Гц), а v_0 было также произвольным, но намного превышающим $-\Delta\phi$, т. е. много большим, чем $7{,}4 \cdot 10^{-5}$ см/с. В этом случае гравитационное фиолетовое смещение $\Delta\nu_G$ добавляется к превышающему его доплеровскому сдвигу $\Delta\nu_D/\nu = -v_0 \cos \omega t$ (см. § 2 гл. 2), и скорость счета умножается на коэффициент, зависящий от времени,

$$C(t) = \frac{\Gamma^2}{(\Delta\nu_G + \Delta\nu_D)^2 + \Gamma^2} = \frac{\left(\frac{\Gamma}{\nu}\right)^2}{\left(\frac{\Delta\nu_G}{\nu} - v_0 \cos \omega t\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{\nu}\right)^2} \approx$$

$$\approx \frac{\left(\frac{\Gamma}{\nu}\right)^2}{v_0^2 \cos^2 \omega t + \left(\frac{\Gamma}{\nu}\right)^2} \left\{ 1 + \frac{2\frac{\Delta\nu_G}{\nu} v_0 \cos \omega t}{v_0^2 \cos^2 \omega t + \left(\frac{\Gamma}{\nu}\right)^2} \right\}.$$

Тогда $\Delta\nu_G$ можно выделить, измеряя член, линейный по $\cos \omega t$, например измеряя асимметрию между числом регистраций при движении источника вверх (например, когда $\cos \omega t > 1/\sqrt{2}$) и числом регистраций, когда источник движется вниз (когда $\cos \omega t < -1/\sqrt{2}$). Таким способом Паунд и Ребка получили значение $\Delta\nu_G/\nu$, приблизительно в 4 раза большее, чем ожидаемое значение $2{,}46 \cdot 10^{-15}$. Это расхождение было явно внутренним сдвигом частоты из-за различия состояний кристаллов источника и мишени (включая разность их температур) и было удалено вычитанием асимметрии в счете фотонов, когда источник находился ниже мишени, из асимметрии, возникающей, когда мишень находилась ниже источника. Окончательный результат для гравитационного смещения частоты был: $\Delta\nu/\nu = (2{,}57 \pm 0{,}26) \cdot 10^{-15}$ в блестящем согласии с предсказанным значением $2{,}46 \cdot 10^{-15}$. Соответствие с тех пор улучшено, и в настоящее время результаты совпадают с точностью около 1% [12].

Сделаны также предложения [13] по измерению гравитационного красного смещения света, приходящего от искусственного спутника. В точке, расположенной как раз под перигеем, не будет возникать никаких доплеровских эффектов первого порядка, так

как время, за которое свет достигает точки наблюдения, в данном случае на мгновение становится постоянным. Тогда сдвиг частоты испускаемого спутником света должен определяться по формуле (3.5.1), в то время как сдвиг частоты наших лабораторных временных стандартов может быть вычислен с помощью формулы (3.5.2), если мы пренебрежем вращением Земли. Из этого следует, что частота ν_s данной атомной линии, испускаемой спутником, будет связана с частотой ν_e этой же линии на Земле отношением

$$\frac{\nu_s}{\nu_e} = \frac{\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\right)_s^{1/2}}{(-g_{00})_\oplus^{1/2}}. \tag{3.5.6}$$

Скорость v_s спутника определяется, исходя из формулы

$$v_s^2 = -\phi_s = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus + H},$$

где H — высота спутника в перигее, а $M_\oplus$ и $R_\oplus$ — масса и радиус Земли

$$M_\oplus = 5{,}983 \cdot 10^{27}\ \text{г}, \qquad R_\oplus = 6{,}371 \cdot 10^{8}\ \text{см}.$$

В приближении слабых полей имеем

$$\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\right)_s \approx -(g_{00})_s - v_s^2 = 1 + 2\phi_s - v_s^2 \approx 1 - \frac{3GM_\oplus}{R_\oplus + H}$$

и

$$(-g_{00})_\oplus \approx 1 + 2\phi_\oplus \approx 1 - \frac{2GM_\oplus}{R_\oplus},$$

так что в этом приближении выражение (3.5.6) приводит к следующему отношению частот: $\nu_s/\nu_e = 1 + \Delta\nu/\nu$, где

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{3}{2}\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + H} + \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} \approx -3{,}47 \cdot 10^{-10}\left\{\frac{3R_\oplus}{R_\oplus + H} - 2\right\}.$$

Мы видим, что при малых высотах имеется красное смещение, обязанное своим происхождением только специальной теории относительности (см. § 2 гл. 2), с которым складывается при бо́льших высотах фиолетовое смещение (возникающее в общей теории относительности), что приводит в итоге к красному смещению для $H < R_\oplus/2$ и к фиолетовому смещению для $H > R_\oplus/2$.

В данном случае гравитационное красное смещение света, приходящего из места с меньшим значением гравитационного потенциала, чем в точке наблюдения, может в некоторой степени восприниматься как следствие квантовой теории, закона сохранения энергии и «слабого» принципа эквивалентности. Если фотон испускается в точке *1* каким-нибудь тяжелым нерелятивистским прибором, наблюдатель в локально-инерциальной системе координат,

движущейся вместе с этим прибором, обнаружит, что внутренняя энергия этого прибора и, следовательно, его инертная масса изменяются на величину, связанную с частотой фотона ν_1, следующим образом:

$$\Delta m_1 = -h\nu_1,$$

где h есть постоянная Планка: $h = 6{,}625 \cdot 10^{-27}$ эрг·с. Предположим, что фотон затем поглощается в точке *2* другим массивным прибором; тогда наблюдатель в свободно падающей системе отсчета обнаружит, что инертная масса прибора изменяется на величину, связанную с частотой фотона ν_2, следующим образом:

$$\Delta m_2 = h\nu_2.$$

Однако сумма полной инертной массы и гравитационной потенциальной энергии двух частей этой установки должна быть одной и той же и до и после этих событий, так что

$$\Delta m_1 + \phi_1 \Delta m_1 + \Delta m_2 + \phi_2 \Delta m_2 = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1+\phi_1}{1+\phi_2} \approx 1 + \phi_1 - \phi_2$$

в согласии с предыдущим результатом. (Не важно, измеряются ли частоты фотонов в локально-инерциальных системах или в неинерциальных, поскольку гравитационное поле и в любой другой системе отсчета будет воздействовать на скорость хода стандартных часов наблюдателя точно таким же образом, как оно действует на частоту ν.) Этот результат можно описать, говоря, что фотон в гравитационном поле обладает «кинетической энергией» $h\nu$ и «потенциальной энергией» $h\nu\phi$ и их сумма остается постоянной. Однако мы намеренно рассматривали в предыдущих вычислениях нерелятивистский источник и поглотитель, так как понятие гравитационной потенциальной энергии фотона в противном случае теряет смысл.

Полученные результаты основываются на принципе эквивалентности в двух отношениях. Предполагается, что изменения гравитационной массы приборов равны изменениям их инертных масс и, следовательно, их внутренней энергии. Предполагается также, что соотношение между энергией фотона и частотой в свободно падающей системе отсчета не изменяется при наличии гравитационных полей. Поэтому даже если мы предположим, что эксперименты Этвеша — Дикке могут быть улучшены до неограниченной точности и что гравитационная масса будет найдена в точности равной инертной массе, все же имеет смысл рассматривать гравитационное красное смещение спектральных линий как независимую проверку принципа эквивалентности.

§ 6. Знаки времени

Связь метрики Минковского $\eta_{\alpha\beta}$ и метрического тензора $g_{\mu\nu}$ теории гравитации может быть записана в матричной форме:

$$g = D^T \eta D. \tag{3.6.1}$$

Под g будем подразумевать в этом параграфе матрицу размера 4×4 (не детерминант), чьи элементы суть $g_{\mu\nu}$; η — матрица с элементами $\eta_{\alpha\beta}$; D — матрица определяемая, как

$$D_{\alpha\mu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}, \tag{3.6.2}$$

а транспонированная матрица D^T равна

$$D^T_{\mu\alpha} \equiv D_{\alpha\mu}.$$

Ранее мы, специально не оговаривая, предполагали как часть принципа эквивалентности, что преобразование от лабораторных координат x^μ к локально-инерциальным координатам ξ^α несингулярно: ξ^α — дифференцируемая функция x^μ, а x^μ — дифференцируемая функция ξ^α. Из этого следует, что существует матрица

$$D^{-1}_{\mu\alpha} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}, \tag{3.6.3}$$

обратная к D, т. е.

$$(D^{-1}D)_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu,$$

так что D должно иметь неисчезающий определитель

$$\mathrm{Det}\, D \neq 0. \tag{3.6.4}$$

Преобразование типа (3.6.1) при отличающемся от нуля определителе D называется *конгруэнцией*.

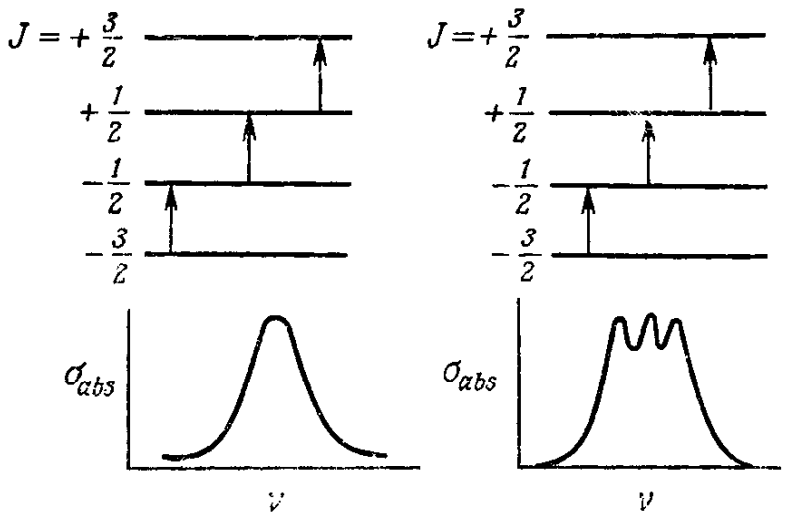
Тот факт, что $g_{\mu\nu}$ связано с $\eta_{\alpha\beta}$ конгруэнцией (3.6.1), не означает, что собственные значения $g_{\mu\nu}$ те же самые, что у $\eta_{\alpha\beta}$, как было бы в случае преобразования подобия. (Действительно, *нельзя* составить никаких инвариантных функций из компонент метрического тензора, хотя можно составить инвариантные функции из $g_{\mu\nu}$ и его производных, как будет показано в гл. 6.) Однако существует теорема, известная как *закон инерции Сильвестра* (см., например, [14]), которая утверждает, что *числа* собственных значений, положительных, отрицательных и нулевых, не изменяются при конгруэнтных преобразованиях. Отсюда вывод: метриче-

ский тензор $g_{\mu\nu}$ должен аналогично $\eta_{\alpha\beta}$ иметь три положительных собственных значения, одно отрицательное и ни одного собственного значения, равного нулю. Это свойство метрики отличает наше (3 + 1)-мерное пространство-время от 4-мерного или от (2 + 2)-мерного пространства-времени, или каких-либо еще более «плохих» метрик.

§ 7. Относительность и анизотропия инерции

В § 3 гл. 1 мы уже видели, что Ньютон и Мах по-разному смотрели на проблему происхождения инерции. Ньютон полагал, что инерциальные силы, такие, как центробежные, должны возникать из-за ускорения относительно «абсолютного пространства», в то время как Мах считал более вероятным, что инерциальные силы порождаются общей массой небесных тел. Отличие утверждений не метафизическое, а физическое, поскольку если бы Мах был прав, то большая масса могла бы вызывать малые изменения инерциальных сил вблизи нее, если же Ньютон был бы прав, такие эффекты не возникали бы.

Эйнштейн считал себя последователем Маха, но в действительности разрешение этой проблемы на основе принципа эквивалетности находится где-то между точками зрения Ньютона и Маха. Инерциальные системы отсчета, т. е. «свободно падающие системы координат», действительно определяются локальным гравитационным полем, которое создается всей материей Вселенной, ее частями, расположенными далеко и близко. Однако в инерциальной системе отсчета на законы движения [такие, как (2.3.1)] присутствие масс вблизи уже не влияет ни гравитационным, ни каким-либо другим путем. Например, масса Солнца определяет движение свободно падающей Земли, но как только мы связали нашу систему отсчета с Землей, мы не можем обнаружить гравитационное поле Солнца, что демонстрирует с большой точностью эксперимент Дикке. (Вспомним § 2 гл. 1. В действительности, из-за того, что Земля не является бесконечно малым объектом, мы можем наблюдать поле Солнца благодаря эффектам приливов, как это обсуждалось уже в § 1 гл. 3.) Небесные тела фигурируют здесь потому, что уравнения гравитационного поля нуждаются в граничных условиях на бесконечности, а последние задаются требованием, чтобы на больших расстояниях от Солнца $g_{\mu\nu}$ переходило в космическое гравитационное поле, создаваемое всей массой Вселенной. Мы не будем пока вникать в детали уравнений поля и космологии, однако можно ожидать, что гравитационное поле, создаваемое массой Солнца и этими космологическими граничными условиями, таково, что орбиты планет, проходящие далеко от Солнца, не прецессируют относительно реперных звезд; последнее согласуется с наблюдениями (см. § 1 гл. 15).



Фиг. 3.1. Проверка изотропности инерции с помощью спектра поглощения Li^7.

Разности в частотах и расщепление линии сильно увеличены.

Эти положения настолько важны, что не мешает обсудить их подробнее. Если нет близко расположенных масс, инерциальные системы отсчета определяются средним космическим гравитационным полем, которое в свою очередь определяется средней плотностью масс звезд во Вселенной, и, таким образом, не удивительно, что эти инерциальные системы отсчета находятся в покое или в состоянии равномерного некриволинейного движения относительно каких-то далеких звезд. Если бы близко находилась большая масса, подобная Солнцу, то она изменила бы инерциальные системы отсчета таким образом, что они стали бы ускоряться в направлении этой массы; законы движения в этих свободно падающих системах отсчета остаются теми же, что и в специальной теории относительности, и не подвержены никакому влиянию со стороны окружающего распределения масс. В этом смысле принцип эквивалентности и принцип Маха прямо противоположны.

Выбор между предположениями Маха и Эйнштейна можно сделать, только решив вопрос, влияет или не влияет в действительности присутствие больших, близко расположенных масс на законы движения, т. е. приводит ли это к другим законам по сравнению с законами, имеющими место в инерциальных системах координат. Коккони и Солпитер указали [15, 16], что вблизи нас имеется большая масса — Млечный Путь и что принцип Маха предполагает существование небольшой разницы в инерциальной массе в случаях, когда частица ускоряется к центру Галактики и от нее. Экспериментально это было проверено Хьюзом, Робинсоном и Бельтран-Лопесом [17] и в аналогичном эксперименте Древером [18] (фиг. 3.1). Хьюз и другие наблюдали резонансное поглощение фотонов ядрами Li^7 в магнитном поле с напряженностью

4700 Гс. Основное состояние этого ядра имеет спин $^3/_2$ и расщепляется на четыре энергетических уровня, которые эквидистантны если законы ядерной физики инвариантны относительно вращений. В этом случае три перехода между соседними состояниями должны иметь одинаковую энергию, и спектр поглощения фотонов будет иметь вид единственного острого пика на графике. Однако если инерция анизотропна, то четыре магнитных подуровня не были бы эквидистантными и наблюдалась бы не одна, а три близко расположенные резонансные линии. Хьюз и др. пришли к выводу, что не может быть никакого расщепления, большего, чем ширина линии, равная $5{,}3 \cdot 10^{-21}$ МэВ. Их наблюдения занимали 12 ч, в течение которых из-за вращения Земли магнитное поле поворачивалось от направления в 22° относительно центра Галактики до направления в 104°. Если представить ядро Li^7 как единственный протон с угловым моментом $^3/_2$, который связан с другими нуклонами в центральном потенциале, тогда анизотропия Δm массы протона должна быть равной

$$\Delta\left(\frac{p^2}{2m}\right) \approx \frac{\Delta m}{m}\left(\frac{p^2}{2m}\right) \leqslant 5{,}3 \cdot 10^{-21} \text{ МэВ},$$

где $p^2/2m$ — кинетическая энергия протона. Так как $p^2/2m$ больше, чем $^1/_2$ МэВ, мы приходим к выводу, что анизотропия инертной массы ограничивается неравенством

$$\frac{\Delta m}{m} \leqslant 10^{-20}.$$

При таком рассмотрении данные уже твердо говорят в пользу принципа эквивалентности, а не принципа Маха.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основные книги по общей теории относительности

Adler R., Bazin M., Schiffer M., Introduction to General Relativity, McGraw-Hill, 1965.

Anderson J. L., Principles of Relativity Physics, Academic Press, 1967.

Bergmann P. G., Introduction to the Theory of Relativity, Prentice-Hall, 1942 (см. перевод: *Бергман П. Г.*, Введение в теорию относительности, ИЛ. 1947).

Eddington A. S., The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge University Press, 1960 (см. перевод: *Эддингтон А. С.*, Математическая теория относительности, Гос. научн. тех. изд., 1933).

Einstein A., The Meaning of Relativity, Princeton University Press, 1946 (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1965, т. 2, стр. 5).

Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, 1961.

Мфller C., The Theory of Relativity, Clarendon Press, 1952.

Pauli W., Theory of Relativity, Pergamon Press, 1958 (см. перевод: *Паули В.*, Теория относительности, Гостехиздат, 1947).
Schroedinger E., Space-Time Structure, Cambridge University Press, 1950.
Synge J. L., Relativity: The General Theory, Interscience Publ., 1960 (см. перевод: *Синг Дж. Л.*, Общая теория относительности, ИЛ, 1963).
Weyl H., Space-Time-Matter, Dover Publicatons, 1952.

По вопросу экспериментальной проверки принципа эквивалентности см. литературу к гл. 8 и особенно статью Р. Дикке.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Wapstra A. H., Nijgh G. J.*, Physica, **21**, 796 (1955).
2. *Adam M. G.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **119**, 460 (1959).
3. *Bertotti B., Brill D., Krotkov R.*, в книге Gravitation, ed. L. Witten, Wiley, 1962, p. 23.
4. *Brault J.*, Bull. Am. Phys. Soc., 8, 28 (1963).
5. *Blamont J. E., Roddier F.*, Phys. Rev. Lett., **7**, 437 (1961).
6. *Schwarzschild M.*, Structure and Evolution of the Stars, Princeton University Press, 1958, Ch. VII (см. перевод: *Шварцшильд С.*, Строение и эволюция звезд, ИЛ, 1961, гл. 7).
7. *Popper D. M.*, Astrophys. J., **120**, 316 (1954).
8. *Greenstein J. L., Trimble V.*, Astrophys. J., **149**, 283 (1967).
9. *Wiese W. L., Kelleher D. E.*, Astrophys. J., **166**, L59 (1971).
10. *Pound R. V., Rebka G. A.*, Phys. Rev. Lett., **4**, 337 (1960) (см. перевод в сб.: Новейшие проблемы гравитации, «Мир», 1961, стр. 474); первоначальная публикация: Phys. Rev. Lett., **3**, 439 (1959).
11. *Mössbauer R. L.*, Zs. Phys. **151**, 124 (1958); Naturwiss., **45**, 538 (1958); Zs. Naturforsch., **14a**, 211 (1959).
12. *Pound R. V., Snider J. L.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 539 (1964).
13. *Kleppner D., Ramsey N. F., Vessot R.F.C.*, Astrophys. Space Sci., **6**, 13 (1970).
14. *Turnbull H. W., Aitken A. C.*, An Introduction to the Theory of Canonical Matrices, Dover Publications, 1961, p. 89.
15. *Cocconi G., Salpeter E. E.*, Phys. Rev. Lett., **4**, 176 (1960).
16. *Dicke R. H.*, Phys. Rev. Lett., **7**, 359 (1961).
17. *Hughes V. W., Robinson H. G., Beltran-Lopez V.*, Phys. Rev. Lett., **4**, 342 (1960).
18. *Drever R. W. P.*, Phil. Mag., **6**, 683 (1961).
19. *Greenstein J. L., Oke J. B., Shipman H. L.*, Astrophys. J., **169**, 563 (1971).

В математике он был более велик,
Чем Тихо Браге или Эрра Патер:
Геометрическим масштабом
Для него мог служить объем кружки эля
Легко расправлялся с синусами и тангенсами,
Когда хотел взвесить хлеб или масло,
И мудро вычислял по правилам алгебры
какой час дня бьют его часы.

С. Батлер,

Сэр Гудибрас, его последнее слово

Глава 4

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Мы уже отмечали, что принцип эквивалентности гравитации и инерции вскрывает глубокую аналогию между неевклидовой геометрией и теорией гравитации. В этой главе кратко изложен аппарат, общий для них обоих,— тензорный анализ.

§ 1. Принцип общей ковариантности

В последней главе мы использовали один из способов применения принципа эквивалентности, чтобы ввести эффект гравитации в физических системах. При этом мы записывали уравнения, установленные для произвольных гравитационных полей, в локально-инерциальных системах координат (т. е. уравнения специальной теории относительности, такие, как $d^2\xi^\alpha/d\tau^2 = 0$), а затем делали преобразования координат, чтобы найти соответствующие уравнения в лабораторной системе координат. Можно использовать и далее этот метод, но он приведет нас к весьма утомительным вычислениям, когда мы доберемся до уравнений поля в электродинамике и гравитации.

Поэтому мы разовьем другой подход, который имеет то же физическое содержание, но намного элегантнее в обозначениях и удобнее в обращении. Этот подход вытекает из альтернативной версии принципа эквивалентности, известной как *принцип общей ковариантности.* Он утверждает, что физическое уравнение задано в произвольном гравитационном поле в том случае, когда выполняются два условия:

1) уравнение задано в отсутствие гравитации, т. е. оно соответствует законам СТО, когда метрический тензор в нем $g_{\alpha\beta}$ равняется тензору Минковского $\eta_{\alpha\beta}$ и аффинная связность $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ исчезает;

2) уравнение общековариантно, т. е. оно сохраняет свою форму при произвольном преобразовании координат $x \to x'$.

Чтобы убедиться в том, что принцип общей ковариантности вытекает из принципа эквивалентности, предположим, что мы находимся в произвольном гравитационном поле, и рассмотрим какое-нибудь уравнение, удовлетворяющее двум вышеуказанным условиям. Согласно условию 2, мы знаем, что это уравнение справедливо во всех системах координат, если оно справедливо в какой-либо системе координат. Но в любой данной точке имеется класс систем координат, локально-инерциальных систем, в которых эффекты гравитации отсутствуют. Условие 1 тогда говорит нам, что наше уравнение справедливо в этих системах и, следовательно, во всех других системах координат.

Следует подчеркнуть, что общая ковариантность сама по себе не имеет физического содержания [1]. Любое уравнение может быть *сделано* общековариантным, если записать его в какой-либо одной системе координат, а затем придать ему форму, не изменяющуюся при переходе в любую другую систему. Действительно, уже со школьной скамьи нам становится привычной запись физических уравнений в недекартовых системах координат, таких, как полярные координаты, и в неинерциальных системах, таких, как вращающиеся системы отсчета. Смысл принципа общей ковариантности применительно к эффектам гравитации состоит в том, что физическое уравнение благодаря его общей ковариантности будет справедливо в гравитационном поле, если оно справедливо в его отсутствие. Смысл общей ковариантности легче понять, если сравнить ее с лоренцевой инвариантностью. Так же как любое уравнение можно записать в общековариантном виде, так и любое уравнение можно сделать лоренц-инвариантным, если записать его в какой-либо одной системе координат, а затем придать ему форму, не изменяющуюся при лоренцевых преобразованиях. Однако, если мы проделаем это с нерелятивистским уравнением, например с ньютоновским вторым законом, то обнаружится, что после того как мы сделаем его лоренц-инвариантным, в нем появится новая величина, которая, естественно, является скоростью введенной системы отсчета относительно первоначальной системы. Требование, чтобы эта скорость *не* появлялась в преобразованном уравнении, и составляет то, что мы называем принципом специальной относительности, или, для краткости, «лоренц-инвариантностью», и это требование накладывает очень жесткие ограничения на первоначальное уравнение. Подобно этому, когда мы придаем уравнению общековариантную форму, в него входят новые величины: метрический тензор $g_{\mu\nu}$ и аффинная связность $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Отличие состоит в том, что в данном случае не требуется, чтобы названные величины в итоге исчезали, и, следовательно, не возникает никаких ограничений на уравнение, с которого мы

начинали; наоборот, мы пользуемся существованием $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ для введения гравитационных полей. Сформулируем это кратко: принцип общей ковариантности не является принципом инвариантности, подобно принципу Галилея или специальной относительности, а есть лишь некое утверждение об эффектах гравитации и ни о чем больше. В частности, общековариантность не предполагает лоренц-инвариантности. Имеются общековариантные теории гравитации, позволяющие вводить инерциальные системы отсчета в любой точке гравитационного поля, но инвариантные относительно преобразования Галилея, а не относительно преобразования Лоренца в этих системах отсчета [2].

Любой физический принцип, такой, как общековариантность, который принимает форму принципа инвариантности, но содержание которого накладывает явное ограничение только на взаимодействия какого-нибудь конкретного поля, называется *динамической симметрией* [3]. Существуют другие динамические симметрии, имеющие большое значение в физике, такие, как локальная калибровочная инвариантность, управляющая взаимодействиями электромагнитного поля, или киральная симметрия [1]), управляющая взаимодействиями пионного поля. Мы будем не раз возвращаться к аналогии между общей теорией относительности и электродинамикой.

Принцип общей ковариантности применим только в масштабах, малых по сравнению с пространственно-временными размерами, типичными для гравитационного поля, так как только в малых областях можно, руководствуясь принципом эквивалентности, находить системы координат, в которых отсутствуют эффекты гравитации. Например, радиус Луны ненамного меньше, чем расстояние между Луной и Землей, так что мы не можем точно вычислить движение Луны, находя общековариантные уравнения, которые сводятся к точным уравнениям для свободного движения Луны в отсутствие гравитации. Мы можем, однако, рассматривать Луну как каменный шар и вычислять ее движение, применяя принцип общей ковариантности для определения гравитационного воздействия на каждый бесконечно малый элемент массы Луны. Вообще говоря, существует много общековариантных уравнений, которые сводятся к данному уравнению специальной теории относительности в отсутствие гравитации. Однако, поскольку принцип общей ковариантности применим только к малым масштабам по сравнению с масштабом гравитационного поля, мы вправе ожидать, что только $g_{\mu\nu}$ и его первые производные войдут в наши общековариантные уравнения. В этой и следующей главах мы увидим, что принцип общей ковариантности приводит к однозначным выводам относительно воздействия гравитационных полей на любую систему или часть системы, если они достаточно малы.

[1]) По поводу такого подхода к киральной симметрии см., например, [4].

§ 2. Векторы и тензоры

Для того чтобы построить физические уравнения, инвариантные при произвольных преобразованиях координат, мы должны знать, как ведут себя при этих преобразованиях величины, стоящие в уравнениях. Для некоторых величин, тех, что определяются непосредственно через дифференциалы от координат, трансформационные свойства могут быть определены путем прямого вычисления. Для других величин, таких, как электромагнитные поля, трансформационные свойства отчасти задаются по определению. Однако мы стремимся к тому, чтобы все величины, представляющие физический интерес, имели достаточно простые правила преобразования; в противном случае было бы затруднительно сводить их вместе в форм-инвариантные уравнения. В этом параграфе мы введем класс объектов, правила преобразования которых особенно просты, и продемонстрируем их, где возможно, на примерах величин, определяемых непосредственно через кинематические переменные в данных системах координат.

Простейшее из правил преобразований — это правило для *скаляров*, которые не изменяются при любых преобразованиях координат. Очевидный пример — обычное число, такое, как 137 (или π, или нуль). Другой пример — собственное время $d\tau$, задаваемое выражением (3.2.6) (действительно, мы убедимся ниже, что метрический тензор $g_{\mu\nu}$ определяется как раз таким образом, чтобы $d\tau^2$ было инвариантом).

Согласно простейшему правилу, преобразуется *контравариантный вектор* V^μ, который при замене координат $x^\mu \to x'^\mu$ трансформируется следующим образом:

$$V'^\mu = V^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \tag{4.2.1}$$

Например, правила взятия частной производной дают

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \tag{4.2.2}$$

так что дифференциал от координаты является контравариантным вектором. Очень похожим является преобразование *ковариантного вектора* U_μ, который при замене $x^\mu \to x'^\mu$ преобразуется так:

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu. \tag{4.2.3}$$

Например, если ϕ — скалярное поле, то $\partial\phi/\partial x^\mu$ — ковариантный вектор, поскольку в соответствии с (4.2.3) в штрихованной системе координат градиент равен

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}. \tag{4.2.4}$$

От контравариантных и ковариантных векторов можно прямо перейти к *тензорам*. Тензор с верхними индексами μ, ν, ... и нижними индексами $\varkappa$, λ, ... преобразуется как произведение контравариантных векторов $U^\mu W^\nu \ldots$ и ковариантных векторов $V_\varkappa V_\lambda \ldots$. Например, при замене $x \to x'$ тензор $T^\mu{}_\nu{}^\lambda$ преобразуется следующим образом:

$$T'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} T^{\varkappa}{}_{\rho}{}^{\sigma}. \tag{4.2.5}$$

Если все индексы у тензора верхние, будем называть его контравариантным; если все индексы нижние — то ковариантным; в остальных случаях — смешанным. Наиболее важный пример — это метрический тензор, определенный в § 2 гл. 3 в произвольной системе координат x^μ с помощью соотношения

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu},$$

где ξ^α — локально-инерциальные координаты. В какой-либо другой системе координат x'^μ метрический тензор равняется

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu},$$

и, следовательно,

$$g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}. \tag{4.2.6}$$

Видно, что $g_{\mu\nu}$ — действительно ковариантный тензор. Обратный ему тензор контравариантен, так как если мы вводим $g^{\lambda\mu}$ с помощью соотношения

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu,$$

то

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} \frac{\partial x^\varkappa}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\nu} g_{\varkappa\eta} =$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} g^{\rho\varkappa} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\nu} g_{\varkappa\eta} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta^\lambda_\nu$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} = g'^{\lambda\mu}, \tag{4.2.7}$$

как и полагается контравариантному тензору. И наконец, символ Кронекера δ^μ_ν является смешанным тензором, поскольку

$$\delta^\mu_\nu \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} = \delta^\rho_\sigma. \tag{4.2.8}$$

Кроме скаляров и нуля, δ^{μ}_{ν} (как и его прямые произведения) является единственным тензором, компоненты которого одинаковы во всех системах координат.

Вектор есть просто тензор с одним индексом, а скаляр — тензором без индекса, так что вообще нет нужды скаляр и вектор рассматривать отдельно. Однако читателя следует предупредить, что не все объекты являются тензорными; в частности, аффинная связность, несмотря на внешний вид ее записи, не есть тензор.

Мы можем теперь выделить один очень широкий класс инвариантных уравнений, а именно: любое уравнение будет инвариантным при произвольных преобразованиях координат, если оно имеет вид равенства двух тензоров с одинаковым набором верхних и нижних индексов. Например, если некие $A^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$ и $B^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$ — два тензора, преобразующиеся по правилу (4.2.5), и если в системе координат x^{μ} выполняется равенство $A^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda} = B^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$, то, очевидно, и в системе координат x'^{μ} справедливо равенство $A'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda} = B'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$. В частности, поскольку нуль можно представлять себе любого вида тензором по нашему желанию, верно утверждение, что данный тензор исчезает инвариантно при произвольных преобразованиях координат. Напротив, формулы, не являющиеся равенствами между тензорами одного и того же вида (например, $T^{\mu\nu} = 5$ или $V^{\mu} = U_{\mu}$), могут численно выполняться в ограниченном классе систем координат, однако не быть справедливыми во всех системах.

§ 3. Тензорная алгебра

Для того чтобы научиться строить из тензоров уравнения, инвариантные при произвольных преобразованиях координат, надо знать, как из одних тензоров образовывать другие. Это выполняется с помощью нескольких простых алгебраических операций.

А. Суммирование. Сумма тензоров с одинаковыми верхними и нижними индексами есть тензор с теми же самыми индексами. Возьмем, например, два смешанных тензора. Рассмотрим их сумму

$$T^{\mu}{}_{\nu} \equiv aA^{\mu}{}_{\nu} + bB^{\mu}{}_{\nu},$$

где a и b — скаляры. Тогда $T^{\mu}{}_{\nu}$ является тензором, поскольку

$$\begin{aligned} T'^{\mu}{}_{\nu} &\equiv aA'^{\mu}{}_{\nu} + bB'^{\mu}{}_{\nu} = \\ &= a\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}A^{\rho}{}_{\sigma} + b\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}B^{\rho}{}_{\sigma} = \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}T^{\rho}{}_{\sigma}. \end{aligned}$$

Б. Прямое произведение. Произведение компонент двух векторов приводит к тензору, верхние и нижние индексы которого состоят из всех верхних и нижних индексов двух первоначальных тензоров. Например, если $A^{\mu}{}_{\nu}$ и B^{ρ} являются тензорами, то комбинация

$$T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho} \equiv A^{\mu}{}_{\nu} B^{\rho}$$

тоже тензор, т. е.

$$\begin{aligned} T'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho} &\equiv A'^{\mu}{}_{\nu} B'^{\rho} = \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\varkappa}}{\partial x'^{\nu}} A^{\lambda}{}_{\varkappa} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} B^{\sigma} = \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\varkappa}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} T^{\lambda}{}_{\varkappa}{}^{\sigma}. \end{aligned}$$

В. Свертка. Приравнивание верхнего и нижнего индексов и суммирование по их четырем значениям дают новый тензор, в котором эти два индекса отсутствуют. Например, если $T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho\sigma}$ является тензором, и если образовать

$$T^{\mu\rho} \equiv T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho\nu},$$

то $T^{\mu\rho}$ тоже тензор, поскольку

$$\begin{aligned} T'^{\mu\rho} &= T'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho\nu} = \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\tau}} T^{\varkappa}{}_{\lambda}{}^{\eta\tau} = \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} T^{\varkappa}{}_{\lambda}{}^{\eta\lambda} = \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} T^{\varkappa\eta}. \end{aligned}$$

Эти три операции можно, конечно, объединять различным образом. Наиболее важная комбинированная операция приводит к *поднимании* или *опусканию* индексов. Если мы рассмотрим прямое произведение контравариантного или смешанного тензора T с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ и свернем индекс μ с одним из контравариантных индексов T, мы получим новый тензор, в котором этот контравариантный индекс μ заменен ковариантным индексом. Например, если $T^{\mu}{}_{\sigma}{}^{\rho}$ является тензором и мы вводим

$$S_{\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} \equiv g_{\mu\nu} T^{\mu\rho}{}_{\sigma},$$

то в соответствии с правилами Б и В, $S^{\rho}_{\nu\sigma}$ будет тензором. Точно так же, если мы возьмем прямое произведение ковариантного

или смешанного тензора T с обратным метрическим тензором $g^{\mu\nu}$ и свернем индекс μ с одним из ковариантных индексов T, мы получим новый тензор, в котором этот ковариантный индекс заменен контравариантным индексом ν. Например, если $S_\mu{}^\rho{}_\sigma$ является тензором и мы определяем

$$R^{\nu\rho}{}_\sigma \equiv g^{\mu\nu} S_\mu{}^\rho{}_\sigma,$$

то $R^{\nu\rho}{}_\sigma$ также тензор. Отметим, что опускание индекса, а затем поднимание его на прежнее место приводят к первоначальному тензору. Например, в разобранном уже выше случае мы опускали индекс у T, чтобы получить S, а затем поднимали его опять, чтобы получить R, а потому $R = T$, поскольку

$$R^{\nu\rho}{}_\sigma \equiv g^{\mu\nu} S_\mu{}^\rho{}_\sigma \equiv g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} T^{\lambda\rho}{}_\sigma = \delta^\nu_\lambda T^{\lambda\rho}{}_\sigma = T^{\nu\rho}{}_\sigma.$$

Поднимая и опуская индексы, можно записать тензор с N индексами 2^N различными способами. Так как все они физически эквивалентны, обычно используют один и тот же символ для всех 2^N тензоров, различая их только по положению индексов.

Полноты ради можно упомянуть, что тензор, полученный операцией поднимания одного из индексов метрического тензора $g_{\mu\nu}$ или опусканием индекса у обратного метрического тензора $g^{\mu\nu}$, есть в точности тензор Кронекера, поскольку

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu.$$

Точно так же, поднимание обоих индексов $g_{\mu\nu}$ дает обратный тензор

$$g^{\lambda\mu} g^{\varkappa\nu} g_{\mu\nu} = g^{\lambda\mu} \delta^\varkappa{}_\mu = g^{\lambda\varkappa},$$

а опускание обоих индексов у $g^{\lambda\varkappa}$ приводит к метрическому тензору $g_{\mu\nu}$.

Читатель, вероятно, заметил, что это обсуждение тензорной алгебры совершенно аналогично соответствующему обсуждению в главе по специальной теории относительности (см. § 5 гл. 2), за одним важным исключением: здесь мы не разбирали операцию дифференцирования. Дело в том, что производная тензора, вообще говоря, не является тензором. Мы увидим в § 6 этой главы, что имеется определенный вид дифференцирования, называемый ковариантным дифференцированием, который дает еще один способ построения тензоров из тензоров.

§ 4. Тензорные плотности

Несмотря на широкую применимость тензоров, в их правилах преобразования нет ничего таинственного. Один из важных примеров нетензорной величины — детерминант метрического тензора

$$g \equiv -\operatorname{Det} g_{\mu\nu}. \qquad (4.4.1)$$

Правило преобразования метрического тензора можно рассматривать как матричное уравнение

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}.$$

Вычисляя его детерминант, находим

$$g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g, \tag{4.4.2}$$

где $| \partial x/\partial x' |$ — *якобиан* преобразования $x' \to x$, т. е. детерминант матрицы $\partial x^\rho/\partial x'^\mu$. Величина типа g, преобразующаяся подобно скаляру, если не считать дополнительных множителей от якобиана, называется *скалярной плотностью*. Аналогично величина, которая преобразуется как тензор, но с дополнительными множителями от якобиана, называется *тензорной плотностью*. Число сомножителей $| \partial x'/\partial x |$ в детерминанте называется *весом плотности*. Например, из выражения (4.4.2) видно, что g является плотностью с весом -2, поскольку

$$\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-1}, \tag{4.4.3}$$

в чем мы можем убедиться, вычисляя детерминант уравнения

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu.$$

Любая тензорная плотность веса W может быть выражена как обычный тензор, умноженный на коэффициент $g^{-W/2}$. Например, тензорная плотность $\mathcal{T}^\mu{}_\nu$ веса W преобразуется по правилу

$$\mathcal{T}'^\mu{}_\nu = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^W \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\varkappa}{\partial x'^\nu} \mathcal{T}^\lambda{}_\varkappa. \tag{4.4.4}$$

Используя (4.4.2), находим

$$g'^{W/2} \mathcal{T}'^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\varkappa}{\partial x'^\nu} g^{W/2} \mathcal{T}^\lambda{}_\varkappa. \tag{4.4.5}$$

Важная роль тензорных плотностей определяется фундаментальной теоремой интегрального исчисления (см., например, [5]), состоящей в том, что при произвольном преобразовании координат $x \to x'$ элемент объема d^4x заменяется так:

$$d^4x' = \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| d^4x. \tag{4.4.6}$$

Следовательно, произведение d^4x на тензорную плотность с весом -1 преобразуется как обычный тензор. В частности, $\sqrt{g}d^4x$ является инвариантным элементом объема.

Существует тензорная плотность, элементы которой одни и те же во всех системах координат,— это тензорная плотность Леви-Чивита $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}$. Чтобы ввести эту величину в произвольной системе координат, расставим индексы координат в некотором произвольном, но определенном порядке, например x, y, z, t или r, θ, φ, t и т. п. Тогда $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}$ определяется следующим образом:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa} = \begin{cases} +1 & \text{при четной перестановке индексов,} \\ -1 & \text{при нечетной перестановке индексов,} \\ 0, & \text{если какая-нибудь пара индексов совпадает.} \end{cases} \tag{4.4.7}$$

Чтобы убедиться в том, что это та же тензорная плотность, рассмотрим величину

$$\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\varkappa}} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}. \tag{4.4.8}$$

Видно, что она полностью антисимметрична по индексам ρ, σ, η, ξ и, следовательно, пропорциональна $\varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}$. Чтобы найти коэффициент пропорциональности, предположим, что $\rho\sigma\eta\xi$ расставлены в нормальном порядке. Тогда (4.4.8) есть как раз детерминант $|\,\partial x'/\partial x\,|$, и

$$\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\varkappa}} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}. \tag{4.4.9}$$

Следовательно, $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}$ является тензорной плотностью веса -1. Можно образовать обычный контравариантный тензор, умножая $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}$ на $g^{-1/2}$. Можно также образовать ковариантную плотность, понижая ее индексы следующим образом:

$$\varepsilon_{\rho\sigma\eta\xi} \equiv g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} g_{\eta\lambda} g_{\xi\varkappa} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}. \tag{4.4.10}$$

Это выражение антисимметрично по индексам и, следовательно, пропорционально $\varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}$. Упорядочив $\rho\sigma\eta\xi$ в нормальную последовательность, найдем, что константа пропорциональности равняется $-g$, так что

$$\varepsilon_{\rho\sigma\eta\xi} = -g\varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}. \tag{4.4.11}$$

Читатель может легко убедиться в том, что $\varepsilon_{\rho\sigma\eta\xi}$ — ковариантная тензорная плотность веса -1.

Правила тензорной алгебры легко распространить и на тензорные плотности:

А. Сумма двух тензорных плотностей одинакового веса W есть тензорная плотность веса W.

Б. Прямое произведение двух тензорных плотностей с весами W_1 и W_2 дает тензорную плотность с весом $W_1 + W_2$.

В. Свертывание индексов у тензорной плотности веса W приводит к тензорной плотности веса W. Из правил Б и В следует, что поднимание и опускание индексов не изменяют веса тензорной плотности.

§ 5. Преобразование аффинной связности

Помимо рассмотренных довольно тривиальных тензорных плотностей, в физических законах фигурирует другая крайне важная нетензорная величина — аффинная связность. Напомним ее определение:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\, \partial x^{\nu}}. \tag{4.5.1}$$

Здесь $\xi^{\alpha}(x)$ — локально-инерциальные координаты. Переходя от x^{μ} в другую систему x'^{μ}, находим

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\, \partial x'^{\nu}} =$$

$$= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) =$$

$$= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau}\, \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}\, \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right].$$

Ссылаясь снова на определение (4.5.1), видим, что

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\, \partial x'^{\nu}}. \tag{4.5.2}$$

Первый член в правой части — это то, что возникало бы, если бы $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ была тензором; второй член неоднородный, делающий $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ нетензорной величиной.

Тензорный анализ позволяет самым простым образом установить связь между $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\varkappa}} g'_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\varkappa}} \left(g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right) =$$

$$= \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\varkappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\varkappa}\, \partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} +$$

$$+ g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\varkappa}\, \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}},$$

а потому

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} g'_{\varkappa\nu} + \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} g'_{\varkappa\mu} - \frac{\partial}{\partial x'^{\varkappa}} g'_{\mu\nu} =$$

$$= \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\varkappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \right) +$$

$$+ 2 g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\varkappa}} .$$

Отсюда следует

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}' = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \tau\sigma \end{matrix} \right\} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} , \qquad (4.5.3)$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\varkappa} \left[\frac{\partial g_{\varkappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\varkappa\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} \right] . \qquad (4.5.4)$$

Вычитая (4.5.3) из (4.5.2), видим, что величина $\left[\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \right]$ является *тензором*, поскольку

$$\left[\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \right]' = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left[\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \tau\sigma \end{matrix} \right\} \right] . \qquad (4.5.5)$$

Принцип эквивалентности говорит нам тогда, что существует специальная система координат ξ_X, в которой в данной точке X эффекты гравитации отсутствуют. В этой системе на свободные частицы не действуют никакие гравитационные силы, а потому в ней исчезает $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, а также не может возникать никакого гравитационного красного смещения для бесконечно близких точек, так что исчезают и первые производные $g_{\mu\nu}$. Поскольку величина $[\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \{^{\rho}_{\tau\sigma}\}]$ равна нулю в локально-инерциальной системе координат и поскольку эта величина является тензором, она должна исчезать во всех системах координат, следовательно,

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \qquad (4.5.6)$$

Приведем на всякий случай другое выражение для неоднородного члена в правиле преобразования $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Продифференцируем тождество

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\lambda}_{\nu}$$

по x'^{μ}. Из этого сразу последует

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} . \qquad (4.5.7)$$

Поэтому (4.5.2) можно записать в виде

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}\, \partial x^{\sigma}}. \qquad (4.5.8)$$

Это как раз то, что мы получили бы, выполнив обратное преобразование $x' \to x$ и разрешив полученное равенство относительно $\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Теперь мы в состоянии использовать принцип общей ковариантности, чтобы дать еще одно доказательство того, что свободно падающая частица подчиняется следующему уравнению движения:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} = 0, \qquad (4.5.9)$$

где

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}. \qquad (4.5.10)$$

Прежде всего заметим, что уравнения (4.5.9) и (4.5.10) справедливы в отсутствие гравитации, поскольку при $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$ и $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = 0, \qquad d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu},$$

а это совпадает с уравнениями, которые описывают свободную частицу в специальной теории относительности. Далее заметим, что (4.5.9) и (4.5.10) инвариантны при произвольных преобразованиях координат, поскольку

$$\frac{d^2x'^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{d^2x^{\nu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}\, \partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}$$

тогда как (4.5.8) приводит к равенству

$$\Gamma'^{\mu}_{\sigma\tau} \frac{dx'^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx'^{\tau}}{d\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}\, \partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}.$$

Складывая эти два уравнения, находим, что левая часть уравнения (4.5.9) является вектором, т. е.

$$\frac{d^2x'^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx'^{\nu}}{d\tau} \frac{dx'^{\lambda}}{d\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} \left(\frac{d^2x^{\varkappa}}{d\tau^2} + \Gamma^{\varkappa}_{\sigma\rho} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau}\right). \qquad (4.5.11)$$

Таким образом, уравнение (4.5.9), так же как (4.5.10), оказывается явно ковариантным. Принцип общей ковариантности говорит нам тогда, что соотношения (4.5.9) и (4.5.10) справедливы в произвольных гравитационных полях, поскольку они *действительно* выпол-

няются в локально-инерциальных системах. Напомним аналогичное положение из § 1 этой главы, которое утверждает, что соотношения справедливы во всех системах координат, если они справедливы в какой-нибудь одной системе.

§ 6. Ковариантное дифференцирование

Мы уже отмечали, что дифференцирование тензора, вообще говоря, приводит не к тензору. Рассмотрим, например, контравариантный вектор V^μ, правило преобразования которого есть

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu.$$

Дифференцирование по x'^λ дает

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu. \tag{4.6.1}$$

Первый член в правой части здесь совпадает с тем, что возникло бы, если бы выражение $\partial V^\mu/\partial x^\lambda$ было тензором, но второй член нарушает тензорный характер $\partial V'^\mu/\partial x'^\lambda$.

Хотя $\partial V^\mu/\partial x^\lambda$ не является тензором, с его помощью можно построить тензор. Используя уравнение (4.5.8), находим, что

$$\Gamma'^\mu_{\lambda\varkappa} V'^\varkappa = \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\varkappa} \Gamma^\nu_{\rho\sigma} - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\varkappa} \right] \frac{\partial x'^\varkappa}{\partial x^\eta} V^\eta =$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\nu_{\rho\sigma} V^\sigma - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\sigma. \tag{4.6.2}$$

Складывая (4.6.1) и (4.6.2), видим, что неоднородные члены уничтожаются, и получаем

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda\varkappa} V'^\varkappa = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\nu_{\rho\sigma} V^\sigma \right). \tag{4.6.3}$$

Таким образом, мы пришли к определению *ковариантной производной*

$$V^\mu{}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\varkappa} V^\varkappa, \tag{4.6.4}$$

и (4.6.3) говорит о том, что $V^\mu{}_{;\lambda}$ есть тензор, поскольку

$$V'^\mu{}_{;\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu{}_{;\rho}.$$

Мы можем также определить ковариантную производную от ковариантного вектора V_μ. Вспомним правило преобразования

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} V_\rho.$$

Дифференцируя это соотношение по x'^ν, получаем

$$\frac{\partial V'_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial V_\rho}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} V_\rho. \tag{4.6.5}$$

Далее из (4.5.2) следует, что

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} V'_\lambda = \left[\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\tau_{\rho\sigma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \right] \frac{\partial x^\varkappa}{\partial x'^\lambda} V_\varkappa =$$

$$= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\varkappa_{\rho\sigma} V_\varkappa + \frac{\partial^2 x^\varkappa}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} V_\varkappa. \tag{4.6.6}$$

Если вычесть (4.6.6) из (4.6.5), неоднородные члены сократятся, и мы получим

$$\frac{\partial V'_\mu}{\partial x'^\nu} - \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} V'_\lambda = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\varkappa_{\rho\sigma} V_\varkappa \right). \tag{4.6.7}$$

Таким образом, мы ввели определение ковариантной производной от ковариантного вектора

$$V_{\mu;\,\nu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda, \tag{4.6.8}$$

и выражение (4.6.7) говорит нам, что $V_{\mu;\,\nu}$ является тензором, поскольку

$$V'_{\mu;\,\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} V_{\rho;\,\sigma}. \tag{4.6.9}$$

Способ распространения этих определений на случай общего вида тензора очевиден. Ковариантная производная по x^ρ от тензора T : : : равна ∂T : : :/∂x^ρ плюс, для каждого контравариантного индекса μ, член, равный $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$, умноженный на T, где μ заменено на ν, минус, для каждого ковариантного индекса λ, член $\Gamma^\varkappa_{\lambda\rho}$, умноженный на T, где λ заменено на $\varkappa$, т. е.

$$T^{\mu\sigma}{}_{\lambda;\,\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\mu\sigma}{}_\lambda + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\nu\sigma}{}_\lambda + \Gamma^\sigma_{\rho\nu} T^{\mu\nu}{}_\lambda - \Gamma^\varkappa_{\lambda\rho} T^{\mu\sigma}{}_\varkappa. \tag{4.6.10}$$

Легко убедиться в том, что это действительно тензор.

Можно также распространить операцию ковариантного дифференцирования на тензорные плотности. Простейший способ добиться этого связан с учетом следующего факта: если $\mathscr{T}$ — тензорная плотность веса W, то $g^{W/2}\mathscr{T}$ является обычным тензором. Его

ковариантная производная — это также тензор, а умножая его на $g^{-W/2}$, мы снова получаем тензорную плотность веса W. Следовательно, ковариантная производная тензорной плотности веса W определяется следующим образом:

$$\mathscr{T}\,\vdots\vdots\vdots_{;\rho} \equiv g^{-W/2}\,(g^{W/2}\mathscr{T}\,\vdots\vdots\vdots)_{;\rho} \tag{4.6.11}$$

и уже не возникает необходимости проверять, что это действительно тензорная плотность веса W. Итог таков: ковариантная производная по x^ρ от тензорной плотности $\mathscr{T}$ веса W образуется как раз так, как если бы $\mathscr{T}$ являлось обычным тензором, за исключением того, что мы вводим дополнительный член $(W/2g)\,\mathscr{T}\,\vdots\vdots\vdots\,(\partial g/\partial x^\rho)$. Например,

$$\mathscr{T}^{\mu}{}_{\lambda;\,\rho} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\rho}\mathscr{T}^{\mu}{}_{\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu}\mathscr{T}^{\nu}{}_{\lambda} - \Gamma^{\varkappa}_{\lambda\rho}\mathscr{T}^{\mu}{}_{\varkappa} + \frac{W}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^\rho}\mathscr{T}^{\mu}{}_{\lambda}. \tag{4.6.12}$$

Комбинирование ковариантного дифференцирования с алгебраическими операциями, введенными в § 3 этой главы, приводит к действиям, аналогичным обычному дифференцированию. В частности:

А. Ковариантная производная суммы тензоров (с постоянными коэффициентами) равна сумме ковариантных производных от каждого тензора. Например, если α и β — константы, то

$$(\alpha A^{\mu}{}_{\nu} + \beta B^{\mu}{}_{\nu})_{;\lambda} = \alpha A^{\mu}{}_{\nu;\,\lambda} + \beta B^{\mu}{}_{\nu;\,\lambda}. \tag{4.6.13}$$

Б. Ковариантная производная прямого произведения тензоров подчиняется правилу Лейбница. Например,

$$(A^{\mu}{}_{\nu}B^{\lambda})_{;\rho} = A^{\mu}{}_{\nu;\,\rho}B^{\lambda} + A^{\mu}{}_{\nu}B^{\lambda}{}_{;\rho}. \tag{4.6.14}$$

В. Ковариантная производная свернутого тензора есть свертка ковариантной производной. Например, полагая $\sigma = \lambda$ в выражении (4.6.10), получаем

$$T^{\mu\lambda}{}_{\lambda;\,\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho}T^{\mu\lambda}{}_{\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu}T^{\nu\lambda}{}_{\lambda}, \tag{4.6.15}$$

причем последние два члена в (4.6.10) сократились.

Заметим также, что ковариантная производная метрического тензора равна нулю, поскольку она исчезает в локально-инерциальных координатах, где исчезают $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ и $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda$, а тензор, равный нулю в одной системе, равен нулю во всех системах. Этот же результат можно получить более простым способом, если заметить, что

$$g_{\mu\nu;\,\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}g_{\rho\mu}.$$

Из уравнения (3.3.1) следует, что эта величина исчезает:

$$g_{\mu\nu;\,\lambda} = 0. \tag{4.6.16}$$

(Это рассуждение можно обратить, и получить еще один вывод соотношения между $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$.) Точно таким же способом можно показать, что ковариантные производные других видов от метрического тензора также исчезают, т. е. что

$$g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0, \tag{4.6.17}$$

$$\delta^{\mu}_{\nu;\,\lambda} = 0. \tag{4.6.18}$$

Из (4.6.16) — (4.6.18) следует, что операции ковариантного дифференцирования и поднимания-опускания индексов коммутируют; например,

$$(g^{\mu\nu}V_{\nu})_{;\lambda} = g^{\mu\nu}V_{\nu;\,\lambda}. \tag{4.6.19}$$

Важность операции ковариантного дифференцирования вытекает из следующих *двух* ее свойств: она преобразует одни тензоры в другие и сводится к обычному дифференцированию в отсутствие гравитации, т. е. когда $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$. Эти свойства дают следующий алгоритм введения эффектов гравитации в физических системах. *Следует написать соответствующее уравнение специальной теории относительности, справедливое в отсутствие гравитации, затем заменить* $\eta_{\mu\nu}$ *на* $g_{\mu\nu}$, *а все производные — на ковариантные производные.* Полученное уравнение будет общековариантным, справедливым в отсутствие гравитации и, следовательно, согласно принципу общей ковариантности, оно будет справедливо и при наличии гравитационных полей при условии, что рассматриваемый пространственно-временной масштаб всегда достаточно мал по сравнению с масштабом гравитационного поля.

§ 7. Градиент, ротор и дивергенция

Существуют частные случаи, когда ковариантная производная имеет особенно простую форму. Простейший из них, конечно, ковариантная производная от скаляра, которая совпадает в действительности с обычным градиентом:

$$S_{;\mu} = \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}. \tag{4.7.1}$$

Другой простой частный случай — это ковариантный ротор. Напомним, что по определению

$$V_{\mu;\,\nu} \equiv \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}V_{\lambda}.$$

Так как $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ симметрично по μ и ν, то ковариантный ротор совпадает с обычным ротором

$$V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu}. \tag{4.7.2}$$

Еще один специальный случай, немного более сложный,— это ковариантная дивергенция контравариантного вектора

$$V^{\mu}_{\ ;\mu} \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} V^\lambda. \tag{4.7.3}$$

Заметим, что

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\rho} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda}. \tag{4.7.4}$$

Это легко вычислить, если вспомнить, что для произвольной матрицы M

$$\mathrm{Sp} \left\{ M^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x^\lambda} M(x) \right\} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ln \mathrm{Det}\, M(x), \tag{4.7.5}$$

где Det означает детерминант, а Sp — след, т. е. сумму диагональных элементов. Чтобы доказать (4.7.5), рассмотрим вариацию Det M при смещении x^λ на δx^λ:

$$\delta \ln \mathrm{Det}\, M \equiv \ln \mathrm{Det}\,(M + \delta M) - \ln \mathrm{Det}\, M =$$

$$= \ln \frac{\mathrm{Det}\,(M+\delta M)}{\mathrm{Det}\, M} = \ln \mathrm{Det}\, M^{-1}(M + \delta M) =$$

$$= \ln \mathrm{Det}\,(1 + M^{-1}\delta M) \to \ln (1 + \mathrm{Sp}\, M^{-1}\delta M) \to \mathrm{Sp}\, M^{-1}\delta M.$$

Введение коэффициента δx^λ с обеих сторон этого выражения приводит к соотношению (4.7.5). Применяя теперь (4.7.5) в случае, когда M есть матрица $g_{\rho\mu}$, находим с помощью (4.7.4), что

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ln g = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \sqrt{g}. \tag{4.7.6}$$

Из (4.7.3) тогда следует, что ковариантная производная равна просто

$$V^{\mu}_{\ ;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{g} V^\mu. \tag{4.7.7}$$

Прямое следствие этого — ковариантная форма теоремы Гаусса: если V^μ исчезает на бесконечности, то

$$\int d^4x \sqrt{g}\, V^{\mu}_{\ ;\mu} = 0. \tag{4.7.8}$$

Отметим здесь появление коэффициента $\sqrt{g}$, который делает величину $d^4x\sqrt{g}$ инвариантной.

Можно также использовать (4.7.6) для упрощения формулы ковариантной дивергенции тензора. Например,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} \equiv \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda},$$

и, применяя (4.7.6), находим

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda}. \tag{4.7.9}$$

В частном случае $T^{\mu\lambda} = -T^{\lambda\mu}$ последний член исчезает, так что

$$A^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} A^{\mu\nu}), \tag{4.7.10}$$

когда $A^{\mu\nu}$ антисимметричен.

Есть другой частный случай, также достаточно важный. Ковариантная производная ковариантного тензора $A_{\mu\nu}$ равна

$$A_{\mu\nu;\,\lambda} \equiv \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} A_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} A_{\mu\rho}.$$

Предположим, что $A_{\mu\nu}$ антисимметричен, т. е.

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}.$$

Если к $A_{\mu\nu;\,\lambda}$ дважды прибавить тот же самый тензор с циклически переставленными индексами, мы найдем ввиду симметрии $\Gamma^\rho_{\mu\lambda}$ и антисимметрии $A_{\rho\nu}$, что все Г-члены сократятся и для антисимметричного A

$$A_{\mu\nu;\,\lambda} + A_{\lambda\mu;\,\nu} + A_{\nu\lambda;\,\mu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial A_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}. \tag{4.7.11}$$

§ 8. Векторный анализ в ортогональных координатах *

Читатель может спросить, как связан аппарат тензорного анализа, изложенный в этой главе, с известными формулами для градиента ротора и дивергенции в классических криволинейных системах координат. Эти трехмерные системы координат характеризуются условием, что g_{ij} диагонален, т. е.

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{4.8.1}$$

где h_i — некая функция координат (см., например, [6]). (Условимся суммировать по повторяющимся индексам на протяжении

*) Этот параграф лежит несколько в стороне от основной темы книги и может быть опущен при первом чтении.

всего этого параграфа.) Тогда обратный метрический тензор равен

$$g^{ij} = h_i^{-2}\delta_{ij}. \tag{4.8.2}$$

Инвариантная собственная длина при этом выглядит так:

$$ds^2 \equiv \sum_{i,j} g_{ij}\,dx^i\,dx^j = h_1^2\,(dx^1)^2 + h_2^2\,(dx^2)^2 + h_3^2\,(dx^3)^2, \tag{4.8.3}$$

а инвариантный элемент объема записывается следующим образом:

$$dV \equiv (\mathrm{Det}\, g)^{1/2}\,dx^1\,dx^2\,dx^3 = h_1h_2h_3\,dx^1\,dx^2\,dx^3. \tag{4.8.4}$$

То, что обычно называют компонентами вектора $\mathbf{V}$ при элементарных рассмотрениях, не является ковариантными компонентами V_i или контравариантными компонентами V^i, а есть «обычные» компоненты

$$\overline{V}_i \equiv h_iV^i = h_i^{-1}V_i. \tag{4.8.5}$$

Тогда скалярное произведение двух векторов записывается очень просто:

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{U} \equiv \sum_{ij} g_{ij}V^iU^j = \overline{V}_1\overline{U}_1 + \overline{V}_2\overline{U}_2 + \overline{V}_3\overline{U}_3. \tag{4.8.6}$$

Это, конечно, и заставляет выбрать определение в виде (4.8.5).] Однако градиент скаляра выглядит теперь несколько сложнее:

$$\nabla_i S \equiv \overline{S_{;i}} = h_i^{-1}\,\frac{\partial S}{\partial x^i}. \tag{4.8.7}$$

Ротор вектора V также иначе выглядит в «обычных» компонентах:

$$(\nabla\times\mathbf{V})_i \equiv h_i \sum_{jk} (\mathrm{Det}\, g)^{-1/2}\,\varepsilon^{ijk}V_{j;\,k} =$$

$$= h_i \sum_{ij} (h_1h_2h_3)^{-1}\,\varepsilon^{ijk}\,\frac{\partial}{\partial x^j}\,h_k\overline{V}_k. \tag{4.8.8}$$

[Мы использовали (4.7.2), поскольку ε^{ijk} антисимметричен по j и k.] Например, первая компонента ротора равна

$$(\nabla\times\mathbf{V})_1 = \frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\,h_3\overline{V}_3 - \frac{\partial}{\partial x^3}\,h_2\overline{V}_2\right). \tag{4.8.9}$$

Дивергенция вектора V есть не что иное, как ковариантная дивергенция (4.7.7):

$$\nabla\cdot\mathbf{V} \equiv \sum_i V^i{}_{;i} = (\mathrm{Det}\, g)^{-1/2} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\,(\mathrm{Det}\, g)^{1/2}\,V^i =$$

$$= (h_1h_2h_3)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\,h_2h_3\overline{V}_1 + \frac{\partial}{\partial x^2}\,h_1h_3\overline{V}_2 + \frac{\partial}{\partial x^3}\,h_1h_2\overline{V}_3\right). \tag{4.8.10}$$

Лапласиан скалярной величины S равняется дивергенции ее градиента

$$\nabla^2 S \equiv \sum_{ij} (g^{ij} S_{;i})_{;j}, \tag{4.8.11}$$

или, объединяя (4.8.10) с (4.8.7), получаем

$$\nabla^2 S \equiv (h_1 h_2 h_3)^{-1} \times \times \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial S}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial S}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial S}{\partial x^3} \right]. \tag{4.8.12}$$

Читателю самому нетрудно убедиться в том, что если h_i задаются соответствующими формулами в сферических или цилиндрических координатах, то получаются обычные формулы для градиента, ротора, дивергенцяи и лапласиана.

§ 9. Ковариантное дифференцирование вдоль кривой

В этой главе до сих пор рассматривались тензорные поля, определенные во всем пространстве-времени. Теперь мы рассмотрим тензоры $T(\tau)$, определенные вдоль кривой $x^\mu(\tau)$. Приходят на память очевидные примеры: импульс $P^\mu(\tau)$ и спин $S_\mu(\tau)$ отдельной частицы. Для таких тензоров, конечно, бессмысленно говорить о ковариантном дифференцировании по x^μ, но мы можем определить ковариантную производную по инвариантной величине τ, с помощью которой параметризована кривая.

Сначала рассмотрим контравариантный вектор $A^\mu(\tau)$, преобразующийся по правилам:

$$A'^\mu(\tau) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(\tau). \tag{4.9.1}$$

Следует отметить, что частная производная $\partial x'^\mu / \partial x^\nu$ вычисляется при $x^\nu = x^\nu(\tau)$, так что она зависит от τ. Следовательно, дифференцируя по τ, мы получаем два члена

$$\frac{dA'^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dA^\nu(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu(\tau). \tag{4.9.2}$$

Вторая производная $\partial^2 x'^\mu / \partial x^\nu \partial x^\lambda$ аналогична тому члену, который нарушает однородность правила преобразования (4.5.8) аффинной связности, так что мы можем определить ковариантную производную вдоль кривой $x^\mu(\tau)$ следующим образом:

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu. \tag{4.9.3}$$

Тогда выражения (4.5.8), (4.9.1) и (4.9.2) показывают, что эта величина является вектором, поскольку

$$\frac{DA'^{\mu}}{D\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{DA^{\nu}}{D\tau}. \tag{4.9.4}$$

Сходство формул (4.9.3) и (4.6.4) для ковариантной производной векторого поля очевидно.

Аналогичное рассмотрение позволяет ввести ковариантную производную вдоль кривой $x^{\mu}(\tau)$ для ковариантного вектора $B_{\mu}(\tau)$:

$$\frac{DB_{\mu}}{D\tau} = \frac{dB_{\mu}}{d\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} B_{\lambda}. \tag{4.9.5}$$

Выражение (4.5.2) позволяет убедиться в том, что найденная величина действительно вектор

$$\frac{DB'_{\mu}}{D\tau} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{DB_{\nu}}{D\tau}. \tag{4.9.6}$$

Точно таким же образом ковариантная производная вдоль кривой $x^{\mu}(\tau)$ от произвольного тензора $T(\tau)$ определяется добавлением к $dT/d\tau$ члена, такого как в (4.9.3), для каждого верхнего индекса и вычитанием аналогичного члена в (4.9.5) для каждого нижнего индекса. Например,

$$\frac{DT^{\mu}{}_{\nu}}{D\tau} \equiv \frac{dT^{\mu}{}_{\nu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} T^{\rho}{}_{\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} T^{\mu}{}_{\sigma} \tag{4.9.7}$$

и

$$\frac{DT'^{\mu}{}_{\nu}}{D\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{DT^{\rho}{}_{\sigma}}{D\tau}. \tag{4.9.8}$$

Свойства ковариантного дифференцирования, кратко изложенные в § 6—8, могут быть легко распространены на случай дифференцирования вдоль кривой.

Следует упомянуть, что ковариантная производная тензорного *поля* вдоль кривой может быть введена с помощью обычной ковариантной производной этого поля; например, если T^{μ}_{ν} — тензорное *поле*, тогда (4.9.6) приводит к выражению

$$\frac{DT^{\mu}{}_{\nu}}{D\tau} = T^{\mu}{}_{\nu;\,\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau}. \tag{4.9.9}$$

Однако в гл. 6 мы увидим, что тензоры, заданные на кривых, не всегда могут быть обобщены на тензорные поля; для них производная $D/D\tau$ есть единственная возможная ковариантная производная.

Часто рассматривается случай, когда вектор $A^{\mu}(\tau)$, переносимый вдоль кривой частицей, не меняется с изменением τ, если частица рассматривается в системе отсчета $\xi_{x(\tau)}$, т. е. локаль-

но-инерциальной на $x(\tau)$. (Это выполняется для импульса и спина частицы, если на нее воздействуют только гравитационные силы; см. § 1 гл. 5.) В этой системе отсчета аффинная связность, а также $dA^\mu/d\tau$ исчезают, так что

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = 0. \tag{4.9.10}$$

Будучи ковариантным, это утверждение справедливо на $x(\tau)$ в локально-инерциальной системе $\xi_{x(\tau)}$ и, следовательно, справедливо во всех системах координат. Тогда вектор A^μ подчиняется дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau}A^\nu, \tag{4.9.11}$$

которое определяет A^μ для всех τ, если A^μ задано при некотором начальном τ. В этом случае говорят, что вектор $A^\mu(\tau)$ на кривой $x^\mu(\tau)$ задается с помощью *параллельного переноса*. Таким способом можно задать на кривой любой тензор, потребовав, чтобы его ковариантная производная вдоль кривой исчезала.

§ 10. Аналогия с электродинамикой *

В § 1 этой главы подчеркивалось, что общая ковариантность не является обычным принципом симметрии, в отличие от лоренц-инвариантности, а есть скорее динамический принцип, позволяющий ввести гравитационные поля. Сам по себе он имеет сильное сходство с другой «динамической симметрией» — локальной калибровочной инвариантностью, которой подчиняются эффекты электромагнитных полей. Локальная калибровочная инвариантность гласит, что дифференциальные уравнения, удовлетворяемые набором заряженных полей $\psi(x)$ и электромагнитным потенциалом $A_\alpha(x)$, сохраняют свою форму, если эти поля подвергают преобразованию (см., например, [6]):

$$\psi(x) \to \psi(x)\, e^{ie\varphi(x)}, \tag{4.10.1}$$

$$A_\alpha(x) \to A_\alpha(x) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\varphi(x), \tag{4.10.2}$$

где e — заряд частицы, представленной полями ψ, а $\varphi(x)$ — произвольная функция пространственно-временных координат x^α. Как построить калибровочно-инвариантные уравнения? Заметим, что производные заряженного поля ψ ведут себя при калибровочных преобразованиях не так, как само ψ, а следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\psi(x) \to \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\psi(x)\, e^{ie\varphi(x)}\right] = e^{ie\varphi(x)}\left[\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\alpha} + ie\psi(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\alpha}\right].$$

*) Этот и следующий параграфы лежат несколько в стороне от основной линии книги и могут быть опущены при первом чтении.

Аналогичным образом производные тензоров не ведут себя как тензоры при произвольных преобразованиях координат. Из этого следует, что уравнение, такое, как

$$(\Box^2 - m^2)\,\psi(x) = 0$$

где

$$\Box^2 \equiv \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta};$$

не является калибровочно-инвариантным, как не является оно и общековариантным. Заметим еще, что электромагнитный потенциал $A_\mu(x)$ подчиняется неоднородному калибровочному преобразованию, точно так же, как аффинная связность преобразуется с помощью неоднородного правила преобразования (4.5.2) при произвольных преобразованиях координат. В тензорном анализе мы прибавляли к производным тензоров члены, содержащие аффинную связность, чтобы образовать «ковариантные производные», которые преобразуются, подобно тензорам. В электродинамике мы прибавляем к производной от поля вектор-потенциал, чтобы образовать «калибровочно-ковариантную производную»:

$$\mathscr{D}_\alpha\psi(x) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - ieA_\alpha(x)\right]\psi(x), \tag{4.10.3}$$

которая преобразуется как само поле

$$\mathscr{D}_\alpha\psi(x) \to [\mathscr{D}_\alpha\psi(x)]\,e^{ie\varphi(x)}. \tag{4.10.4}$$

Уравнение, инвариантное при калибровочных преобразованиях с постоянным φ (такая инвариантность равносильна просто сохранению заряда), будет инвариантно и при калибровочном преобразовании (4.10.1), (4.10.2), если в это уравнение входят только поля $\psi(x)$ и их калибровочно-ковариантные производные $\mathscr{D}_\alpha\psi(x)$. Аналогично этому, уравнение, инвариантное при преобразованиях Лоренца, инвариантно при произвольных преобразованиях координат, если оно составлено лишь из тензоров и их ковариантных производных. Например, мы можем написать калибровочно-инвариантное уравнение, которое описывает взаимодействие заряженного скалярного поля $\psi(x)$ с электромагнитным в виде

$$[\eta^{\alpha\beta}\mathscr{D}_\alpha\mathscr{D}_\beta + m^2]\,\psi(x) = 0, \tag{4.10.5}$$

или, более подробно,

$$\left(\Box^2 - 2ieA^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - ie\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} - e^2A^\alpha A_\alpha + m^2\right)\psi(x) = 0.$$

Одно из важных свойств таких теорий — это то, что они позволяют ввести сохраняющиеся калибровочно-инвариантные токи; в рас-

сматриваемом примере мы можем определить

$$J_\alpha(x) \equiv -ie\{\psi^\dagger(x)\,\mathscr{D}_\alpha\psi(x) - \psi(x)\,[\mathscr{D}_\alpha\psi(x)]^\dagger\}.$$

(«Кинжал» означает комплексное сопряжение, а в квантовой теории—эрмитово сопряжение.) Свойство калибровочной инвариантности очевидно; а для того чтобы убедиться, что $J_\alpha(x)$ сохраняется, вычислим величину

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}J^\alpha(x) = -ie\Big\{&\frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\alpha} - ieA^\alpha(x)\,\psi(x)\Big) - \\ &-\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial x^\alpha} + ieA^\alpha(x)\,\psi^\dagger(x)\Big) + \\ &+\psi^\dagger(x)\,(\mathscr{D}^\alpha + ieA^\alpha(x))\,\mathscr{D}_\alpha\psi(x) - \\ &-\psi(x)\,[(\mathscr{D}^\alpha + ieA^\alpha(x))\,\mathscr{D}_\alpha\psi(x)]^\dagger\Big\} = \\ &= \psi^\dagger(x)\,\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha\psi(x) - \psi(x)\,[\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha\psi(x)]^\dagger.\end{aligned}$$

Подставляя сюда (4.10.5), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}J^\alpha(x) = 0.$$

Можно, следовательно, подставить этот ток в правую часть уравнения Максвелла (2.7.6), и уравнение при этом останется калибровочно-инвариантным. В гл. 7 мы покажем, что уравнения поля гравитации выводятся аналогичным образом.

Можно распространить эту аналогию между калибровочной инвариантностью электродинамики и общей ковариантностью теории относительности на сходную симметрию, называемую киральной (см. [4]). Такая симметрия характерна для взаимодействия π-мезонов, однако надлежащее разъяснение этого вопроса могло бы составить содержание еще одной книги.

§ 11. p-формы и внешние производные *

Антисимметричные тензоры и их антисимметризованные производные обладают рядом замечательно простых и полезных свойств; с частью из них мы уже познакомились в § 7 этой главы. Чтобы описать эти свойства единым образом, математики развили общий формализм, известный как *теория дифференциальных форм* [1]). К сожалению, слишком абстрактные и сокращенные обозначения, используемые в этом формализме, серьезно затрудняли в последние годы общение между «чистыми» математиками и физиками. В этом параграфе будут изложены фундаментальные результаты

[1]) Для лучшего понимания материала по теории дифференциальных форм см., например, [8].

теории дифференциальных форм, однако в тензорных обозначениях, знакомых физикам, а не в малопонятных обозначениях, применяемых математиками.

Ковариантный тензор ранга p, антисимметричный при перестановке любой пары индексов, назовем *p-формой*. В пространстве n измерений число алгебраически независимых компонент p-формы равно биномиальному коэффициенту:

$$\binom{n}{p} \equiv \frac{n!}{p!\,(n-p)!}. \tag{4.11.1}$$

Например, скалярное поле есть 0-форма, ковариантное векторное поле — 1-форма, а антисимметричный ковариантный тензор с двумя индексами — 2-форма.

Линейная комбинация p-форм является также p-формой. Однако прямое произведение $s_{\mu\nu\ldots}t_{\rho\sigma\ldots}$ p-формы $s_{\mu\nu\ldots}$ и q-формы $t_{\rho\sigma\ldots}$ *не будет* $(p+q)$-формой, поскольку оно не полностью антисимметрично. Можно образовать $(p+q)$-форму $s \wedge t$, антисимметризуя прямое произведение:

$$(s \wedge t)_{\mu_1\ldots\mu_{p+q}} \equiv \text{Antisym} \times \{s_{\mu_1\ldots\mu_p} t_{\mu_{p+1}\ldots\mu_{p+q}}\}. \tag{4.11.2}$$

Слово «Antisym» будет всегда обозначать среднее по всем перестановкам (П) индексов:

$$\text{Antisym}\{u_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}\} \equiv \frac{1}{m!} \sum_{\text{П}} \delta_{\text{П}} u_{\mu_{\text{П}1}\mu_{\text{П}2}\ldots\mu_{\text{П}m}}. \tag{4.11.3}$$

Здесь $\delta_{\text{П}}$ — знаковая функция, равная $+1$ или -1 в зависимости от того, содержит ли П четное или нечетное число перестановок отдельных пар индексов:

$$\delta_{\text{П}} \equiv \begin{cases} +1, & \text{П четное}, \\ -1, & \text{П нечетное}. \end{cases} \tag{4.11.4}$$

Антисимметризованное прямое произведение (4.11.2) называется *внешним произведением*. Например, внешнее произведение 0-формы s и 1-формы t_μ является обычным произведением

$$(s \wedge t)_\mu \equiv s t_\mu,$$

в то время как внешнее произведение 1-формы s_μ и 1-формы t_ν есть 2-форма:

$$(s \wedge t)_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(s_\mu t_\nu - s_\nu t_\mu).$$

Читатель может легко убедиться сам, что внешнее произведение *ассоциативно*:

$$(s \wedge t) \wedge u = s \wedge (t \wedge u) \tag{4.11.5}$$

и *билинейно*:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2) \wedge t &= \alpha_1 (s_1 \wedge t) + \alpha_2 (s_2 \wedge t), \\ s \wedge (\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) &= \alpha_1 (s \wedge t_1) + \alpha_2 (s \wedge t_2). \end{aligned} \tag{4.11.6}$$

Здесь α_1 и α_2 — скаляры. Внешнее произведение, однако, некоммутативно; так, если s есть p-форма, а t есть q-форма, то

$$(s \wedge t) = (-1)^{pq} (t \wedge s). \tag{4.11.7}$$

Здесь стоит остановиться и заметить, что в книгах по математической теории дифференциальных форм [1]) p-форму t, вообще говоря, представляют не тензорными компонентами $t_{\mu\nu} \ldots$, а «дифференциальной формой»

$$\omega \equiv t_{\mu\nu} \ldots (dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \ldots).$$

Символ dx^μ означает здесь величину, которая преобразуется как бесконечно малое смещение координат, т. е. как контравариантный вектор; произведения их в отличие от произведений смещений обладают свойствами ассоциативности и *антикоммутативности*:

$$(dx^\mu \wedge dx^\nu) \wedge dx^\lambda = dx^\mu \wedge (dx^\nu \wedge dx^\lambda),$$
$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu.$$

Произведение $\omega_1 \wedge \omega_2$ дифференциальных форм ω_1 и ω_2 имеет тензорные коэффициенты, которые совпадают с внешними произведениями тензорных коэффициентов $t_{\mu\nu} \ldots$ форм ω_1 и ω_2. Свойства ассоциативности и коммутативности (4.11.5) и (4.11.7) внешнего произведения тогда вытекают тривиальным образом из соответствующих свойств произведения $dx^\mu \wedge dx^\nu$. Как уже было сказано, мы не будем пользоваться этим аппаратом; для нас p-форма будет просто антисимметричным тензором безотносительно к соответствующей дифференциальной форме.

Целесообразность развития теории p-форм в независимости от остального тензорного анализа возникает, когда мы изучаем их производные. Оператор частной производной $\partial/\partial x^\mu$ является ковариантным вектором или, другими словами, 1-формой, так что для любой заданной p-формы t можно определить $(p+1)$-форму Dt, называемую *внешней производной* от t, беря просто внешнее произведение $\partial/\partial x$ на t:

$$Dt \equiv \frac{\partial}{\partial x} \wedge t, \tag{4.11.8}$$

или, подробнее,

$$(Dt)_{\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} \equiv \text{Antisym} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} t_{\mu_2 \ldots \mu_{p+1}} \right\}. \tag{4.11.9}$$

Например, внешняя производная 0-формы t есть просто обычный градиент:

$$(Dt)_\mu = \frac{\partial t}{\partial x^\mu},$$

[1]) Оптимальным руководством для понимания теории дифференциальных форм является книга [8].

а внешняя производная 1-формы t_μ — просто ротор:

$$(Dt)_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial t_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial t_\mu}{\partial x^\nu}\right).$$

При размерности, равной *трем*, внешняя производная 2-формы t_{ij} сводится к обычной дивергенции:

$$(Dt)_{ijk} = \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial t_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial t_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x^3}\right).$$

Первое замечательное свойство внешней производной — то, что, действуя на тензорную p-форму, она дает *тензорную* $(p+1)$-форму. Самый простой способ убедиться в этом — заметить, что частные производные, используемые при определении внешней производной, можно заменить ковариантными производными

$$(Dt)_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}} = \mathrm{Antisym}\,(t_{\mu_2\ldots\mu_{p+1};\,\mu_1}) \qquad (4.11.10)$$

поскольку члены с аффинными связностями, появляющиеся при ковариантном дифференцировании, сокращаются при антисимметризации. Полученные выше результаты (4.7.1), (4.7.2) и (4.7.11) оказываются тогда частными случаями выражения (4.11.10) для $p = 0$, $p = 1$ и $p = 2$.

С помощью свойств ассоциативности и коммутативности (4.11.5) и (4.11.7) для внешней производной легко получить простую формулу внешней производной от внешнего произведения p-формы s на q-форму t:

$$\begin{aligned} D(s \wedge t) &= Ds \wedge t + (-1)^{pq} Dt \wedge s = \\ &= Ds \wedge t + (-1)^p s \wedge Dt. \end{aligned} \qquad (4.11.11)$$

Из тех же правил следует, что кратные внешние производные равны нулю, например

$$D^2 t \equiv \frac{\partial}{\partial x} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x} \wedge t\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right) \wedge t = 0. \qquad (4.11.12)$$

Этот результат известен как *лемма Пуанкаре*. Среди частных случаев этой леммы имеются два хорошо известных результата векторного анализа в трехмерном пространстве: равенства нулю ротора градиента и дивергенции ротора.

Естественно, возникает вопрос, справедлива ли обратная лемма Пуанкаре, а именно: если s есть $(p+1)$-форма, для которой

$$Ds = 0, \qquad (4.11.13)$$

то можем ли мы написать

$$s = Dt \qquad (4.11.14)$$

для некоторой p-формы t? Ответ утвердительный при условии, что область $\mathscr{R}$, для которой справедливо (4.11.13) и для которой мы

проверяем (4.11.14), может быть деформирована в точку. И вообще, область $\mathscr{R}$ можно деформировать в точку y^μ, если каждая точка x^μ в $\mathscr{R}$ может быть связана с точкой y^μ траекторией $X^\mu(\lambda;\ x)$, лежащей целиком в $\mathscr{R}$ (λ здесь — действительный параметр, принимающий значения от нуля до единицы), а

$$X^\mu(0;\ x) = y^\mu, \qquad X^\mu(1;\ x) = x^\mu.$$

Можно непосредственно удостовериться в том, что если (4.11.13) справедливо в области $\mathscr{R}$, то (4.11.14) будет выполняться во всей этой области для p-формы:

$$t_{\mu_1\ldots\mu_p}(x) = (p+1)\times$$
$$\times \int_0^1 \frac{\partial X^\nu(\lambda;\ x)}{\partial\lambda} \frac{\partial X^{\nu_1}(\lambda;\ x)}{\partial x^{\mu_1}} \ldots \frac{\partial X^{\nu_p}(\lambda;\ x)}{\partial x^{\mu_p}} s_{\nu\nu_1\ldots\nu_p}(X(\lambda;\ x))\, d\lambda. \tag{4.11.15}$$

Хорошо известные результаты векторного анализа в трехмерном пространстве, утверждающие, что вектор можно выразить как градиент, если ротор от него равен нулю, или как ротор, если равна нулю его дивергенция, можно рассматривать как частные случаи этой теоремы для $p = 0$ и $p = 1$ соответственно. Уравнения Максвелла — аналогичный пример в четырехмерном пространстве. Тензор электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ является 2-формой, которая, согласно (2.7.10), имеет равную нулю внешнюю производную, так что этот тензор может быть выражен как внешняя производная 1-формы, условно обозначаемая как $-2A_\alpha$:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta},$$

что совпадает с (2.7.11). Вообще говоря, p-форма, удовлетворяющая уравнению (4.11.14), не единственна. При заданном одном t наиболее общая p-форма, удовлетворяющая (4.11.14), есть форма

$$t' = t + Du, \tag{4.11.16}$$

где u — произвольная $(p-1)$-форма. Например, если A_α — один из вектор-потенциалов, ротор которого равен $F_{\alpha\beta}$, то наиболее общий вектор-потенциал такого рода определяется «калибровочным преобразованием»

$$A'_\alpha = A_\alpha + \frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha},$$

где Φ является произвольной 0-формой, т. е. произвольным скаляром.

По аналогии с тем, как внешняя производная является естественным обобщением известных операций градиента, ротора и дивергенции, можно построить скалярные интегралы p-форм *над*

множеством размерности p, которые окажутся естественным обобщением известных интегралов по объему от скалярных плотностей и поверхностных интегралов от нормальных компонент векторных плотностей. Множество $\mathscr{M}$ размерности p в n-мерном пространстве — это просто область, внутри которой n координат x^μ можно выразить в виде гладких *одно-однозначных* функций от p параметров u^i:

$$x^\mu = x^\mu(u^1, u^2, \ldots, u^p). \tag{4.11.17}$$

В действительности часто не удается покрыть все множество *единственным* набором u-координат. В общем случае необходимо вводить различные наборы u-координат в различных перекрывающихся частях множества с той оговоркой, что для двух перекрывающихся частей, в которых заданы координаты $\bar{u}^i$ и u^i соответственно, в области перекрытия u^i может быть выражена как гладкая одно-однозначная функция от p параметров $\bar{u}^i$, и наоборот. Фактически мы будем встречаться здесь с тем, что называется *ориентируемыми множествами*, т. е. такими множествами, для которых координаты в каждой их части могут быть выбраны так, что в областях перекрытия все детерминанты $|\,\partial u/\partial \bar{u}\,|$ положительно определенны. Поверхность сферы, например, является ориентируемой поверхностью. В дальнейшем мы не встретимся с такими усложнениями, но мы все же должны помнить, что для покрытия множества может потребоваться более чем один набор u-координат. Не забывая о такой возможности, мы определим здесь интеграл от p-формы t над множеством $\mathscr{M}$ размерности p как повторный интеграл

$$\int_{\mathscr{M}} t\,dV_p \equiv \int t_{\mu_1\ldots\mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial u^p}\,du^1 \ldots du^p, \tag{4.11.18}$$

в котором пределы интегрирования задаются границами множества.

Этот интеграл ведет себя как скаляр при преобразованиях координат x^μ, использованных для определения p-формы. Необходимо также рассмотреть, как ведет себя этот интеграл, если мы станем описывать множество с помощью нового набора параметров $\bar{u}^1 \ldots \bar{u}^p$ вместо $u^1 \ldots u^p$. Учитывая антисимметрию t, легко видеть, что в этом случае подынтегральное выражение приобретает коэффициент — детерминант $|\,\partial u/\partial \bar{u}\,|$, в то время как p-мерный элемент объема приобретает положительный множитель $\|\,\partial \bar{u}/\partial u\,\|$. Таким образом, весь интеграл либо не изменяется вовсе, либо изменяет знак в зависимости от того, положителен или отрицателен детерминант $|\,\partial u/\partial \bar{u}\,|$. (Мы, конечно, предполагаем, что преобразование $u^i \to \bar{u}^i$ несингулярно, так что этот детерминант не может равняться нулю и, следовательно, сохраняет свой знак на всем $\mathscr{M}$.) Этот результат, между прочим, показывает, что в том случае, когда для покрытия множества необходимо

несколько систем u-координат, интеграл от p-формы по области перекрытия двух частей, описываемых координатами u^i и $\bar{u}^i$, может вычисляться в любой из этих систем координат, если детерминант $|\partial u/\partial \bar{u}|$ положителен. Именно по этой причине мы ограничиваемся рассмотрением ориентируемых множеств.

Простейший пример интеграла типа (4.11.18) — это частный случай, когда p равно размерности n координатного пространства x^μ. Здесь сами координаты x^μ могут использоваться как u-координаты, так что (4.11.18) принимает вид

$$\int\limits_{\mathscr{M}} t\, dV_n = \int t_{12\ldots n}\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n.$$

Заметим, что подынтегральное выражение $t_{12\ldots n}$, так же как и однокомпонентный тензор, является скалярной плотностью веса -1, поскольку его можно выразить следующим образом:

$$t_{12\ldots n} = \frac{1}{n!}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_n} t_{\mu_1\ldots\mu_n},$$

а $\varepsilon^{\mu\nu\ldots}$ является тензорной плотностью веса -1 (см. § 4 гл. 4). Следующий простейший пример, получим, полагая в (4.11.18) $p = n - 1$, т. е.

$$\int\limits_{\mathscr{M}} t\, dV_{n-1} = \int t^\mu\, dS_\mu$$

где t^μ есть векторная плотность

$$t_{\mu_1\ldots\mu_p} \equiv \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_p\mu} t^\mu,$$

а dS_μ — элемент поверхности, ориентированный по нормали к множеству:

$$dS_\mu \equiv \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_p\mu} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial u^1} \ldots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial u^p}\, du^1 \ldots du^p.$$

С помощью этого общего определения интегралов от p-форм можно доказать, что интеграл от внешней производной p-формы на множестве размерности $(p+1)$ есть просто интеграл от самой p-формы по p-мерной границе множества (см. [8]):

$$\int\limits_{\mathscr{M}} Dt\, dV_{p+1} = \int\limits_{\text{граница } \mathscr{M}} t\, dV_p. \qquad (4.11.19)$$

(Мы не будем вникать в проблему определения ориентации границы, которая возникает при определении знака в правой части.) Теорема Стокса и теорема Гаусса — это просто частные случаи этой общей формулы при $n = 3$, $p = 1$ и при $n = 3$, $p = 2$ соответственно.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Kretschmann E.*, Ann. Phys. (Leipzig), 53, 575 (1917).
2. *Friedrichs K. O.*, Math. Ann., 98, 566 (1928).
3. *Wigner E. P.*, Symmetries and Reflections, Indiana University Press, 1967 (см. перевод: *Вигнер Е.*, Этюды о симметрии, «Мир», 1971).
4. *Weinberg S.*, в книге Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, M.I.T. Press, 1970, p. 283.
5. *Graves L. M.*, The Theory of Functions of a Real Variable, McGraw-Hill, 1956.
6. *Stratton J. A.*, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941, Sec. 1.14-1.18 (см. перевод: *Стрэттон Дж.*, Теория электромагнетизма, ИЛ, 1948).
7. *Schiff L. I.*, Quantum Mechanics, 3rd ed., McGraw-Hill, 1968, p. 399 (см. перевод 1-го изд.: *Шифф Л.*, Квантовая механика, ИЛ, 1959).
8. *Flanders H.*, Differential Forms, Academic Press, 1963.

Кто сферами небес
в высотах управляет
Пути планет
в безбрежном небе знает,
Другому нужен
бледный свет Луны...

Александр Поп

Глава 5
ЭФФЕКТЫ ГРАВИТАЦИИ

Вернемся теперь к физике и попробуем использовать то, чему мы научились в предыдущей главе для исследования того, как влияет гравитация на уравнения механики и электродинамики. Будем пользоваться при этом предписаниями принципа общей ковариантности. Сначала мы должны записать уравнения так, как они выглядят в специальной теории относительности, затем выяснить, как изменится в этих уравнениях каждая величина при произвольных преобразованиях координат, и заменить $\eta_{\mu\nu}$ на $g_{\mu\nu}$, а все производные — ковариантными производными. Полученные уравнения будут общековариантны и справедливы в отсутствие гравитации, а следовательно, справедливы в произвольных гравитационных полях при условии, что рассматриваемая система достаточно мала по сравнению с масштабами полей.

§ 1. Механика частицы

Частицы, на которые не действуют никакие силы, обладают в специальной теории относительности постоянной четырехмерной скоростью U^α и постоянным спином S_α, т. е.

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = 0 \qquad \left(U^\alpha \equiv \frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\right), \tag{5.1.1}$$

$$\frac{dS_\alpha}{d\tau} = 0. \tag{5.1.2}$$

Напомним, что спин S_α определен в системе покоя частицы, где спин есть $\{\mathbf{S}, 0\}$, так что в произвольной лоренцевой системе выполняется условие

$$S_\alpha U^\alpha = 0. \tag{5.1.3}$$

Для того чтобы превратить эти уравнения в общековариантные, зададим векторы U^μ и S_μ в произвольной системе координат x^μ

следующим образом:

$$U^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} U_f{}^\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}, \tag{5.1.4}$$

$$S_\mu \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} S_{f\alpha}, \tag{5.1.5}$$

где $U_f{}^\alpha$ и $S_{f\alpha}$ являются компонентами U и S в свободно падающей системе координат ξ^α. Хотя U^μ и S_μ являются векторами, $\partial U^\mu/d\tau$ и $dS_\mu/d\tau$ ими не являются, но мы констатировали в § 9 гл. 4, что можно определить производные векторов $DU^\mu/D\tau$ и $DS_\mu/D\tau$, которые сводятся к обычным, когда $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0$. Правильные уравнения, задающие положение и спин частицы, диктуются принципом общей ковариантности и имеют вид

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} = 0, \quad \frac{DS_\mu}{D\tau} = 0 \tag{5.1.6}$$

или, в более подробной записи,

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} U^\nu U^\lambda = 0, \tag{5.1.7}$$

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\nu S_\lambda = 0. \tag{5.1.8}$$

Кроме того, (5.1.3) следует записать теперь так:

$$S_\mu U^\mu = 0. \tag{5.1.9}$$

Повторяя рассуждения § 1 гл. 4, заметим, что эти уравнения справедливы в присутствии гравитационных полей, поскольку они общековариантны, и справедливы в отсутствие гравитации, поскольку превращаются в уравнения (5.1.1) — (5.1.3), когда исчезает $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$. Принцип эквивалентности, таким образом, утверждает, что существуют локально-инерциальные системы координат, в которых (5.1.6) — (5.1.9) справедливы (при непременном условии достаточной малости рассматриваемой частицы), а общая ковариантность гарантирует, что эти уравнения выполняются и в лабораторной системе отсчета.

В уравнениях (5.1.7) и (5.1.8) мы узнаем дифференциальные уравнения параллельного переноса векторов U^μ и S_μ. Поскольку $U^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$, уравнение (5.1.7) не что иное, как известное уравнение для свободного падения, которое было получено выше путем дифференцирования (5.1.4) по τ и подстановки (5.1.1). Очевидно, что мы избегаем утомительных вычислений, используя общую ковариантность. Уравнение (5.1.8) описывает прецессию гироскопа при свободном падении и будет обсуждаться в гл. 9. Здесь

отметим только, что произведение $S_\mu S^\mu$ постоянно, поскольку обычная производная от скаляра — это то же самое, что его ковариантная производная

$$\frac{d}{d\tau}(S_\mu S^\mu) = \frac{D}{D\tau}(S_\mu S^\mu) = 0. \tag{5.1.10}$$

Если частица не находится в состоянии свободного падения, то производная $DU^\mu/D\tau$ не равна нулю и вместо (5.1.7) надо писать

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} \equiv \frac{f^\mu}{m}, \tag{5.1.11}$$

где m — масса частицы, а f^μ — контравариантный вектор силы. Последнее можно записать и так:

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = f^\mu - m\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}.$$

Член, содержащий $m\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$, играет роль гравитационной силы. Мы можем всегда вычислить f^μ, если знаем его значение f^α_f в свободно падающей системе отсчета ξ^α. Действительно, условие, требующее, чтобы сила f^μ вела себя как вектор, позволяет записать его единственным способом:

$$f^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} f^\alpha_f. \tag{5.1.12}$$

Электромагнитная сила будет определена в следующем параграфе.

Иногда оказывается, что на частицу действует сила, которая не создает крутящего момента. В этом случае наблюдатель в локально-инерциальной системе отсчета, находящийся в данный момент в покое относительно частицы, не будет наблюдать никакой прецессии оси спина, т. е. $d\mathbf{S}/dt$ будет равна нулю. Но при таком выборе системы координат $d\mathbf{x}/dt$ также исчезает, и мы можем записать в общем виде условие отсутствия крутящего момента в лоренц-инвариантной форме:

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} \sim U^\alpha.$$

Это условие будет оставаться справедливым в любой локально-инерциальной системе координат, в сопутствующей и любой другой. Возникает вопрос о коэффициенте пропорциональности. Положим, что

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = \Phi U^\alpha.$$

Вспомним теперь, что S_α определяется так, что $S_\alpha U^\alpha = 0$. Это приводит к соотношению

$$\frac{d}{d\tau}(S_\alpha U^\alpha) = \Phi U_\alpha U^\alpha + S_\alpha \frac{dU^\alpha}{d\tau} = 0,$$

а потому

$$\Phi = S_\alpha \frac{dU^\alpha}{d\tau} = S_\alpha \frac{f^\alpha}{m}.$$

Следовательно, вектор спина изменяется согласно уравнению

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = \left(S_\beta \frac{f^\beta}{m}\right) U^\alpha. \tag{5.1.13}$$

Это явление известно как *томасовская прецессия* [1]. Если мы теперь включим гравитационное поле, уравнение (5.1.13) и принцип общей ковариантности приведут нас к следующему закону для прецессии спина:

$$\frac{DS^\mu}{D\tau} = \left(S_\nu \frac{f^\nu}{m}\right) U^\mu = S_\nu \frac{DU^\nu}{D\tau} U^\mu. \tag{5.1.14}$$

Принято говорить, что вектор, удовлетворяющий этому дифференциальному уравнению, подвергается *переносу Ферми* [2]. Параллельный перенос — это специальный случай, имеющий место при $f^\mu = 0$.

§ 2. Электродинамика

Напомним, что в отсутствие гравитационных полей электродинамические уравнения Максвелла записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = -J^\beta, \tag{5.2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} F_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} F_{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\beta} = 0, \tag{5.2.2}$$

где J^β есть 4-вектор $\{\mathbf{J}, \varepsilon\}$, а $F^{\alpha\beta}$ — тензор электромагнитного поля, причем $F^{12} = B_3$, $F^{01} = E_1$ и т. д. (см. § 7 гл. 2). Предположим, что мы *задаем* $F^{\mu\nu}$ и J^μ в произвольных координатах, требуя, чтобы они сводились к $F^{\alpha\beta}$ и J^β в локально-инерциальных координатах Минковского и чтобы они вели себя, как тензоры при произвольных преобразованиях координат (т. е. если $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ и $\tilde{J}^\alpha$ — значения, измеренные в локально-инерциальной системе отсчета, то справедливы соотношения $F^{\mu\nu} \equiv \equiv (\partial x^\mu/\partial \xi^\alpha)(\partial x^\nu/\partial \xi^\beta)\tilde{F}^{\alpha\beta}$ и $J^\mu \equiv (\partial x^\mu/\partial \xi^\alpha)\tilde{J}^\alpha$). Можно тогда *превратить уравнения* (5.2.1) и (5.2.2) в общековариантные, заменяя все производные ковариантными производными:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\,\mu} = -J^\nu, \tag{5.2.3}$$

$$F_{\mu\nu;\,\lambda} + F_{\lambda\mu;\,\nu} + F_{\nu\lambda;\,\mu} = 0. \tag{5.2.4}$$

Индексы теперь, естественно, следует поднимать и опускать с помощью $g_{\mu\lambda}$, а не $\eta_{\alpha\gamma}$, т. е.

$$F_{\lambda\varkappa} \equiv g_{\lambda\mu} g_{\varkappa\nu} F^{\mu\nu}. \tag{5.2.5}$$

Так как $F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$ антисимметричны, уравнения Максвелла можно переписать с помощью (4.7.10) и (4.7.11) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{g}\, F^{\mu\nu} = -\sqrt{g}\, J^\nu, \tag{5.2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} F_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} F_{\lambda\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\nu\lambda} = 0. \tag{5.2.7}$$

Уравнения (5.2.3) — (5.2.7) справедливы в отсутствие гравитации и общековариантны, а потому, согласно принципу общей ковариантности, справедливы также в произвольных гравитационных полях.

Электромагнитная сила, действующая на частицу с зарядом e, в отсутствие гравитации имеет вид (2.7.9)

$$f^\alpha = eF^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{d\tau}. \tag{5.2.8}$$

Отсюда сразу следует, что в произвольных координатах электромагнитная сила в произвольном гравитационном поле равна

$$f^\mu = eF^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}, \tag{5.2.9}$$

где, естественно,

$$F^\mu{}_\nu \equiv g_{\nu\lambda} F^{\mu\lambda}. \tag{5.2.10}$$

И снова мы воспользуемся принципом общей ковариантности. Уравнение (5.2.9), очевидно, сводится к (5.2.8) в локально-инерциальных координатах Минковского и является общековариантным, поскольку f^μ — это вектор (см. § 1 гл. 5), $dx^\nu/d\tau$ — вектор, а F^μ_ν *определено* как тензор; следовательно, формула (5.2.9) написана правильно.

Поучительно вычислить вектор тока J^ν. В специальной теории относительности он равен

$$J^\alpha = \sum_n e_n \int \delta^4 (x - x_n)\, dx_n^\alpha, \tag{5.2.11}$$

причем интеграл берется вдоль траектории n-й частицы [см. уравнение (2.6.5)]. Четырехмерная дельта-функция в произвольной системе координат вводится следующим образом:

$$\int d^4x \Phi(x)\, \delta^4 (x - y) = \Phi(y). \tag{5.2.12}$$

Так как $g^{1/2}\,d^4x$ есть скаляр, то комбинация $g^{-1/2}\delta^4(x-y)$ тоже должна быть скаляром, который, конечно, сводится к обычной дельта-функции в специальной теории относительности, где $g=1$ (именно этот скаляр в некоторых работах определяется как дельта-функция). Таким образом, ковариантный вектор, который сводится к J^α в отсутствие гравитации, равен

$$J^\mu(x)=g^{-1/2}(x)\sum_n e_n\int\delta^4(x-x_n)\,dx_n^\mu. \tag{5.2.13}$$

Заметим, что закон сохранения $(\partial J^\alpha/\partial x^\alpha=0)$ специальной теории относительности в общей теории имеет вид $J^\mu{}_{;\,\mu}=0$, или, с учетом (4.7.7),

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(g^{1/2}J^\mu)=0. \tag{5.2.14}$$

Множитель $g^{-1/2}$ в (5.2.13) необходим для того, чтобы компенсировать $g^{1/2}$ в (5.2.14), так что (5.2.14) просто выражает факт постоянства e_n.

§ 3. Тензор энергии-импульса

Плотность и поток энергии и импульса были объединены в § 2.8 в симметричный тензор $T^{\alpha\beta}$, удовлетворяющий закону сохранения

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha}=G^\beta, \tag{5.3.1}$$

где G^β является плотностью внешней силы f^β, действующей на систему. (В изолированной системе имеем $G^\beta=0$.) Определим $T^{\mu\nu}$ и G^ν как контравариантные тензоры, которые совпадают с соответствующими величинами $T^{\alpha\beta}$ и G^β в отсутствие гравитации. Тогда общековариантное уравнение, которое согласуется с (5.3.1) в локально-инерциальных системах, имеет вид

$$T^{\mu\nu}{}_{;\,\mu}=G^\nu \tag{5.3.2}$$

или, с учетом (4.7.9),

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{g}\,T^{\mu\nu})=G^\nu-\Gamma^\nu_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda}. \tag{5.3.3}$$

Коэффициент $\sqrt{g}$ знаком уже нам из электродинамики и возникает как следствие того, что инвариантный объем равен $\sqrt{g}\,d^4x$. Второй член в правой части уравнения представляет собой *плотность* гравитационной *силы*. Как и следовало ожидать, эта сила зависит от системы, на которую она действует, только через тензор энергии-импульса.

Тензор энергии-импульса системы точечных частиц в специальной теории относительности задается (см. § 8 гл. 2) в виде

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n m_n \int \frac{dx_n^\alpha}{d\tau} dx_n^\beta \delta^4(x - x_n), \tag{5.3.4}$$

причем интеграл здесь берется вдоль траектории частицы. Следуя точно тем же рецептам, что и при рассмотрении J^μ в предыдущем параграфе, приходим к заключению, что контравариантный тензор, согласующийся с (5.3.4) в отсутствие гравитации, равен

$$T^{\mu\nu} = g^{-1/2} \sum_n m_n \int \frac{dx_n^\mu}{d\tau} dx_n^\nu \delta^4(x - x_n). \tag{5.3.5}$$

Тензор энергии-импульса $F^{\alpha\beta}$ электромагнитного поля в специальной теории относительности был вычислен в § 8 гл. 2 и имел вид

$$T^{\alpha\beta} = F^\alpha{}_\gamma F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}. \tag{5.3.6}$$

Не составляет никакого труда убедиться в том, что контравариантный тензор, согласующийся с (5.3.6) в отсутствие гравитации, есть

$$T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\lambda F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\lambda\varkappa} F^{\lambda\varkappa}. \tag{5.3.7}$$

Для системы, состоящей из частиц и излучения, тензор энергии-импульса есть сумма (5.3.5) и (5.3.7).

Возвращаясь к тензору энергии-импульса (5.3.5) только для вещества, легко вычислить

$$\int T^{\mu 0} g^{1/2} d^3x = \sum_n m_n \frac{dx_n^\mu}{d\tau},$$

где сумма включает все частицы в объеме, по которому ведется интегрирование. Это предполагает, что $T^{\mu 0} g^{1/2}$ надо рассматривать, вообще говоря, как пространственную плотность энергии и импульса. Отсюда, в частности, можно найти энергию, импульс и угловой момент для произвольной системы

$$P^\mu \equiv \int T^{\mu 0} g^{1/2} d^3x, \tag{5.3.8}$$

$$J^{\mu\nu} \equiv \int (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) g^{1/2} d^3x \tag{5.3.9}$$

Однако эти величины не являются контравариантными тензорами и не сохраняются, поскольку не сохраняется $T^{\mu\nu} g^{1/2}$, т. е. $\partial (T^{\mu\nu} g^{1/2})/\partial x^\nu$ не обращается в нуль ввиду того, что между веществом и гравитацией происходит обмен энергией и импульсом.

§ 4. Гидродинамика и гидростатика

В отсутствие гравитации тензор энергии-импульса идеальной жидкости задается формулой (2.10.7)

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p + \rho)\, U^{\alpha}U^{\beta}, \tag{5.4.1}$$

где U^{α} есть четырехмерная скорость жидкости, а $U^0 = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$, $\mathbf{U} = \mathbf{v}U^0$. Контравариантный тензор, который сводится к (5.4.1) в отсутствие гравитации, записывается в виде

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)\, U^{\mu}U^{\nu}, \tag{5.4.2}$$

где U^{μ} есть локальное значение $dx^{\mu}/d\tau$ для элемента жидкости в сопутствующей системе отсчета. Отметим, что p и ρ всегда определяются как плотность давления и энергии, измеряемые наблюдателем в локально-инерциальной системе отсчета, движущейся вместе с жидкостью в момент проведения измерения, и, следовательно, они являются скалярами. Условия сохранения тензора энергии-импульса приводят к гидродинамическим уравнениям:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} g^{\mu\nu} + g^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g^{1/2}(p + \rho)\, U^{\mu}U^{\nu} + \\ + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(p + \rho)\, U^{\nu}U^{\lambda} = 0. \tag{5.4.3}$$

Последний член здесь представляет собой гравитационную силу, действующую на систему. Заметим также, что, поскольку $\eta_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta} = -1$ в отсутствие гравитации, мы должны и при наличии гравитации писать

$$g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = -1. \tag{5.4.4}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда жидкость находится в состоянии гидростатического равновесия. Поскольку жидкость не движется, (5.4.4) приводит к выражениям

$$U^0 = (-g_{00})^{-1/2} \qquad U^{\lambda} = 0 \text{ для } \lambda \neq 0.$$

Кроме того, все производные по времени от $g_{\mu\nu}$, p, или ρ исчезают. В частности, имеем

$$\Gamma^{\mu}_{00} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}[(p + \rho)\, U^{\mu}U^{\nu}] = 0.$$

Умножая (5.4.3) на $g_{\mu\lambda}$, получаем

$$-\frac{\partial p}{\partial x^{\lambda}} = (p + \rho)\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln(-g_{00})^{1/2}. \tag{5.4.5}$$

Это условие тривиально для $\lambda = 0$, тогда как для пространственноподобных значений λ (5.4.5) есть не что иное, как обычное нерелятивистское условие гидростатического равновесия, с той лишь разницей, что вместо плотности массы появляется $p + \rho$, а вместо гравитационного потенциала появляется $(-g_{00})^{1/2}$. Это уравнение решается, если давление p задано как функция ρ. Решение имеет вид

$$\int \frac{dp(\rho)}{p(\rho)+\rho} = -\ln \sqrt{-g_{00}} + \text{const}. \tag{5.4.6}$$

Например, если зависимость $p(\rho)$ степенная,

$$p(\rho) \sim \rho^N, \tag{5.4.7}$$

то (5.4.6) для $N \neq 1$ выглядит так:

$$\frac{\rho+p}{\rho} \sim (-g_{00})^{(1-N)/2N}, \tag{5.4.8}$$

а для $N = 1$

$$\rho \sim (-g_{00})^{-(p+\rho)/2p}. \tag{5.4.9}$$

Это, между прочим, показывает, что при $p = \rho/3$ гравитация никогда не может поддерживать равновесие в крайне релятивистской жидкости, находящейся в конечном объеме, поскольку в этом случае (5.4.9) имеет вид

$$\rho \sim (-g_{00})^{-2}. \tag{5.4.10}$$

Так как ρ должно быть равно нулю вне жидкости, g_{00} становится сингулярным на ее поверхности.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomas L. H.*, Nature, **117**, 514 (1926).
2. *Fermi E.*, Atti. R. Accad. Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., **31**, 21 (1922).

Когда внимаю звездному ночному небу
И знакам грандиозным и туманным...

Дж. Китс, Когда мне страшно, что жизнь моя прервется...

Глава 6
КРИВИЗНА

Перейдем теперь к решению уравнений гравитационного поля, применяя принцип эквивалентности к самой гравитации. Как и в предыдущей главе, наиболее удобный путь использования этого принципа — это отыскание уравнений поля в общековариантном виде и сведение их затем к соответствующей форме в случае слабых полей. Итак, зададимся вопросом: какие тензоры можно образовать из метрического тензора и его производных? В данной главе мы рассмотрим это в чисто математическом аспекте, как в свое время это делали Гаусс и Риман. Информация, которую мы приобретем, будет использована в следующей главе; она поможет нам исследовать уравнения поля гравитации.

§ 1. Определение тензора кривизны

Нам надо построить тензор из метрического тензора и его производных. Если использовать только $g_{\mu\nu}$ и его первые производные, то никакого нового тензора построить нельзя, поскольку в любой точке можно найти систему координат, в которой первые производные метрического тензора исчезают. Таким образом, в этой системе координат искомый тензор должен равняться одному из тех, что могут быть построены из *одного лишь* метрического тензора (например, $g_{\mu\nu}$ или $g^{\mu\nu}$, или $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\eta}/\sqrt{g}$ и т. д.), а поскольку это равенство между тензорами, оно должно выполняться во всех системах координат.

Теперь попытаемся построить тензор из метрического тензора и его первых и вторых производных. Чтобы сделать это, вспомним правило преобразования аффинной связности:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} . \qquad (6.1.1)$$

[Это — соотношение (4.5.2), в котором переставлены штрихованные и нештрихованные координаты.] В правой части этого соотношения имеется неоднородность, портящая тензорный характер

$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, а потому мы попробуем ее изолировать:

$$\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}}\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\,\Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma} \tag{6.1.2}$$

Чтобы избавиться от левой части, используем некоммутативность частных производных. Дифференцирование по $x^{\varkappa}$ дает

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\varkappa}\,\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}} = {}& \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\eta}}\,\Gamma^{\eta}_{\varkappa\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\varkappa}}\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}}\,\Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}\right) - \\ & - \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}\,\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\eta}}\,\Gamma^{\eta}_{\varkappa\nu} - \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\varkappa}}\,\frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\nu}}\,\Gamma'^{\sigma}_{\eta\xi}\right) - \\ & - \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}}\,\Gamma^{\eta}_{\varkappa\mu} - \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\varkappa}}\,\frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\mu}}\,\Gamma'^{\rho}_{\eta\xi}\right) + \\ & + \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\varkappa}}\,\frac{\partial \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}}{\partial x'^{\eta}}.\end{aligned}$$

Собрав подобные члены и переставив некоторые индексы, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\varkappa}\,\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}} = {}& \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\eta}\right) - \\ & - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\varkappa}}\left(\frac{\partial \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}}{\partial x'^{\eta}} - \Gamma'^{\tau}_{\rho\lambda}\Gamma'^{\lambda}_{\eta\sigma} - \Gamma'^{\tau}_{\lambda\sigma}\Gamma'^{\lambda}_{\eta\rho}\right) - \\ & - \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\varkappa}} + \Gamma^{\lambda}_{\varkappa\nu}\,\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\varkappa\mu}\,\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\nu}}\right).\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Вычитая затем отсюда то же самое уравнение с переставленными индексами ν и $\varkappa$, находим, что все члены, включающие произведения Γ на Γ', исчезают, и остается следующее выражение:

$$\begin{aligned}0 = {}& \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}\right) - \\ & - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\varkappa}}\left(\frac{\partial \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}}{\partial x'^{\eta}} - \frac{\partial \Gamma'^{\tau}_{\rho\eta}}{\partial x'^{\sigma}} - \Gamma'^{\tau}_{\lambda\sigma}\Gamma'^{\lambda}_{\eta\rho} + \Gamma'^{\tau}_{\lambda\eta}\Gamma'^{\lambda}_{\sigma\rho}\right).\end{aligned}$$

Его можно переписать в виде формулы преобразования

$$R'^{\tau}{}_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}}\,\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}}\,\frac{\partial x^{\varkappa}}{\partial x'^{\eta}}\,R^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa}, \tag{6.1.4}$$

где

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}. \tag{6.1.5}$$

Уравнение (6.1.4) утверждает, что $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ есть тензор; его называют *тензором кривизны Римана — Кристоффеля.*

Существование тензора $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ снова поднимает вопрос о том, единственным ли образом определяет принцип общей ковариантности (или принцип эквивалентности) гравитационные эффекты в произвольных физических системах. Зададимся, например, вопросом, может ли оставаться корректным уравнение движения свободно падающей частицы со спином S_{μ}, имеющее вид

$$0 = \frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} + fR^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}S^{\varkappa} \qquad (6.1.6)$$

(где f — неизвестный скаляр) наряду с известным уравнением

$$0 = \frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}. \qquad (6.1.7)$$

Оба уравнения являются общековариантными и оба сводятся в отсутствие гравитации к соответствующему уравнению специальной теории относительности $dU^{\alpha}/d\tau = 0$. Как же тогда отличить, какое из них правильное?

Критерий опять тот же — масштаб. Предположим, что наша частица имеет характерный линейный размер d, а гравитационное поле характеризуется пространственно-временным масштабом D. Тензор Римана — Кристоффеля имеет на одну производную от метрики больше, чем аффинная связность, так что отношение третьего члена (6.1.6) ко второму члену пропорционально $1/D$; соображения размерности тогда требуют, чтобы их отношение было, грубо говоря, порядка d/D. Таким образом, исключая специальные случаи, когда тот или иной член аномально велик или мал, можно считать, что последний член в (6.1.6) пренебрежимо мал, если рассматриваемая частица намного меньше, чем характерные размеры гравитационного поля; тогда (6.1.7) является правильным уравнением движения. Конечно, если наша частица не слишком мала в масштабах гравитационного поля (как в случае Луны, движущейся в гравитационном поле Земли), то принцип общей ковариантности и принцип эквивалентности должны применяться к бесконечно малым элементам, из которых состоит частица, но при этом (6.1.6) или (6.1.7) могли бы дать разумное феноменологическое описание движения частицы в целом.

§ 2. Единственность тензора кривизны

Теперь докажем, что $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ является *единственным* тензором, который можно построить из метрического тензора и его первых и вторых производных, и что построенный тензор линеен по вторым производным.

Для этой цели оказывается очень удобным привязаться к какой-нибудь точке X и выбрать локально-инерциальную систему координат, в которой аффинная связность $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ в этой точке равна нулю. Кроме того, будем рассматривать только ограниченный класс преобразований координат, оставляющих аффинную связность нулевой. Согласно уравнению (6.1.1), это просто преобразования $x \to x'$, для которых выполняется условие

$$\left(\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}\right)_{x=X} = 0. \tag{6.2.1}$$

Любая величина, изменяющаяся как тензор при произвольных преобразованиях координат, должна преобразовываться как тензор и на ограниченном классе подобных преобразований. Таким образом, это требование оказывается достаточно сильным для наших целей.

Так как афинная связность исчезает в точке X, то все первые производные метрического тензора исчезают в этой точке [см. выражение (3.3.5)] и искомый тензор должен быть линейной комбинацией лишь вторых производных от метрического тензора или, эквивалентно, первых производных аффинной связности. Из уравнения (6.1.3) видно, что, когда $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $\Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}$ равны нулю, производные аффинной связности подчиняются при $x = X$ правилу преобразования

$$\frac{\partial \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}}{\partial x'^{\eta}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{\varkappa}}{\partial x'^{\eta}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} - \\ - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{\varkappa}}{\partial x'^{\eta}}\frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\varkappa}\,\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}. \tag{6.2.2}$$

Какую линейную комбинацию $\partial\Gamma/\partial x$ следует взять, чтобы она вела себя как тензор? Ясно, что она должна быть такой, чтобы исчезал неоднородный член в правиле преобразования. Однако в любой данной точке X неоднородный член есть полностью произвольная функция его индексов ρ, σ, η, на которую накладывается единственное условие, чтобы она была симметрична по этим индексам. Следовательно, единственный способ составления линейной комбинации $\partial\Gamma/\partial x$, которая будет преобразовываться, подобно тензору, при всех переходах $x \to x'$, удовлетворяющих (6.2.1), это антисимметризация индексов $\varkappa$ и ν (или, эквивалентно, $\varkappa$ и μ), превращающая (6.2.2) при $x = X$ в соотношение

$$T'^{\tau}{}_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{\varkappa}}{\partial x'^{\eta}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}}T^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa},$$

где в точке $x = X$ имеем

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\nu}}. \tag{6.2.3}$$

Таким образом, искомый тензор должен равняться тензору $T^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$, задаваемому выражением (6.2.3), когда Γ исчезает. Однако, когда $\Gamma = 0$, тензор Римана — Кристоффеля удовлетворяет (6.2.3), так что в локально-инерциальной системе $T^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa} = R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$. Но это — равенство между тензорами, а потому, если оно справедливо в одном классе систем координат, оно справедливо во всех системах координат. Отсюда следует, что единственный тензор T искомого вида есть как раз $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$.

Естественно, используя метрический тензор, можно строить и другие тензоры из линейных комбинаций $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$. Наиболее замечательными являются свернутые формы: *тензор Риччи*, равный

$$R_{\mu\varkappa} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\varkappa}, \tag{6.2.4}$$

и *скалярная кривизна*

$$R = g^{\mu\varkappa} R_{\mu\varkappa}. \tag{6.2.5}$$

§ 3. Обход вдоль замкнутого контура с помощью параллельного переноса

Рассмотрим задачу, которая интересна и сама по себе и будет нужна нам для подготовки к следующему параграфу. Зададимся вопросом, вернется ли вектор S_μ в свое первоначальное положение после переноса его вдоль замкнутой кривой C, осуществленного по правилам параллельного переноса (см. § 9 гл. 4 и § 1 гл. 5):

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} S_\lambda. \tag{6.3.1}$$

Можно ответить на этот вопрос, используя тот же метод, что и при доказательстве теоремы Стокса. Рассмотрим кривую C как край некоторой двумерной поверхности A и разобьем A на малые ячейки, ограниченные малыми замкнутыми кривыми C_N. Изменение S_μ при параллельном переносе вдоль C может быть записано как сумма изменений S_μ, когда этот вектор переносится по каждой из этих малых кривых C_N:

$$\Delta S_\mu = \sum_N \Delta_N S_\mu; \tag{6.3.2}$$

поскольку изменение S_μ при обходе по границе любой внутренней ячейки компенсируется изменениями за счет обходов смежных ячеек, остаются только вклады от краев внешних ячеек, которые составляют C. Следовательно, нужно выяснить: изменяется ли S_μ при параллельном переносе по малой замкнутой кривой? Если кривая достаточно мала, вблизи некоторой

точки $x \equiv x(\tau_0)$, лежащей на кривой, можно разложить $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$ следующим образом:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) + (x^{\rho} - X^{\rho}) \frac{\partial}{\partial X^{\rho}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) + \ldots . \qquad (6.3.3)$$

Тогда (6.3.1) в первом порядке по $x^{\mu} - X^{\mu}$ дает

$$S_{\mu}(\tau) = S_{\mu}(\tau_0) + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X)\,(x^{\nu}(\tau) - X^{\nu})\,S_{\lambda}(\tau_0) + \ldots, \qquad (6.3.4)$$

и, подставляя (6.3.3) и (6.3.4) в (6.3.1), получаем уравнение, включающее члены второго порядка,

$$S_{\mu}(\tau) \approx S_{\mu}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \left[\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) + (x^{\rho}(\tau) - X^{\rho}) \frac{\partial}{\partial X^{\rho}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X) + \ldots\right] \times$$

$$\times \left[S_{\lambda}(\tau_0) + S_{\sigma}(\tau_0)\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}(X)\,(x^{\rho}(\tau) - X^{\rho}) + \ldots\right] \frac{dx^{\nu}(\tau)}{d\tau}\,d\tau.$$

Отбрасывая члены третьего порядка и выше по $x - X$, имеем

$$S_{\mu}(\tau) \approx S_{\mu}(\tau_0) + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X)\,S_{\lambda}(\tau_0) \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}\,d\tau +$$

$$+ \left\{\frac{\partial}{\partial X^{\rho}} \Gamma^{\delta}_{\mu\nu}(X) + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}(X)\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X)\right\} \times S_{\sigma}(\tau_0) \int_{\tau_0}^{\tau} (x^{\rho} - X^{\rho}) \frac{dx^{\nu}}{d\tau}\,d\tau.$$

Если $x^{\mu}(\tau)$ возвращается к его первоначальному значению X при некотором $\tau = \tau_1$, тогда, очевидно, получаем

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}\,d\tau = 0,$$

так что при параллельном переносе по малой замкнутой кривой $x^{\mu}(\tau)$ изменение S_{μ} второго порядка

$\Delta S_{\mu} \equiv S_{\mu}(\tau_1) - S_{\mu}(\tau_0) =$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial X^{\rho}} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}(X) + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X)\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}(X)\right\} S_{\sigma}(\tau_0) \oint x^{\rho}\,dx^{\nu}, \qquad (6.3.5)$$

где

$$\oint x^{\rho}\,dx^{\nu} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^{\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}\,d\tau.$$

Этот интеграл, вообще говоря, не исчезает. Если, например, контур интегрирования представляет собой малый параллелограмм со сторонами δa^{μ} и δb^{μ}, то интеграл равен

$$\oint x^{\rho}\,dx^{\nu} = \delta a^{\rho}\delta b^{\nu} - \delta a^{\nu}\delta b^{\rho}.$$

Интегрируя по частям, можно убедиться в том, что это выражение всегда антисимметрично по ρ и ν:

$$\oint x^\rho\, dx^\nu = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau}\,(x^\rho x^\nu)\, d\tau - \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau}\, d\tau = -\oint x^\nu\, dx^\rho. \quad (6.3.6)$$

В коэффициенте при интеграле в (6.3.5), исходя из этого, можно оставить только антисимметричную часть, которая составляет как раз половину тензора кривизны (6.1.5), а потому

$$\Delta S_\mu = \frac{1}{2} R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} S_\sigma \oint x^\rho\, dx^\nu. \quad (6.3.7)$$

Наше заключение состоит в том, что произвольный вектор S_μ не будет изменяться, если его переносить параллельно самому себе вдоль произвольной малой замкнутой кривой в окрестности точки X, в том и только в том случае, если $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ исчезает в точке X. Мы уже отмечали, что изменение S_μ при параллельном переносе вдоль конечной замкнутой кривой C может быть вычислено путем разбиения на малые ячейки площади A, ограниченной C, и затем сложения изменений S_μ, которые возникают при параллельных переносах по контурам этих ячеек. Следовательно, если $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ исчезает везде в A, то произвольный вектор S_μ не будет изменяться при параллельном переносе вдоль C.

Теперь предположим, что $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ действительно исчезает. Рассмотрим замкнутую кривую, состоящую из двух сегментов A и B, охватывающих точки x^μ и X^μ. Изменение вектора S_μ при параллельном переносе из x в X вдоль A должно компенсироваться изменением S_μ при параллельном переносе вдоль B из X в x, т. е.

$$\Delta^A_{X\to x} S_\mu + \Delta^B_{x\to X} S_\mu = 0.$$

Но изменение S_μ при параллельном переносе из x в X вдоль B равно изменению с обратным знаком, происходящему при параллельном переносе из X в x вдоль B:

$$\Delta^B_{x\to X} S_\mu = -\Delta^B_{X\to x} S_\mu,$$

и, следовательно,

$$\Delta^A_{X\to x} S_\mu = \Delta^B_{X\to x} S_\mu. \quad (6.3.8)$$

Таким образом, мы получим одно и то же значение S_μ при параллельном переносе из X в x независимо от того, по какой из кривых мы двигались. (Например, если два гироскопа находятся на различных пересекающихся орбитах около Земли и имеют одинаковую ориентацию, когда они встречаются в точке X^μ, то любое различие в их ориентациях, когда они встретятся потом в точке x^μ, будет мерой некоторой усредненной кривизны, создаваемой гравитационным полем Земли.)

Из этого следует, что задавая S_μ в X, мы можем определить с помощью параллельного переноса из X в x *поле* $S_\mu(x)$ во всей области пространства-времени, где $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ исчезает. Соотношение (6.3.8) гарантирует, что $S_\mu(x)$, определенное таким образом, будет зависеть только от x, но не от пути из X в x. Производная вдоль любой кривой $x(\tau)$ от этого поля равняется

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = \frac{\partial S_\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau},$$

а так как направление $dx^\nu(\tau)/d\tau$ произвольно, уравнение (6.3.1) принимает вид

$$\frac{\partial S_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} S_\lambda \tag{6.3.9}$$

или

$$S_{\mu;\,\nu} = 0. \tag{6.3.10}$$

Следовательно, если тензор кривизны исчезает, мы всегда можем построить решения уравнения (6.3.9) для любого заданного значения $S_\mu(X)$ путем параллельного переноса S_μ из X в x. И наоборот, если существует какое-либо ковариантное векторное поле с равными нулю ковариантными производными, то обязательно выполняется правило (6.3.1), а так как поле не может измениться при параллельном переносе вдоль любой замкнутой кривой, из (6.3.7) следует, что во всей области, где S_σ удовлетворяет (6.3.10), справедливо соотношение

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} S_\sigma = 0. \tag{6.3.11}$$

(К аналогичным выводам можно было бы прийти, используя вместо метода параллельного переноса известные положения теории дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [1]). При этом подходе соотношение (6.3.11) появилось бы как необходимое и достаточное условие того, что уравнение (6.3.9) может быть решено подстановкой степенных рядов по $x^\mu - X^\mu$.)

§ 4. Гравитация в криволинейных координатах

Предположим, что мы задались метрическим тензором $g_{\mu\nu}(x)$, который не является просто константой. Как узнать, заполнено ли действительно пространство гравитационным полем или $g_{\mu\nu}$ представляет собой лишь метрику $\eta_{\alpha\beta}$ специальной теории относительности, записанную в криволинейных координатах? Другими словами, можно ли говорить о том, что имеется набор координат Минковского $\xi^\alpha(x)$, которые удовлетворяют во всем пространстве

условию

$$\eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \xi^{\alpha}(x)}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}(x)}{\partial x^{\nu}} ? \qquad (6.4.1)$$

Заметим, что принцип эквивалентности утверждает лишь то, что в каждой точке X можно найти локально-инерциальные координаты, которые удовлетворяют (6.4.1) в бесконечно малой окрестности X. Вопрос же, о котором идет речь, следующий: можно ли отыскать такой набор координат $\xi^{\alpha}(x)$, который удовлетворяет соотношению (6.4.1) во всем пространстве? Например, задавая метрические коэффициенты

$$g_{rr} = 1, \qquad g_{\theta\theta} = r^2, \qquad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta, \qquad g_{tt} = -1, \qquad (6.4.2)$$

мы знаем, что имеется набор ξ^{α}, удовлетворяющий (6.4.1), именно

$$\xi^1 = r \sin\theta \cos\varphi, \quad \xi^2 = r \sin\theta \sin\varphi, \quad \xi^3 = r\cos\theta, \quad \xi^4 = t. \qquad (6.4.3)$$

Однако, как мы могли бы решить вопрос эквивалентно или нет (6.4.2) метрике Минковского $\eta_{\alpha\beta}$, если бы не были настолько искушены, чтобы заметить, что это просто $\eta_{\alpha\beta}$, записанное в сферических координатах? Или, другими словами, если мы заменяем g_{rr} в (6.4.2) некой произвольной функцией r, то как нам убедиться в том, что мы действительно вводим гравитационное поле, т. е. как убедиться в том, что уравнение (6.4.1) не имеет в этом случае никаких решений?

Ответ дает следующая теорема: необходимыми и достаточными условиями эквивалентности метрики $g_{\mu\nu}(x)$ метрике Минковского $\eta_{\alpha\beta}$ [т. е. условиями существования преобразования $x \to \xi$, удовлетворяющего (6.4.1)] являются, во-первых, равенство нулю во всем пространстве тензора кривизны, вычисленного с помощью $g_{\mu\nu}$, т. е.

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa} = 0, \qquad (6.4.4)$$

и, во-вторых, условие, что в некоторой точке X матрица $g^{\mu\nu}(X)$ имеет три положительных и одно отрицательное собственное значение.

Необходимость этих двух условий очевидна. Предположим, что мы можем найти систему координат $\xi^{\alpha}(x)$, удовлетворяющую (6.4.1). В этой системе координат метрикой служит $\eta_{\alpha\beta}$, все компоненты аффинной связности исчезают и, следовательно, тензор Римана $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ равен нулю. Но равенство нулю тензора — инвариантное утверждение, так что $R^{\lambda}_{\mu\nu\varkappa}$ должен исчезать и в первоначальной системе координат x^{μ}. В § 6 гл. 3 мы уже отмечали, что «конгруэнция», подобная (6.4.1), требует, чтобы $\eta_{\alpha\beta}$ и $g^{\mu\nu}$ имели одинаковое число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений во всем пространстве.

Чтобы доказать *достаточность* условия (6.4.4) для существования системы «везде инерциальных» координат $\xi^\alpha(x)$, удовлетворяющих (6.4.1), построим в явном виде $\xi^\alpha(x)$. Прежде всего заметим, что в любой точке X можно найти матрицу $d^\alpha{}_\mu$, для которой справедливо соотношение

$$\eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}(X)\, d^\alpha{}_\mu d^\beta{}_\nu. \tag{6.4.5}$$

Так как $g^{\mu\nu}(X)$ — симметричная матрица, можно найти ортогональную матрицу $O^\alpha{}_\mu$, для которой матрица OgO^T диагональна, т. е.

$$O^\alpha{}_\mu g^{\mu\nu} O^\beta{}_\nu = D^{\alpha\beta},$$

где

$$D^{\alpha\beta} = \begin{cases} D^\alpha, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

[Мы предполагаем, что три собственных значения D^α положительны, а одно отрицательно, и можно всегда располагать строки $O^\alpha{}_\mu$ так, чтобы в них стояли положительные D^1, D^2 и D^3 и отрицательное D^0. Тогда, чтобы удовлетворить (6.4.5), необходимо лишь выбрать $d^i{}_\mu = D^i{}_\mu/\sqrt{D^i}$ для $i = 1, 2, 3$ и $d^0{}_\mu = D^0{}_\mu/\sqrt{-D^0}$.] Далее мы определяем величины $D^\alpha{}_\mu(x)$ дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial D^\alpha{}_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} D^\alpha{}_\lambda \tag{6.4.6}$$

с начальными условиями

$$D^\alpha{}_\mu = d^\alpha{}_\mu \quad \text{при} \quad x = X. \tag{6.4.7}$$

В предыдущем параграфе мы показали, что такие уравнения всегда можно решить при том условии, что $R^\lambda{}_{\mu\nu\varkappa}$ исчезает. (Под величинами $D^\alpha{}_\mu$ подразумеваются четыре ковариантных вектора $D^0{}_\mu$, $D^1{}_\mu$, $D^2{}_\mu$ и $D^3{}_\mu$, а не единый тензор.) Так как $\partial D^\alpha{}_\mu/\partial x^\nu$ симметрично по μ и ν, мы можем записать векторы $D^\alpha{}_\mu$ как градиенты скаляров, в качестве которых мы берем локально-инерциальные координаты $\xi^\alpha(x)$:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = D^\alpha{}_\mu, \tag{6.4.8}$$

причем начальные значения $\xi^\alpha(X)$ — это некоторые произвольные постоянные. Чтобы убедиться в том, что эти координаты ξ действительно удовлетворяют (6.4.1), заметим прежде всего, что

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(g^{\mu\nu} D^\alpha{}_\mu D^\beta{}_\nu\right) = 0. \tag{6.4.9}$$

Это можно проверить путем прямого вычисления или еще проще, заметив, что (6.4.6) говорит как раз о том, что $D^{\alpha}{}_{\mu;\,\rho}$ исчезает, а также исчезает $g^{\mu\nu}{}_{;\,\rho}$, следовательно, равно нулю и $(g^{\mu\nu}D^{\alpha}{}_{\mu}D^{\beta}{}_{\nu})_{;\,\rho}$. Но, поскольку $g^{\mu\nu}D^{\alpha}{}_{\mu}D^{\beta}{}_{\nu}$ есть скаляр, сказанное означает, что исчезает и обычная производная этой величины. Но (6.4.7) и (6.4.5) показывают, что $g^{\mu\nu}D^{\alpha}{}_{\mu}D^{\beta}{}_{\nu}$ равно $\eta^{\alpha\beta}$ при $x=X$, а поскольку эта величина является константой, то во всем пространстве установлено

$$\eta^{\alpha\beta}=g^{\mu\nu}D^{\alpha}{}_{\mu}D^{\beta}{}_{\nu}\ \text{(для всех } x). \tag{6.4.10}$$

Из (6.4.8) и (6.4.10) немедленно следует уравнение (6.4.1).

§ 5. Коммутации ковариантных дифференцирований

Существует другой путь, позволяющий убедиться в том, что $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$ указывает на наличие или на отсутствие реального гравитационного поля. Рассмотрим вторую ковариантную производную от ковариантного вектора V_{λ}:

$$V_{\mu;\,\nu;\,\kappa}=\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}V_{\mu;\,\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}V_{\mu;\,\lambda}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}V_{\lambda;\,\nu}=\frac{\partial^2 V_{\mu}}{\partial x^{\nu}\,dx^{\kappa}}-$$

$$-\frac{\partial V_{\lambda}}{\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-V_{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}\frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}+\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}V_{\sigma}-$$

$$-\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}\frac{dV_{\lambda}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}V_{\sigma}.$$

Члены, содержащие первые и вторые производные от V_{μ}, симметричны по ν и κ, но члены, включающие само V_{μ}, имеют антисимметричную часть:

$$V_{\mu;\,\nu;\,\kappa}-V_{\mu;\,\kappa;\,\nu}=-V_{\sigma}R^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa}. \tag{6.5.1}$$

Точно так же можно показать, что

$$V^{\lambda}{}_{;\,\nu;\,\kappa}-V^{\lambda}{}_{;\,\kappa;\,\nu}=V^{\sigma}R^{\lambda}_{\sigma\nu\kappa}. \tag{6.5.2}$$

Подобные формулы справедливы для любого тензора, например,

$$T^{\lambda}{}_{\mu;\,\nu;\,\kappa}-T^{\lambda}{}_{\mu;\,\kappa;\,\nu}=T^{\sigma}{}_{\mu}R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\kappa}-T^{\lambda}{}_{\sigma}R^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa}. \tag{6.5.3}$$

Таким образом, если тензор кривизны равен нулю, то ковариантные производные *коммутируют*, чего и следовало ожидать во всех системах координат, из которых можно перейти в систему координат Минковского.

§ 6. Алгебраические свойства

Алгебраические свойства тензора кривизны становятся намного яснее, если мы рассмотрим вместо $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$ его полностью ковариантную форму

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv g_{\lambda\sigma} R^{\sigma}_{\mu\nu\kappa}. \tag{6.6.1}$$

Используя (6.1.5) и (3.3.7), получаем

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g^{\sigma\rho} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right\} - \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g^{\sigma\rho} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\rho\kappa}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\rho}} \right\} + g_{\lambda\sigma} \{ \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\sigma}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta} \}.$$

С учетом соотношения

$$g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g^{\sigma\rho} = - g^{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g_{\lambda\sigma} = - g^{\sigma\rho} (\Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda} g_{\eta\sigma} + \Gamma^{\eta}_{\kappa\sigma} g_{\eta\lambda})$$

придаем этой формуле вид

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right] -$$

$$- [\Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda} g_{\eta\sigma} + \Gamma^{\eta}_{\kappa\sigma} g_{\eta\lambda}] \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + [\Gamma^{\eta}_{\nu\lambda} g_{\eta\sigma} + \Gamma^{\eta}_{\nu\sigma} g_{\eta\lambda}] \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} +$$

$$+ g_{\lambda\sigma} [\Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\sigma}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}].$$

Бóльшая часть членов типа ГГ сокращается, и в результате остается

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right] +$$

$$+ g_{\eta\sigma} [\Gamma^{\eta}_{\nu\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} - \Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}]. \tag{6.6.2}$$

Из формулы (6.6.2) видны алгебраические свойства тензора кривизны:

а) симметрия

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}; \tag{6.6.3}$$

б) антисимметрия

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = - R_{\mu\lambda\nu\kappa} = - R_{\lambda\mu\kappa\nu} = + R_{\mu\lambda\kappa\nu}; \tag{6.6.4}$$

в) цикличность

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0. \tag{6.6.5}$$

Мы уже отмечали, что при свертывании $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ получается тензор Риччи

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}. \tag{6.6.6}$$

Свойство симметрии а) показывает, что тензор Риччи симметричен

$$R_{\mu\varkappa} = R_{\varkappa\mu}, \tag{6.6.7}$$

а свойство антисимметрии б) утверждает, что $R_{\mu\varkappa}$, по существу, единственный тензор второго ранга, который может быть образован из $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, поскольку, умножая (6.6.4) на $g^{\lambda\nu}$, $g^{\lambda\mu}$ и $g^{\nu\varkappa}$, получаем

$$R_{\mu\varkappa} = -g^{\lambda\nu}R_{\mu\lambda\nu\varkappa} = -g^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\varkappa\nu} = +g^{\lambda\nu}R_{\mu\lambda\varkappa\nu},$$
$$g^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu\nu\varkappa} = g^{\nu\varkappa}R_{\lambda\mu\nu\varkappa} = 0.$$

Из свойства антисимметрии б) видим, что существует только один способ свертывания $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ для построения скаляра:

$$R \equiv g^{\lambda\nu}g^{\mu\varkappa}R_{\lambda\mu\nu\varkappa} = -g^{\lambda\nu}g^{\mu\varkappa}R_{\mu\lambda\nu\varkappa},$$
$$0 = g^{\lambda\mu}g^{\nu\varkappa}R_{\lambda\mu\nu\varkappa}.$$

Свойство в) исключает другой скаляр, который можно было бы образовать в четырехмерном пространстве:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\varkappa}R_{\lambda\mu\nu\varkappa} = 0.$$

§ 7. Кривизна в N-мерном пространстве *

Рассмотрим здесь общий случай, когда пространство имеет N измерений. Чтобы подсчитать число алгебраически независимых компонент $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, удобно принять *обозначения Петрова* [2], и считать $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ матрицей $R_{(\lambda\mu)\,(\nu\varkappa)}$ с «индексами» $(\lambda\mu)$ и $(\nu\varkappa)$. Исходя из свойства (6.6.4), отмечаем, что число независимых значений каждого «индекса» равно числу независимых элементов антисимметричной матрицы в N-мерном пространстве, т. е. $^1/_2N(N-1)$. Из условия (6.6.3) следует, что $R_{(\lambda\mu)\,(\nu\varkappa)}$ симметрична по этим «индексам», поэтому (6.6.3) и (6.6.4) сокращают число независимых компонент в $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ до числа независимых элементов симметричной матрицы в $^1/_2N(N-1)$-мерном пространстве, а это число равно

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}N(N-1)\right]\left[\frac{1}{2}N(N-1)+1\right] = \frac{1}{8}N(N-1)(N^2-N+2).$$

Далее свойства (6.6.3) и (6.6.4) делают также полностью антисимметричной циклическую сумму $R_{\lambda\mu\nu\varkappa} + R_{\lambda\varkappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\varkappa\mu}$, так что условие (6.6.5) накладывает еще $N(N-1)(N-2)(N-3)/4!$ дополнительных связей, оставляющих в $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ следующее число

*) Этот параграф лежит несколько в стороне от основной линии книги и может быть опущен при первом чтении.

независимых компонент:

$$C_N = \frac{1}{8} N(N-1)(N^2-N+2) - \frac{1}{24} N(N-1)(N-2)(N-3),$$

или, после приведения подобных членов,

$$C_N = \frac{1}{12} N^2 (N^2-1). \tag{6.7.1}$$

В одномерном пространстве тензор кривизны R_{1111} всегда равен нулю, что видно из условий (6.6.4) или (6.6.5) или из формулы (6.7.1), определяющей $C_1 = 0$ независимых компонент. Читатель вправе удивиться тому, что кривая линия имеет нулевую кривизну. Однако это лишний раз подчеркивает тот факт, что $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ отражает только внутренние свойства пространства, а не то, как оно вкладывается в пространство более высокой размерности. Действительно, мы отмечали, что правило преобразования метрического тензора в одномерном пространстве имеет вид

$$g'_{11} = \left(\frac{dx}{dx'}\right)^2 g_{11},$$

так что g'_{11} можно сделать в нем равным ± 1 повсюду, выбрав

$$x' = \int dx \sqrt{\pm g_{11}}.$$

В двумерном пространстве условие (6.7.1) оставляет в $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ только одну независимую компоненту, которой можно считать R_{1212}; другие компоненты связаны с R_{1212} соотношением (6.6.4):

$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121},$$

$$R_{1111} = R_{1122} = R_{2211} = R_{2222} = 0.$$

Эти формулы можно записать в более компактной форме:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = (g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) \frac{R_{1212}}{g}$$

где g — детерминант, равный $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. Свертка λ и ν дает тензор Риччи

$$R_{\mu\kappa} = g_{\mu\kappa} \frac{R_{1212}}{g}, \tag{6.7.2}$$

а свертка μ и κ приводит к скалярной кривизне

$$R = \frac{2R_{1212}}{g}. \tag{6.7.3}$$

Таким образом, тензор кривизны равен

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} R(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}). \tag{6.7.4}$$

Гауссова кривизна K, введенная в § 1, гл. 1, связана с R следующим образом:

$$K \equiv -\frac{R}{2} = -\frac{R_{1212}}{g}. \tag{6.7.5}$$

(Коэффициент $-1/2$ имеет чисто историческое происхождение.) Выражение (1.1.12) следует из (6.6.2) и (6.7.5).

В трехмерном пространстве формула (6.7.1) говорит о том, что тензор кривизны имеет шесть независимых компонент. Это также число независимых компонент тензора Риччи $R_{\mu\varkappa}$ в трехмерном пространстве, а потому можно предвидеть, что $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ в этом случае выражается только через $R_{\mu\varkappa}$. Используя свойства ковариантности, симметрии и свертывания $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, можем угадать, что это соотношение имеет вид

$$R_{\lambda\mu\nu\varkappa} = g_{\lambda\nu}R_{\mu\varkappa} - g_{\lambda\varkappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\varkappa} + g_{\mu\varkappa}R_{\lambda\nu} - \\ - \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\varkappa} - g_{\lambda\varkappa}g_{\mu\nu})\,R. \tag{6.7.6}$$

Чтобы доказать (6.7.6), выберем систему координат, в которой $g_{\mu\nu}$ исчезает при μ, неравном ν, в некоторой точке X. (Этого можно достигнуть, выбрав $\partial x'^{\mu}/\partial x^{\lambda}$ в точке X в виде ортогональной матрицы, которая диагонализирует $g_{\mu\nu}$ в X.) В этой системе в точке X имеем

$$R_{12} = g^{33}R_{1323},$$

так что в соответствии с (6.7.6) выполняется соотношение

$$R_{1323} = g_{33}R_{12}.$$

Кроме того, имеем

$$R_{11} = g^{22}R_{1212} + g^{33}R_{1313},$$
$$R_{22} = g^{33}R_{2323} + g^{11}R_{2121},$$

откуда, опять-таки в соответствии с (6.7.6), получаем

$$g_{22}R_{11} + g_{11}R_{22} = 2R_{1212} + g^{23}(g_{22}R_{1313} + g_{11}R_{2323}) = \\ = R_{1212} + g_{11}g_{22}(g^{11}g^{22}R_{1212} + g^{11}g^{33}R_{1313} + g^{22}g^{33}R_{2323})$$

или

$$R_{1212} = g_{22}R_{11} + g_{11}R_{22} - \frac{1}{2}g_{11}g_{22}R.$$

Остальные независимые компоненты, $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, R_{1223}, R_{1213}, R_{2323} и R_{3131}, могут быть получены из R_{1323} и R_{1212} перестановкой индексов 1, 2, 3. Таким образом, (6.7.6) справедливо и для этих компонент. Так как выражение (6.7.6) найдено в системе координат, которые ортогональны в точке X, и является явно ковариантным выражением, оно справедливо в общем случае.

Полный тензор Римана — Кристоффеля необходим для описания кривизны пространства только в том случае, когда число измерений пространства равно четырем и выше. Например, в четырехмерном пространстве [см. (6.7.1)] приходим к тензору кривизны с числом независимых компонент, равным двадцати, а $R_{\mu\varkappa}$ имеет только 10 независимых компонент, так что $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ имеет 10 компонент, помимо тех, что выражаются через $R_{\mu\varkappa}$.

В общем случае кривизну N-мерного пространства описывает тензор $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ своими $^1/_{12}N^2\,(N^2-1)$-компонентами, однако описывает неинвариантным образом, так как значения этих компонент зависят не только от внутренних свойств пространства, но и от конкретного выбора системы координат. Инвариантные характеристики кривого пространства — это *скаляры*, которые надо построить из $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ и $g_{\mu\nu}$. Подсчитаем число таких скаляров. Всего мы можем задать в данной точке X при произвольном преобразовании координат $x \to x'$ N^2 величин $\partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu}$. Следовательно, на $^1/_{12}N^2\,(N^2-1)$ независимых компонент $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ и $^1/_2N\,(N+1)$ независимых компонент $g_{\mu\nu}$ в этой точке могут быть наложены с помощью произвольных преобразований координат N^2 алгебраических условий. Поэтому число независимых скаляров, которые можно построить из $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ и $g_{\mu\nu}$, равняется

$$\frac{1}{12}N^2(N^2-1)+\frac{1}{2}N(N+1)-N^2=\frac{1}{12}N(N-1)(N-2)(N+3). \tag{6.7.7}$$

Случай $N = 2$ — исключение из этого правила, поскольку в двумерном пространстве существует однопараметрическая подгруппа преобразований координат, которая не затрагивает $g_{\mu\nu}$ и $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$. Истинное число инвариантов в этом случае не нуль, а единица, что соответствует самому скаляру кривизны. Подобного эффекта нет для пространств более высоких размерностей, так что для $N \geqslant 3$ правило (6.7.7) справедливо. В случае $N = 3$ из (6.7.7) следует, что имеются *три* скалярные кривизны, которые удобно выбрать в виде трех корней секулярного уравнения

$$\mathrm{Det}\,(R_{\mu\nu}-\lambda g_{\mu\nu})=0$$

или, эквивалентно, в виде трех величин

$$R,\quad R_{\mu\nu}R^{\mu\nu},\quad \frac{\mathrm{Det}\,R}{\mathrm{Det}\,g}.$$

Для $N = 4$ выражение (6.7.7) приводит к *четырнадцати* скалярам кривизны. Чтобы перечислить их, а также для других целей, удобно разложить $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ таким образом, чтобы он зависел только от тензора Риччи и величины $C_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, которая не имеет никаких нетривиальных сверток. В пространствах $N \geqslant 3$ измерений такое

разложение выглядит следующим образом:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv \frac{1}{N-2}(g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu}) - \\ - \frac{R}{(N-1)(N-2)}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) + C_{\lambda\mu\nu\kappa}.$$

Тензор $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$ называется *тензором Вейля* [3] или *конформным тензором*. (Последнее название дано потому, что необходимым и достаточным условием существования координатной системы, в которой $g_{\mu\nu}$ пропорционально постоянной матрице во всем пространстве, является равенство нулю тензора $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$ во всем этом пространстве, см., например, [4].) Этот тензор имеет те же самые алгебраические свойства, что и $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$, и, кроме того, удовлетворяет $^1/_2N(N+1)$ условиям

$$C^{\lambda}{}_{\mu\lambda\kappa} = 0,$$

так что число его линейно-независимых компонент равно

$$\frac{1}{12}N^2(N^2-1) - \frac{1}{2}N(N+1) = \frac{1}{12}N(N+1)(N+2)(N-3).$$

(Из выражения (6.7.6) сразу следует, что для $N = 3$ имеем $C_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$.) Исключая вырожденные случаи, все инварианты кривизны могут быть составлены только из компонент тензора Вейля (при том единственном выборе системы координат, при котором $R_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ диагональны, причем элементами $g_{\mu\nu}$ являются $+1$, -1 и 0) и собственных значений $R_{\mu\nu}$. Однако этот подсчет неправилен, если некоторые собственные значения $R_{\mu\nu}$ вырождены. Особенно интересный случай возникает, когда $R_{\mu\nu}$ равен нулю, что, как мы увидим в следующей главе, соответствует наличию физических гравитационных полей в пустом пространстве. В этом случае инварианты кривизны для $N = 4$ суть 10 нулевых компонент $R_{\mu\nu}$ (равенство нулю тензора — инвариантное утверждение) и четыре величины

$$C^{\lambda\mu\nu\kappa}C_{\lambda\mu\nu\kappa}, \quad \frac{\varepsilon^{\lambda\mu}{}_{\rho\sigma}C^{\rho\sigma\nu\kappa}C_{\lambda\mu\nu\kappa}}{\sqrt{g}}.$$

$$C_{\lambda\mu\nu\kappa}C^{\nu\kappa\rho\sigma}C_{\rho\sigma}{}^{\lambda\mu}, \quad \frac{C_{\lambda\mu\nu\kappa}C^{\nu\kappa\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma}{}^{\tau\xi}C_{\tau\xi}{}^{\lambda\mu}}{\sqrt{g}}.$$

Петров [2] дал эквивалентное описание четырех неисчезающих инвариантов кривизны как корней секулярного уравнения и классифицировал различные алгебраические типы тензора Вейля в соответствии с вырожденностью этих корней. В заключение подчеркнем, что (6.7.7) дает число *алгебраически* независимых инвариантов кривизны. Среди этих инвариантов, вообще говоря, имеются дифференциальные связи, так что число функционально независимых инвариантов кривизны меньше, чем определяемое по формуле (6.7.7).

§ 8. Тождества Бианки

Тензор кривизны удовлетворяет важным дифференциальным тождествам в дополнение к алгебраическим тождествам, приведенным в § 6. Легче всего эти тождества получить, вводя в рассматриваемой точке локально-инерциальную систему координат, в которой $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ (но не ее производные) равны нулю в этой точке. Тогда в точке x выражение (6.6.1) дает

$$R_{\lambda\mu\nu\varkappa;\,\eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\eta}}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\varkappa}\,\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}\,\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\varkappa}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\lambda}}\right).$$

Все другие члены — по крайней мере первого порядка по Г. Путем циклической перестановки ν, $\varkappa$ и η получаем *тождества Бианки*:

$$R_{\lambda\mu\nu\varkappa;\,\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\,\varkappa} + R_{\lambda\mu\varkappa\eta;\,\nu} = 0. \tag{6.8.1}$$

Эти тождества явно ковариантны, так что если они найдены в какой-либо инерциальной системе, то тем самым они найдены и в общем случае. (Их можно, конечно, проверить также с помощью прямых вычислений.)

Особенно полезна нам будет свернутая форма (6.8.1). С учетом того, что ковариантные производные от $g^{\lambda\nu}$ исчезают, свертывая λ и ν, находим

$$R_{\mu\varkappa;\,\eta} - R_{\mu\eta;\,\varkappa} + R^{\nu}{}_{\mu\varkappa\eta;\,\nu} = 0. \tag{6.8.2}$$

Свертывая это соотношение еще раз, получаем

$$R_{;\,\eta} - R^{\mu}{}_{\eta;\,\mu} - R^{\nu}{}_{\eta;\,\nu} = 0,$$

или

$$\left(R^{\mu}{}_{\eta} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\eta}R\right)_{;\,\mu} = 0. \tag{6.8.3}$$

Эквивалентная, но более известная формула имеет вид

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\,\mu} = 0. \tag{6.8.4}$$

§ 9. Геометрическая аналогия *

Ранее в этой главе мы видели, что неравенство нулю тензора $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ отражает существование гравитационного поля. В гл. 1 мы также указывали, что Гауссу пришлось ввести «гауссову кривизну» $K = -R/2$ как меру отклонения двумерной геометрии от евклидовой, а Риман впоследствии ввел тензор кривизны $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, чтобы обобщить понятие кривизны на случай пространств

*) Этот и следующий параграфы лежат несколько в стороне от основной линии книги и могут быть опущены при первом чтении.

большего числа измерений. Таким образом, нет ничего удивительного, что Эйнштейн и его последователи рассматривали эффекты гравитационного поля как следствие изменений геометрии пространства и времени. Одно время казалась обоснованной надежда найти геометрическую формулировку всей остальной физики, но эта надежда не оправдалась, а геометрическая интерпретация теории гравитации свелась просто к аналогии, оставившей нам такие термины, как «метрика», «аффинная связность», «кривизна», и не очень полезна в других отношениях. Важно, что мы можем делать предсказания относительно изображений на астрономических снимках, о частотах спектральных линий и т. д., и. в конце концов, не так уж важно, приписываем ли мы эти предсказания физическим воздействиям гравитационных полей на движение планет и фотонов или искривлению пространства и времени. (Читателя следует предупредить о том, что такие взгляды не являются ортодоксальными и встречают возражения со стороны многих специалистов по теории относительности.)

Все же, игнорируя предыдущее замечание, полезно привести без доказательства выражение, показывающее, как тензор $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ связан с кривизной риманова пространства. Рассматривая точку X в пространстве произвольного числа измерений и задавая в ней два вектора a^μ и b^μ, можно построить семейство «геодезических кривых» $x^\mu = x^\mu(\tau, \alpha, \beta)$, проходящих через эту точку; уравнения оказываются следующими:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0,$$

$$\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)_{x=X} = \alpha a^\mu + \beta b^\mu.$$

Числа α и β здесь могут принимать все действительные значения. Эти кривые заполнят двумерную поверхность $S(a, b)$, содержащую точку X, и гауссова кривизна этой поверхности в точке X будет равна (см. [4], разд. 28)

$$K(a, b) = \frac{R_{\lambda\mu\nu\varkappa}a^\lambda b^\mu a^\nu b^\varkappa}{(g_{\lambda\varkappa}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\varkappa})\,a^\lambda b^\mu a^\nu b^\varkappa}. \qquad (6.9.1)$$

Из соотношения (6.7.4) следует, что в двух измерениях $K(a, b)$ не зависит от a и b и равно как раз $-R/2$.

§ 10. Геодезическая девиация*

Введение тензора кривизны мотивировалось необходимостью найти подходящие уравнения поля тяготения. Однако тензор кривизны полезен также для описания воздействия гравитации на физические системы.

Рассмотрим, например, две падающие рядом частицы с траекториями $x^\mu(\tau)$ и $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$. Уравнения движения для них имеют вид

$$0 = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x)\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau},$$

$$0 = \frac{d^2}{d\tau^2}[x^\mu + \delta x^\mu] + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x+\delta x)\frac{d}{d\tau}[x^\nu + \delta x^\nu]\frac{d}{d\tau}[x^\lambda + \delta x^\lambda].$$

Если вычесть одно уравнение из другого и оставить только члены первого порядка по δx^μ, получим

$$0 = \frac{d^2\delta x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial\Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho}\delta x^\rho\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d\delta x^\lambda}{d\tau}$$

или, выразив это через ковариантные производные вдоль кривой $x^\mu(\tau)$ (см. § 9 гл. 4), придадим этому уравнению вид

$$\frac{D^2}{D\tau^2}\delta x^\lambda = R^\lambda{}_{\nu\mu\rho}\delta x^\mu\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}. \qquad (6.10.1)$$

Оказывается, что, хотя свободно падающая частица находится в состоянии покоя в системе координат, падающей вместе с частицами, две свободно падающие рядом частицы будут находиться в относительном движении, обнаруживающем наличие гравитационного поля с точки зрения наблюдателя, падающего вместе с ними. Это, конечно, не является нарушением принципа эквивалентности, поскольку эффект, связанный с правой частью уравнения (6.10.1), становится настолько малым, что им можно пренебречь, когда удаление частиц много меньше, чем характерные размеры поля.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton University Press, 1926 (см. перевод: *Эйзенхарт Л. П.*, Риманова геометрия, ИЛ, 1948).
Schouten J. A., Ricci-Calculus, Springer-Verlag, 1954 (см. перевод: *Схоутен Я. А.*, Тензорный анализ для физиков, «Наука», 1965).
См. также библиографию к гл. 3.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Eisenhart L. P.*, Continuous Groups of Transformations, Dover Publications, 1961, p. 1 (см. перевод: *Эйзенхарт Л. П.*, Непрерывные группы преобразований, ИЛ, 1947).
2. *Петров А. З.*, Учен. зап. Казанск. Гос. унив., **114**, № 8, 55 (1954); Пространства Эйнштейна, Физматгиз, 1961.
3. *Weyl H.*, Mat. Zs., **2**, 384 (1918).
4. *Eisenhart L. P.*, Riemannian Geometry, Princeton University Press, 1926, Sec. 28 (см. перевод: *Эйзенхарт Л. П.*, Риманова геометрия, ИЛ, 1948).

В общую теорию относительности Вы поверите, когда изучите ее. Поэтому я ни единым словом не буду ее защищать перед Вами.

А. Эйнштейн, из письма к А. Зоммерфельду, 8 февраля 1916 г.

Глава 7
УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ЭЙНШТЕЙНА

Главы с 3 по 5 содержали изложение первой половины теории гравитации: математическое описание гравитационных полей, которое определяет их воздействие на произвольные физические системы. В этой главе мы начнем изложение второй ее половины, а именно дифференциальных уравнений для самого гравитационного поля.

§ 1. Получение уравнений поля

Уравнения поля тяготения неизбежно более сложны, чем уравнения электродинамики. Уравнения Максвелла линейны, поскольку само электромагнитное поле не переносит заряд, в то время как гравитационное поле переносит энергию и импульс (см. § 3 гл. 5) и должно, следовательно, давать вклад в свой собственный источник. Поэтому уравнения гравитационного поля должны быть нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, в которых нелинейность отражает воздействие гравитации самой на себя.

Разбирая эти нелинейные эффекты, мы снова будем руководствоваться принципом эквивалентности. В любой точке X в произвольно сильном гравитационном поле мы можем задать локально-инерциальную систему координат, такую, что

$$g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta}, \tag{7.1.1}$$

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\gamma}}\right)_{x=X} = 0. \tag{7.1.2}$$

Следовательно, в точке x, находящейся вблизи X. метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ может отличаться от $\eta_{\alpha\beta}$ только членами, квадратичными по $x - X$. В этой системе координат гравитационное поле является слабым вблизи точки X, и мы можем думать, что поле описывается *линейными* дифференциальными уравнениями в частных производных. Если же мы знаем эти уравнения для слабых полей, мы можем найти уравнения поля в общем случае преобразованием координат, обратным тому, которое делает это поле

слабым. К сожалению, из опыта мы очень мало знаем об уравнениях слабых полей. Причину этого не надо искать очень глубоко; просто гравитационное излучение так слабо испускается и поглощается веществом, что оно до сих пор не было зарегистрировано. Но, найдя оправдание для нашей необразованности, мы все же не сможем следовать прямым путем, как в предыдущих главах, а должны в какой-то мере пытаться угадать ответ.

Прежде всего напомним, что в случае слабого статического поля, создаваемого нерелятивистским телом с плотностью массы ρ, 00-компонента метрического тензора приближенно равна

$$g_{00} \approx -(1+2\phi).$$

[См. выражение (3.4.5).] Здесь ϕ — ньютоновский потенциал, задаваемый уравнением Пуассона

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho,$$

где G — постоянная Ньютона, равная $6{,}670 \cdot 10^{-8}$ в единицах СГС. Плотность энергии T_{00} для движущегося с нерелятивистской скоростью вещества приближенно равна плотности его массы:

$$T_{00} \approx \rho.$$

Объединяя эти соотношения, получаем

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}. \tag{7.1.3}$$

Это уравнение *по предположению* справедливо только для слабых статических полей, создаваемых нерелятивистским веществом, и в том виде, в каком оно записано, оно даже не лоренц-инвариантно. Однако (7.1.3) приводит нас к предположению о том, что уравнения слабых полей для распределения энергии и импульса $T_{\alpha\beta}$ общего вида имеют форму

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}, \tag{7.1.4}$$

где $G_{\alpha\beta}$ есть линейная комбинация метрики и ее первых и вторых производных. Тогда из принципа эквивалентности следует, что уравнения, которым подчиняются гравитационные поля произвольной напряженности, должны иметь вид

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{7.1.5}$$

где $G_{\mu\nu}$ — это тензор, сводящийся к $G_{\alpha\beta}$ в случае слабых полей.

Вообще говоря, из метрического тензора и его производных можно образовать много тензоров $G_{\mu\nu}$, которые сводятся к заданному $G_{\alpha\beta}$ в пределе слабых полей. Представим себе, что $G_{\mu\nu}$ может разлагаться в сумму произведений производных от метрики, и классифицируем слагаемые по полному числу N производных от компонент метрики. (Например, слагаемое с $N = 3$ может быть

линейным по третьим производным от метрики, или по произведению первой производной на вторую производную, или по произведению первых трех производных.)

В целом $G_{\mu\nu}$ должен иметь размерность второй производной, так что каждое слагаемое с $N \neq 2$ оказывается умноженным на постоянную, имеющую размерность длины в степени $N-2$. Такие члены будут пренебрежимо малы для гравитационных полей достаточно больших или малых пространственно-временных масштабов, если $N > 2$ или $N < 2$ соответственно. Для того чтобы избавиться от неоднозначности в выборе $G_{\mu\nu}$, предположим, что уравнения гравитационного поля *масштабно-однородны*, т. е. допустимы только члены с $N = 2$.

Рассмотрим левую часть уравнения поля (7.1.5). Мы знаем о ней, что

а) по определению $G_{\mu\nu}$ является тензором;

б) по предположению $G_{\mu\nu}$ состоит только из членов с $N = 2$, где N — полное число производных от компонент метрики, т. е. $G_{\mu\nu}$ содержит только члены, линейные по второй производной или квадратичные по первым производным от метрики;

в) поскольку $T_{\mu\nu}$ симметричен, то симметричен и тензор $G_{\mu\nu}$;

г) поскольку $T_{\mu\nu}$ сохраняется (в смысле ковариантного дифференцирования), то сохраняется и $G_{\mu\nu}$:

$$G^{\mu}{}_{\nu;\,\mu} = 0; \tag{7.1.6}$$

д) в случае слабого стационарного поля, создаваемого нерелятивистски движущимся веществом, 00-компонента (7.1.5) должна сводиться к (7.1.3); таким образом, в этом пределе имеем

$$G_{00} \approx \nabla^2 g_{00}. \tag{7.1.7}$$

Этих условий как раз достаточно для нахождения $G_{\mu\nu}$.

В § 2 гл. 6 мы видели, что наиболее общий путь построения поля, удовлетворяющего условиям а) и б),— это свертывание тензора кривизны $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\varkappa}$. Свойство антисимметрии $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, обсужденное в § 6 гл. 6, показывает, что существуют только два тензора, которые можно образовать путем свертывания $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$; это тензор Риччи $R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\varkappa}$ и скалярная кривизна $R = R^{\mu}{}_{\mu}$. Следовательно, условия а) и б) требуют, чтобы $G_{\mu\nu}$ имел вид

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R, \tag{7.1.8}$$

где C_1 и C_2 — константы. Эта форма автоматически симметрична [см. свойство (6.6.7)], так что условие в) не дает нам ничего нового. Используя тождества Бианки (6.8.3), получаем ковариантную дивергенцию $G_{\mu\nu}$ в виде

$$G^{\mu}{}_{\nu;\,\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) R_{;\,\nu},$$

а потому условие г) допускает две возможности: либо $C_2 = -C_1/2$, либо $R_{;\nu}$ равно нулю повсюду. Вторую возможность можно исключить, поскольку (7.1.8) и (7.1.5) приводят к соотношению

$$G^{\mu}{}_{\mu} = (C_1 + 4C_2)\, R = -8\pi G T^{\mu}{}_{\mu}.$$

Поэтому, если $R_{;\nu} \equiv \partial R/\partial x^{\nu}$ равно нулю, то равно нулю и $\partial T^{\mu}_{\mu}/\partial x^{\nu}$, что явно не так в случае неоднородного нерелятивистского вещества. Тогда приходим к заключению, что $C_2 = -C_1/2$, и переписываем (7.1.8) следующим образом:

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right). \tag{7.1.9}$$

Используем, наконец, условие д), чтобы определить постоянную C_1. Для нерелятивистской системы всегда выполняется неравенство $| T_{ij} | \ll | T_{00} |$, следовательно, мы рассматриваем здесь случай $| G_{ij} | \ll | G_{00} |$ или, используя (7.1.9),

$$R_{ij} \approx \frac{1}{2} g_{ij} R.$$

Кроме того, мы имеем дело со слабыми полями, так что $g_{\alpha\beta} \approx n_{\alpha\beta}$. Поэтому скалярная кривизна определяется так:

$$R \approx R_{kk} - R_{00} \approx \frac{3}{2} R - R_{00},$$

или

$$R \approx 2R_{00}. \tag{7.1.10}$$

Подставляя (7.1.10) и (7.1.1) в (7.1.9), находим

$$G_{00} \approx 2C_1 R_{00}. \tag{7.1.11}$$

Чтобы вычислить R_{00} для слабого поля, можно использовать линейную часть $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$, взяв ее из выражения (6.6.2):

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}\, \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}\, \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}\, \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}\, \partial x^{\lambda}} \right].$$

Если поле статическое, все временные производные исчезают и необходимые нам компоненты равны

$$R_{0000} \approx 0, \quad R_{i0j0} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i\, \partial x^j}.$$

Следовательно, (7.1.11) можно переписать так:

$$G_{00} \approx 2C_1 (R_{i0i0} - R_{0000}) \approx C_1 \nabla^2 g_{00}.$$

Сравнивая это выражение с (7.1.7), находим, что условие д) выполняется тогда и только тогда, когда $C_1 = 1$.

Положив $C_1 = 1$ в (7.1.9), завершаем вычисление $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{7.1.12}$$

Привлекая теперь (7.1.5), получаем *уравнения поля Эйнштейна*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{7.1.13}$$

Иногда полезна альтернативная форма. Свертка (7.1.13) с $g^{\mu\nu}$ приводит к соотношению

$$R - 2R = -8\pi G T^{\mu}{}_{\mu}$$

или

$$R = 8\pi G T^{\mu}{}_{\mu}, \tag{7.1.14}$$

которое при подстановке в (7.1.13) дает

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\lambda} \right). \tag{7.1.15}$$

Естественно, можно возвратиться от (7.1.15) к (7.1.14) и (7.1.13), так что (7.1.13) и (7.1.15) следует рассматривать как полностью эквивалентные формы уравнения поля Эйнштейна.

В вакууме $T_{\mu\nu}$ исчезает, а потому из (7.1.15) следует, что уравнения поля Эйнштейна в *пустом пространстве* — это просто

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{7.1.16}$$

В пространстве-времени двух или трех измерений это означало бы равенство нулю полного тензора кривизны $R_{\lambda\mu\nu\varkappa}$ и соответственно отсутствие гравитационного поля (см. § 4 гл. 6). Только при четырех и выше измерениях в пустом пространстве могут существовать истинные гравитационные поля.

Мы могли бы по нашему желанию ослабить условие б) и допустить в $G_{\mu\nu}$ члены, содержащие менее двух производных от метрики. Возможность использовать первые производные не вводит никаких новых членов в $G_{\mu\nu}$ (см. § 1 гл. 6), но если мы используем сам метрический тензор, то может появиться одно новое слагаемое, равное $g_{\mu\nu}$, умноженному на постоянную λ. Уравнения поля читались бы тогда так:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}.$$

Член $\lambda g_{\mu\nu}$ был впервые написан Эйнштейном [1] для преодоления трудностей в космологии (которые потом исчезли); по этой причине λ называют *космологической постоянной*. Этот член удовлетворяет условиям а), в), г), но не удовлетворяет условию д), а потому, чтобы не портить ньютоновскую теорию тяготения, λ должно быть очень мало. Мы везде в этой книге, исключая гл. 16, будем считать, что $\lambda = 0$.

§ 2. Другой вывод *

При выводе уравнений Эйнштейна, приведенном в предыдущем параграфе, очень важным оказалось предположение о том, что левая сторона $G_{\mu\nu}$ — тензор, зависящий лишь от метрики и ее первых и вторых производных. Можно было бы рассмотреть более общий тензор, который включал бы элементы, не связанные с метрическим тензором и его производными, такой, как

$$\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}_{X}(x)} \frac{\partial^{3} \xi^{\alpha}_{X}(x)}{\partial x^{\nu}\, \partial x^{\lambda}\, dx^{\rho}}\right)_{x=X}, \tag{7.2.1}$$

где $\xi^{\alpha}_{X}(x)$ — это координаты, локально-инерциальные в точке X. [Ссылки на точные определения (3.3.2) и (3.3.3) метрики и аффинной связности показывают, что (7.2.1) не связано с их производными.] Такой тензор можно было бы построить так:

$$G_{\mu\nu} \equiv \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}_{X}(x)}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}_{X}(x)}{\partial x^{\nu}} G^{X}_{\alpha\beta}(x)\right)_{x=X}, \tag{7.2.2}$$

где $G^{X}_{\alpha\beta}$ — наиболее общая возможная линейная комбинация вторых производных от метрического тензора в системе координат ξ_X, удовлетворяющей условиям лоренц-ковариантности и симметрии, т. е.

$$G_{\alpha\beta} = a_1 \Box^2 g_{\alpha\beta} + a_2 \left(\frac{\partial^2 g_{\beta}{}^{\nu}}{\partial \xi^{\alpha}\, \partial \xi^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\alpha}{}^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}\, \partial \xi^{\nu}}\right) + \\ + a_3 \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\nu\delta}}{\partial \xi^{\nu}\, \partial \xi^{\delta}} + b_1 \frac{\partial^2 g^{\nu}{}_{\nu}}{\partial \xi^{\alpha}\, d\xi^{\beta}} + b_2 \eta_{\alpha\beta} \Box^2 g^{\nu}{}_{\nu}, \tag{7.2.3}$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 — пять произвольных безразмерных констант. [Мы опустили символ X. Здесь все индексы поднимаются и опускаются с помощью тензоров Минковского $\eta^{\alpha\beta}$ и $\eta_{\alpha\beta}$, а $\Box^2$ есть даламбертиан $\Box^2 \equiv \eta^{\alpha\beta} (\partial/\partial\xi^{\alpha}) (\partial/\partial\xi^{\beta})$.] При совершенно произвольных значениях введенных выше пяти констант a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 тензор $G_{\mu\nu}$ зависел бы от посторонних элементов, таких, как (7.2.1). Однако замечательно то, что, используя условие сохранения энергии-импульса и учитывая справедливость ньютоновской теории в пределе слабых стационарных полей, создаваемых нерелятивистским веществом, можно найти такие строгие ограничения на константы $a_1, \ldots, b_2$, что члены, включающие (7.2.1), выпадают и мы получаем теорию Эйнштейна.

В случае слабых полей требование сохранения энергии-импульса приводит к обычному закону сохранения $\partial T^{\alpha}{}_{\beta}/\partial \xi^{\alpha} = 0$,

*) Этот параграф лежит несколько в стороне от основной линии книги и может быть опущен при первом чтении.

и, следовательно, предполагаемые уравнения поля $G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}$ накладывают условие

$$0 = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} G^\alpha{}_\beta = (a_1 + a_2)\,\Box^2 \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} g^\alpha{}_\beta + \\ + (a_2 + a_3)\left(\frac{\partial}{\partial \xi^\beta}\frac{\partial^2 g^{\gamma\delta}}{\partial \xi^\gamma\,\partial \xi^\delta}\right) + (b_1 + b_2)\,\Box^2 \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} g^\gamma{}_\gamma.$$

Поэтому $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$ и $b_1 + b_2$ должны равняться нулю, что дает

$$G_{\alpha\beta} = a_1\left\{\Box^2 g_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 g_\beta{}^\gamma}{\partial \xi^\alpha\,\partial \xi^\gamma} - \frac{\partial^2 g_\alpha{}^\gamma}{\partial \xi^\beta\,\partial \xi^\gamma} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\gamma\delta}}{\partial \xi^\gamma\,\partial \xi^\delta}\right\} + \\ + b_1\left\{\frac{\partial^2 g^\gamma{}_\gamma}{\partial \xi^\alpha\,\partial \xi^\beta} - \eta_{\alpha\beta}\,\Box^2 g^\gamma{}_\gamma\right\}. \quad (7.2.4)$$

Чтобы определить a_1 и b_1, перейдем к ньютоновскому пределу. Для статического поля (7.2.4) дает

$$G_{ii} + G_{00} = a_1 \nabla^2 (g_{ii} + g_{00}) - b_1 \nabla^2 (g_{ii} - g_{00}).$$

(По повторяющимся латинским индексам производится суммирование по значениям 1, 2, 3.) Для нерелятивистской системы, состоящей из вещества, тензор $|\,T_{ij}\,|$ много меньше чем $|\,T_{00}\,|$, так что мы получаем уравнение поля в виде

$$(a_1 + b_1)\,\nabla^2 g_{00} + (a_1 - b_1)\,\nabla^2 g_{ii} = -8\pi G T_{00}. \quad (7.2.5)$$

Мы хотим, чтобы уравнения поля в этом пределе *приводили* к закону Ньютона:

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00},$$

но (7.2.5) — единственное из уравнений поля, включающее только g_{00} и/или g_{ii}, так что мы должны требовать, чтобы $a_1 = b_1 = 1/2$. Для слабых полей левая часть уравнения тогда имеет вид

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left\{\Box^2 g_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 g_\beta{}^\gamma}{\partial \xi^\alpha\,\partial \xi^\gamma} - \frac{\partial^2 g_\alpha{}^\gamma}{\partial \xi^\beta\,\partial \xi^\gamma} + \frac{\partial^2 g^\gamma{}_\gamma}{\partial \xi^\alpha\,\partial \xi^\beta}\right\} + \\ + \frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial^2 g^{\gamma\delta}}{\partial \xi^\gamma\,\partial \xi^\delta} - \Box^2 g^\gamma{}_\gamma\right\}. \quad (7.2.6)$$

Но выражение (6.6.2) показывает, что в случае слабого поля тензор Риччи

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left\{\Box^2 g_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 g_\beta{}^\gamma}{\partial \xi^\alpha\,\partial \xi^\gamma} - \frac{\partial^2 g_\alpha{}^\gamma}{\partial \xi^\beta\,\partial \xi^\gamma} + \frac{\partial^2 g^\gamma{}_\gamma}{\partial \xi^\alpha\,\partial \xi^\beta}\right\},$$

а потому (7.2.5) дает следующее уравнение поля:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R = -8\pi G T_{\alpha\beta}. \tag{7.2.7}$$

Тогда для произвольного поля принцип эквивалентности немедленно определяет уравнения Эйнштейна в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{7.2.8}$$

поскольку (7.2.8) общековариантно и сводится к (7.2.6) в локально-инерциальных системах координат. Таким образом, если нам потребуется более общее уравнение, чем эйнштейновское, которое в пределе слабых полей сводится к уравнению второго порядка, имеющему левую часть в виде (7.2.4), мы должны допустить появление новых элементов, таких, как (7.2.1), и должны отказаться от возможности получения ньютоновской теории в предельном случае.

§ 3. Теория Бранса и Дикке

Известно, что дальнодействующие силы передаются гравитационным полем $g_{\mu\nu}$ и электромагнитным потенциалом A_μ. Естественно тогда предположить, что могут существовать и дальнодействующие силы, порождаемые скалярными полями. Соответствующие теории предлагались до создания общей теории относительности. В этом параграфе описывается наиболее поздняя и, возможно, наиболее обоснованная теория, в которой скалярное поле также отвечает за гравитацию. Это теория, созданная Брансом и Дикке [2]. Эквивалентная формулировка дана в статье [3].

Отправным пунктом теории Бранса и Дикке является принцип Маха, утверждающий, что явление инерции должно возникать как следствие ускорений относительно общего распределения массы во Вселенной (см. § 3 гл. 1). Таким образом, инерциальные массы различных элементарных частиц не должны быть фундаментальными постоянными, но скорее должны определяться взаимодействием частиц с некоторым космологическим полем. Кроме того, абсолютный масштаб массы элементарных частиц (в противоположность их отношениям, которые, вероятно, никак не связаны с космологическим полем) может быть определен только путем измерения гравитационных ускорений Gm/r^2. В другой формулировке это означает то, что гравитационная постоянная G должна быть связана со средним значением скалярного поля ϕ, которое в свою очередь связано с плотностью масс во Вселенной.

Простейшим общековариантным полевым уравнением такого скалярного поля было бы

$$\Box^2\phi = 4\pi\lambda T^{\mu}_{M\mu}, \tag{7.3.1}$$

где $\Box^2\phi = \varphi;^{\rho};_{\rho}$ представляет собой инвариантный даламбертиан, λ — постоянная взаимодействия, а $T_M{}^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи, распределенной во Вселенной (всей, кроме поля гравитации и ϕ-поля). Можно грубо оценить среднее значение ϕ, вычисляя центральный потенциал газообразной сферы с космологической плотностью массы $\rho \sim 10^{-29}$ г·см$^{-3}$ и имеющей радиус, равный наблюдаемому радиусу Вселенной $R \sim 10^{28}$ см (см. гл. 14). Это приводит к среднему значению

$$\langle\phi\rangle \sim \lambda\rho R^2 \sim \lambda \times 10^{27} \text{ г}\cdot\text{см}^{-1}. \tag{7.3.2}$$

Заметим, что число 10^{27} г·см$^{-1}$ разумно согласуется с постоянной $1/G = 1{,}35 \times 10^{28}$ г·см$^{-1}$ (в единицах, в которых $c = 1$); следовательно, можно нормировать ϕ так, что

$$\langle\phi\rangle \approx \frac{1}{G}, \tag{7.3.3}$$

и тогда (7.3.2) показывает, что λ — безразмерная величина порядка единицы. Подобные рассмотрения позволили Брансу и Дикке предположить, что истинные уравнения поля гравитации получаются заменой G на $1/\phi$ и включением тензора энергии-импульса ϕ-поля $T_{\phi}^{\mu\nu}$ в источник гравитационного поля:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi}{\phi}\left[T_M{}^{\mu\nu} + T_{\phi}{}^{\mu\nu}\right]. \tag{7.3.4}$$

Никто, однако, не собирается отказываться от таких достижений принципа эквивалентности, как равенство гравитационной и инертной масс и замедление времени в поле тяготения. Поэтому Бранс и Дикке требуют, чтобы только $g_{\mu\nu}$, а не ϕ входило в уравнения движения частиц и фотонов. Уравнения, описывающие обмен энергией между материей и гравитационным полем, остаются, следовательно, теми же, что и в теории Эйнштейна:

$$T_M{}^{\mu}{}_{\nu;\,\mu} \equiv \frac{\partial T_M{}^{\mu}{}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}_{\mu\rho} T_M{}^{\rho}{}_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} T_M{}^{\mu}{}_{\rho} = 0. \tag{7.3.5}$$

Далее, тождество Бианки говорит о том, что дивергенция от левой части уравнения (7.3.4) равна нулю, а потому, умножив (7.3.4) на ϕ и взяв ковариантную дивергенцию от полученного, приходим к уравнению

$$\left(R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu} R\right)\phi;_{\mu} = -8\pi T_{\phi}{}^{\mu}{}_{\nu;\,\mu}. \tag{7.3.6}$$

Оказывается, что этого требования достаточно для определения $T_{\phi}{}^{\mu}{}_{\nu}$. Симметричный тензор самого общего вида, который можно построить из членов, каждый из которых содержит либо две первые производные от поля, либо одну вторую производную от поля, кроме того, зависит еще от самого поля и записывается

следующим образом:

$$T_\phi{}^\mu{}_\nu = A(\phi)\,\phi;^\mu\phi;_\nu + B(\phi)\,\delta^\mu{}_\nu\phi;_\rho\phi;^\rho + \\ + C(\phi)\,\phi;^\mu{}_;{}_\nu + \delta^\mu{}_\nu D(\phi)\,\Box^2\phi. \quad (7.3.7)$$

Непосредственные вычисления дают

$$T_\phi{}^\mu{}_{\nu;\,\mu} = [A'(\phi) + B'(\phi)]\,\phi;^\mu\phi;_\nu\phi;_\mu + \\ + [A(\phi) + D'(\phi)]\,\phi;_\nu\Box^2\phi + \\ + [A(\phi) + 2B(\phi) + C'(\phi)]\,\phi;^\mu{}_;{}_\mu\phi;_\mu + \\ + D(\phi)(\Box^2\phi);_\nu + C(\phi)\,\Box^2(\phi;_\nu). \quad (7.3.8)$$

(Штрих здесь означает производную по ϕ.) Первый член слева в (7.3.6) определяется выражением (6.5.2), а именно

$$\phi;_\sigma R^\sigma{}_\nu = \phi;^\mu{}_;{}_\mu{}_;{}_\nu - \phi;_\nu{}_;^\mu{}_;{}_\mu = (\Box^2\phi);_\nu - \Box^2(\phi;_\nu). \quad (7.3.9)$$

Взяв теперь шпур от уравнения (7.3.4) и используя (7.3.1), находим

$$R = \frac{8\pi}{\phi}\left[\frac{1}{4\pi\lambda}\,\Box^2\phi + (A(\phi) + 4B(\phi))\,\phi;^\mu\phi;_\mu + (C(\phi) + 4D(\phi))\,\Box^2\phi\right],$$

а потому левая часть уравнения (7.3.6) имеет вид

$$\left(R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\,\delta^\mu{}_\nu R\right)\phi;_\mu = (\Box^2\phi);_\nu - \Box^2(\phi;_\nu) - \\ - \frac{4\pi}{\phi}\,\phi;_\nu\left[\left(\frac{1}{4\pi\lambda}\,\Box^2 + C(\phi) + 4D(\phi)\right)\Box^2\phi + \right. \\ \left. + (A(\phi) + 4B(\phi))\,\phi;^\mu\varphi;_\mu\right]. \quad (7.3.10)$$

Сравнивая коэффициенты при $(\Box^2\phi);_\nu$, $\Box^2(\phi;_\nu)$, $\phi;_\nu\Box^2\phi$, $\phi;^\mu\phi;_\mu\phi;_\nu$ и $\phi;^\mu{}_;{}_\nu\phi;_\mu$ в выражениях (7.3.8) и (7.3.10), находим, что уравнение (7.3.6) требует, чтобы

$$1 = -8\pi D(\phi), \quad -1 = -8\pi C(\phi),$$

$$-\frac{4\pi}{\phi}\left(\frac{1}{4\pi\lambda} + C(\phi) + 4D(\phi)\right) = -8\pi(A(\phi) + \\ + D'(\phi)) - \frac{4\pi}{\phi}(A(\phi) + 4B(\phi)) = -8\pi(A'(\phi) + B'(\phi)),$$

$$0 = A(\varphi) + 2B(\phi) + C'(\phi).$$

Единственное решение этой системы имеет вид

$$A(\phi) = \frac{\omega}{8\pi\phi}, \quad B(\phi) = -\frac{\omega}{16\pi\phi},$$

$$C(\phi) = \frac{1}{8\pi}, \quad D(\phi) = -\frac{1}{8\pi}, \quad (7.3.11)$$

где ω — удобная безразмерная постоянная, определяемая следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2} \tag{7.3.12}$$

или

$$\lambda = \frac{2}{3+2\omega}.$$

Уравнения поля (7.3.1) и (7.3.4) в теории Бранса и Дикке можно, следовательно, записать так:

$$\Box^2\phi = \frac{8\pi}{3+2\omega} T_M{}^{\mu}{}_{\mu}, \tag{7.3.13}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi}{\phi} T_{M\mu\nu} - \\ - \frac{\omega}{\phi^2}\left(\phi;_{\mu}\phi;_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\phi;_{\rho}\phi;^{\rho} - \frac{1}{\phi}(\phi;_{\mu};_{\nu} - g_{\mu\nu}\Box^2\phi)\right). \tag{7.3.14}$$

Наша предыдущая оценка показала, что λ порядка единицы; поэтому мы можем ожидать, что ω того же порядка. Если ω много больше единицы, то (7.3.13) превращается в уравнение $\Box^2\varphi = 0\,(1/\omega)$, откуда вытекает, что

$$\phi = \langle\phi\rangle + 0\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{G} + 0\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{7.3.15}$$

Подставляя этот результат в (7.3.14), получаем

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{M\mu\nu} + 0\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Таким образом, теория Бранса и Дикке переходит в теорию Эйнштейна в пределе $\omega \to \infty$.

Надо подчеркнуть, что роль скалярного поля в теории Бранса и Дикке сводится к изменению вида уравнений поля гравитации. Если $g_{\mu\nu}$ известно, то воздействие гравитации на произвольные физические системы определяется точно таким же образом, как и в гл. 3, 4 и 5.

В этой книге почти везде будем предполагать, что никакие скалярные поля φ не дают вкладов в дальнодействующие силы. Однако время от времени мы будем возвращаться к теории Бранса и Дикке, чтобы посмотреть, какие изменения она вносит в теорию тяготения.

§ 4. Координатные условия

Симметричный тензор $G_{\mu\nu}$ имеет 10 независимых компонент, а потому эйнштейновские уравнения поля (7.1.13) состоят из 10 алгебраически независимых уравнений. Неизвестный метрический тензор также имеет 10 алгебраически независимых компонент, и на первый взгляд может показаться, что уравнений

Эйнштейна (с надлежащими граничными условиями) достаточно, чтобы определить $g_{\mu\nu}$ единственным образом. Это, однако, не так.

Хотя 10 компонент $G_{\mu\nu}$ независимы алгебраически, они связаны еще с четырьмя дифференциальными соотношениями — тождествами Бианки [см. (6.8.3)]:

$$G^{\mu}{}_{\nu;\,\mu} = 0.$$

Таким образом, существует не 10 функционально независимых уравнений, а только $10 - 4 = 6$ уравнений, оставляющих четыре независимые степени свободы в десяти неизвестных компонентах $g_{\mu\nu}$. Эти степени свободы соответствуют тому, что если $g_{\mu\nu}$ — решение уравнений Эйнштейна, то решением его будет также и $g'_{\mu\nu}$, которое получается из $g_{\mu\nu}$ с помощью произвольного преобразования координат $x \to x'$. Такое преобразование координат вводит четыре произвольные функции $x'^{\mu}(x)$, соответствующие как раз четырем степеням свободы в решении уравнений (7.1.13).

Недостаточность эйнштейновских уравнений для определения $g_{\mu\nu}$ единственным образом аналогична недостаточности уравнений Максвелла для однозначного определения вектор-потенциала A_{μ}. Записанные с помощью вектор-потенциала уравнения Максвелла выглядят так:

$$\Box^2 A_{\alpha} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} A^{\beta} = -J_{\alpha} \tag{7.4.1}$$

[см. уравнения (2.7.6) и (2.7.11)]. Имеются четыре уравнения для четырех неизвестных, но они не задают A_{α} единственным образом, поскольку левые части этих уравнений связаны дифференциальным тождеством, аналогичным тождествам Бианки:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left\{ \Box^2 A^{\alpha} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} A^{\beta} \right\} \equiv 0.$$

Таким образом, число функционально независимых уравнений в действительности равно лишь $4 - 1 = 3$, и поэтому остается одна степень свободы в решении для четырех компонент A_{α}. Эта степень свободы, конечно, соответствует градиентной инвариантности; зная какое-либо решение A_{α}, мы можем найти другое решение $A'_{\alpha} \equiv A_{\alpha} + \partial\phi/\partial x^{\alpha}$, где ϕ — произвольная функция.

Эта неопределенность в решениях уравнений Максвелла и Эйнштейна может быть устранена одним и тем же способом. Для уравнений Максвелла вопрос решается путем выбора конкретной калибровки. Например, зная какое-нибудь решение A_{α}, мы всегда можем построить решение A'_{α}, такое, что

$$\partial_{\alpha} A'^{\alpha} = 0, \tag{7.4.2}$$

положив

$$A'_\alpha \equiv A_\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha},$$

где Φ определяется из уравнения

$$\Box^2 \Phi = -\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$

Говорят, что такое решение *задано в лоренцевой калибровке*. Условие (7.4.2) вместе с тремя независимыми уравнениями (7.4.1) создает систему из четырех уравнений, которые при надлежащих граничных условиях, вообще говоря, определяют четыре компоненты A_α однозначно. Таким же способом, а именно выбрав некоторую конкретную систему координат, можно исключить неоднозначность в метрическом тензоре. Выбор системы может выражаться в виде четырех координатных условий, которые, дополняя шесть независимых уравнений Эйнштейна, приводят к однозначному решению. Особенно удобны *условия гармоничности координат*

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0. \tag{7.4.3}$$

Чтобы увидеть, что выбор координатной системы в соответствии с этими условиями возможен всегда, вспомним трансформационные уравнения для аффинной связности

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\rho_{\tau\sigma} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}.$$

[См. уравнение (4.5.8).] Свертывая это уравнение с $g'^{\mu\nu}$, находим

$$\Gamma'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho - g^{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}. \tag{7.4.4}$$

Следовательно, если Γ^ρ не исчезает, мы можем всегда ввести новую систему координат, решив следующие дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных:

$$g^{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho.$$

Тогда уравнение (7.4.4) приводит к $\Gamma'^\lambda = 0$ в системе x'.

Четыре условия (7.4.3) не являются, конечно, общековариантными, так как цель их — удалить неоднозначность, возникающую в метрическом тензоре из-за ковариантности уравнений Эйнштейна. Хотя мы не можем записать эти условия в виде ковариантных уравнений, мы можем придать им более изящную фор-

му, выражая аффинную связность через метрический тензор:

$$\Gamma^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\varkappa} \left\{ \frac{\partial g_{\varkappa\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\varkappa\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} \right\}.$$

Напомним, что

$$g^{\lambda\varkappa} \frac{\partial g_{\varkappa\mu}}{\partial x^{\nu}} = - g_{\varkappa\mu} \frac{\partial g^{\lambda\varkappa}}{\partial x^{\nu}},$$

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} = g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^{\varkappa}} g^{1/2}.$$

[См. (4.7.5).] Отсюда следует

$$\Gamma^{\lambda} = - g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^{\varkappa}} (g^{1/2} g^{\lambda\varkappa}), \tag{7.4.5}$$

и условия, приводящие к гармоническим координатам принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x^{\varkappa}} (\sqrt{-g}\, g^{\lambda\varkappa}) = 0. \tag{7.4.6}$$

Теперь мы в состоянии объяснить термин «гармонические координаты». Говорят, что функция ϕ гармоническая, если равно нулю $\Box^2\phi$, где $\Box^2$ есть инвариантный даламбертиан, определяемый следующим образом:

$$\Box^2 \phi \equiv (g^{\lambda\varkappa} \phi_{;\lambda})_{;\varkappa}. \tag{7.4.7}$$

Используя (4.7.1), (4.7.7) и (4.7.5), получаем

$$\Box^2 \phi = g^{\lambda\varkappa} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\varkappa}} - \Gamma^{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\lambda}}. \tag{7.4.8}$$

Если $\Gamma^{\lambda} = 0$, то координаты являются гармоническими функциями (7.4.9), оправдывая, таким образом, название «гармоническая» для такой системы координат.

В отсутствие гравитационных полей явно гармоническая система координат — это система Минковского, в которой $g^{\lambda\varkappa} = \eta^{\lambda\varkappa}$ и $g = 1$, так что (7.4.6) выполняется тривиальным образом. При наличии слабых гравитационных полей гармонические системы координат могут рассматриваться как близкие к системе Минковского. Другое, вытекающее отсюда преимущество гармонических координатных условий — это то, что, как показано в гл. 9 и 10, их использование чрезвычайно упрощает уравнения для слабых полей, подобно тому, как лоренцева калибровка упрощает уравнения Максвелла.

§ 5. Задача Коши

Попробуем проникнуть глубже в математическую природу уравнений Эйнштейна, поставив традиционную задачу Коши с начальными условиями. Предположим, что $g_{\mu\nu}$ и $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^0$ заданы повсюду «в плоскости» $x^0 = t$. Если мы могли бы извлечь из уравнений поля выражение для $\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial\,(x^0)^2$ во всей плоскости $x^0 = t$, мы могли бы затем вычислить $g_{\mu\nu}$ и $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^0$ в момент времени $x^0 = t + \delta t$ и, продолжая этот процесс, вычислить $g_{\mu\nu}$ для всех x^i и x^0.

На первый взгляд это выглядит осуществимым, поскольку нам необходимо знать 10 производных второго порядка и имеется 10 уравнений поля. Посмотрим, однако, внимательнее на уравнения поля $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - {}^1/_2 g^{\mu\nu} R$. Тождества Бианки (6.8.4) приводят к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial x^0} G^{\mu 0} \equiv -\frac{\partial}{\partial x^i} G^{\mu i} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} G^{\lambda\nu} - \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} G^{\mu\lambda}.$$

В правой части здесь нет производных по времени старше чем $\partial^2/\partial\,(x^0)^2$; нет их и в левой части; следовательно, $G^{\mu 0}$ не содержит временных производных старше чем $\partial/\partial x^0$. Поэтому мы ничего не можем узнать об эволюции во времени гравитационного поля из четырех уравнений

$$G^{\mu 0} = -8\pi G T^{\mu 0}. \tag{7.5.1}$$

Точнее, эти уравнения надо рассматривать как некоторые связи в начальных данных, т. е. условия, налагаемые на $g_{\mu\nu}$ и $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^0$ при $x^0 = t$.

В качестве «динамических уравнений» остается лишь шесть уравнений Эйнштейна

$$G^{ij} = -8\pi G T^{ij}. \tag{7.5.2}$$

Когда мы разрешаем эти уравнения относительно 10 вторых производных $\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial\,(x^0)^2$, мы сталкиваемся с четырехкратной неоднозначностью, которую, естественно, нет надежды обойти, поскольку всегда возможны преобразования координат, оставляющие неизменными $g_{\mu\nu}$ и $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^0$ при $x^0 = t$, но которые все же изменяют $g_{\mu\nu}$ в остальном пространстве. Точнее, мы находим, что (7.5.2) определяет шесть величин $\partial^2 g^{ij}/\partial\,(x^0)^2$, но оставляет неопределенными остальные четыре $\partial^2 g^{\mu 0}/\partial\,(x^0)^2$. От этой неопределенности можно избавиться, только наложив четыре координатных условия, фиксирующие систему координат. Например, если мы наложим гармоническое координатное условие, введенное в предыдущем параграфе, вторая производная по времени от $\sqrt{-g}\, g^{\mu 0}$ может быть найдена дифференцированием (7.4.6) по времени:

$$\frac{\partial^2}{\partial\,(x^0)^2}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu 0}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^0\, \partial x^i} \sqrt{-g}\, g^{\mu i}. \tag{7.5.3}$$

Тогда десяти уравнений (7.5.2) и (7.5.3) достаточно для нахождения вторых производных по времени от всех компонент $g_{\mu\nu}$.

Если начальная задача решается таким образом, то условия (7.5.1) на начальные данные достаточно удовлетворить в один момент времени. Тождество Бианки и условие сохранения энергии и импульса утверждают, что независимо от того, удовлетворяются или нет уравнения поля, должно выполняться соотношение

$$(G^{\mu\nu} + 8\pi G T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0.$$

Рассмотрим это выражение при $x^0 = t$. Накладывая на начальные данные дополнительные условия (7.5.1) и находя вторые производные из уравнения (7.5.2), убеждаемся в том, что в последнем выражении величина в скобках равна нулю везде при $x^0 = t$, откуда следует

$$\frac{\partial}{\partial x^0}(G^{\mu 0} + 8\pi G T^{\mu 0}) = 0 \quad \text{при } x^0 = t,$$

а потому поля, вычисленные в момент времени $x^0 = t + dt$, будут также автоматически удовлетворять условиям (7.5.1). Таким образом, этот метод решения проблемы с начальными условиями таков, что если мы знаем начальную метрику $x^0 = t$, удовлетворяющую условиям (7.5.1), то он может быть запрограммирован для вычислительной машины.

§ 6. Энергия, импульс и угловой момент гравитационного поля

Физический смысл уравнений Эйнштейна можно выявить, записав их в полностью эквивалентной, хотя и не в ковариантной, форме, которая указывает на их связь с волновыми уравнениями физики элементарных частиц. Выберем систему координат, почти совпадающую с системой Минковского в том смысле, что на больших расстояниях от изучаемой материальной системы, имеющей конечные размеры, метрика $g_{\mu\nu}$ будет приближаться к метрике Минковского $\eta_{\mu\nu}$. (К этому классу относятся гармонические системы координат и некоторые другие.) В этом случае пишем

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{7.6.1}$$

причем $h_{\mu\nu}$ исчезает на бесконечности. (Однако не предполагается, что $h_{\mu\nu}$ мало повсюду.) Часть тензора Риччи, линейная по $h_{\mu\nu}$, равняется

$$R^{(1)}{}_{\mu\varkappa} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 h_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\lambda}\,\partial x_{\lambda}}\right). \tag{7.6.2}$$

[См. выражение (6.6.2).] Удобно условиться о том, что индексы у $h_{\mu\nu}$, $R^{(1)}_{\mu\nu}$ и $\partial/\partial x^\lambda$ поднимаются и опускаются с помощью η, например $h^\lambda{}_\lambda \equiv \eta^{\lambda\nu}h_{\lambda\nu}$ и $\partial/\partial x_\lambda \equiv \eta^{\lambda\nu}\partial/\partial x^\nu$, в то время как индексы у истинных тензоров, таких, как $R_{\mu\varkappa}$, поднимаются и опускаются с помощью g, как обычно.] Точные уравнения Эйнштейна можно тогда записать в виде

$$R^{(1)}{}_{\mu\varkappa} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\varkappa}R^{(1)\,\lambda}{}_\lambda = -8\pi G\,[T_{\mu\varkappa} + t_{\mu\varkappa}], \tag{7.6.3}$$

где

$$t_{\mu\varkappa} \equiv \frac{1}{8\pi G}\left[R_{\mu\varkappa} - \frac{1}{2}g_{\mu\varkappa}R^\lambda{}_\lambda - R^{(1)}_{\mu\varkappa} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\varkappa}R^{(1)\,\lambda}{}_\lambda\right]. \tag{7.6.4}$$

Уравнение (7.6.3) имеет как раз ту форму, которая присуща волновому уравнению поля со спином 2 (см. § 2 гл. 10), но с той особенностью, что его «источник» $T_{\mu\varkappa} + t_{\mu\varkappa}$ явно зависит от поля $h_{\mu\nu}$. Интерпретируем эту особенность утверждением о том, что поле $h_{\mu\nu}$ порождается полными плотностями и потоками энергии и импульса, а $t_{\mu\varkappa}$ есть «*тензор*» *энергии-импульса лишь самого гравитационного поля*. Это значит, что мы интерпретируем величину

$$\tau^{\nu\lambda} \equiv \eta^{\nu\mu}\eta^{\lambda\varkappa}\,[T_{\mu\varkappa} + t_{\mu\varkappa}] \tag{7.6.5}$$

как полный «тензор» вещества гравитационного поля. Можно назвать несколько свойств $\tau^{\nu\lambda}$, говорящих в пользу такой интерпретации.

А. Величины $R^{(1)}{}_{\mu\varkappa}$ подчиняются линеаризованным тождествам Бианки

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[R^{(1)\,\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta^{\nu\lambda}R^{(1)\,\mu}{}_\mu\right] \equiv 0. \tag{7.6.6}$$

Следовательно, из уравнения поля (7.6.3) вытекает, что $\tau^{\nu\lambda}$ локально сохраняется:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\tau^{\nu\lambda} = 0. \tag{7.6.7}$$

Заметим, что, хотя $T^{\nu\lambda}$ подчиняется ковариантному закону сохранения $T^{\nu\lambda}{}_{;\nu} = 0$, который явно описывает *обмен* энергией между веществом и полем гравитации, величина $\tau^{\nu\lambda}$ сохраняется в обычном смысле. В частности, для любой конечной системы объема V, ограниченной поверхностью S, уравнение (7.6.7) утверждает, что

$$\frac{d}{dt}\int_V \tau^{0\lambda}\,d^3x = -\int_S \tau^{i\lambda}n_i\,dS. \tag{7.6.8}$$

Здесь **n** — единичная внешняя нормаль к рассматриваемой поверхности. Следовательно, величину

$$P^{\lambda} \equiv \int_{V} \tau^{0\lambda}\, d^3x \tag{7.6.9}$$

можно интерпретировать как полный «вектор» энергии-импульса такой системы, включающей вещество, электромагнитное поле и поле гравитации; при этом $\tau^{i\lambda}$ — соответствующий поток.

Б. Кроме того, что $\tau^{\nu\lambda}$ сохраняется, оно симметрично

$$\tau^{\nu\lambda} = \tau^{\lambda\nu}, \tag{7.6.10}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} M^{\mu\nu\lambda} = 0, \tag{7.6.11}$$

где

$$M^{\mu\nu\lambda} \equiv \tau^{\mu\lambda} x^{\nu} - \tau^{\mu\nu} x^{\lambda}. \tag{7.6.12}$$

Таким образом, можно интерпретировать $M^{0\nu\lambda}$ и $M^{i\nu\lambda}$ как плотность и поток полного углового момента

$$J^{\nu\lambda} \equiv \int d^3x M^{0\nu\lambda} = -J^{\lambda\nu}, \tag{7.6.13}$$

который постоянен, если величина $M^{i\nu\lambda}$ равна нулю на поверхности, ограничивающей объем интегрирования.

В. Можно вычислить $t_{\mu\varkappa}$, разлагая его по степеням h, и найти, что первый член его *квадратичен*:

$$t_{\mu\varkappa} = \frac{1}{8\pi G}\left[-\frac{1}{2} h_{\mu\varkappa} R^{(1)\,\lambda}{}_{\lambda} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\varkappa} h^{\rho\sigma} R^{(1)}_{\rho\sigma} + R^{(2)}{}_{\mu\varkappa} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\eta_{\mu\varkappa}\eta^{\rho\sigma} R^{(2)}{}_{\rho\sigma}\right] + 0\,(h^3). \tag{7.6.14}$$

Здесь $R^{(2)}_{\mu\varkappa}$ — член второго порядка по h в тензоре Риччи, задаваемый (6.6.2) в виде

$$R^{(2)}{}_{\mu\varkappa} = -\frac{1}{2} h^{\lambda\nu}\left[\frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^{\varkappa}\,\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}\,\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\varkappa}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 h_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\nu}\,\partial x^{\lambda}}\right] +$$
$$+ \frac{1}{4}\left[2\frac{\partial h^{\nu}{}_{\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h^{\nu}{}_{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right]\left[\frac{\partial h^{\sigma}{}_{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} + \frac{\partial h^{\sigma}{}_{\varkappa}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\varkappa}}{\partial x_{\sigma}}\right] -$$
$$- \frac{1}{4}\left[\frac{\partial h_{\sigma\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial h_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial h_{\lambda\varkappa}}{\partial x^{\sigma}}\right]\left[\frac{\partial h^{\sigma}{}_{\mu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial h^{\sigma\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h^{\lambda}{}_{\mu}}{\partial x_{\sigma}}\right]. \tag{7.6.15}$$

Можно было бы ожидать, что по аналогии с электродинамикой «тензор» энергии-импульса гравитации будет начинаться с члена,

квадратичного по $h_{\mu\nu}$. [Сравните с выражением (2.8.9).] Присутствие в $t_{\mu\varkappa}$ членов третьего порядка и выше означает просто, что гравитационное взаимодействие поля тяготения с самим собой также дает вклад в полную энергию и импульс. Конечно, когда гравитационное поле слабо, $h_{\mu\nu}$ будет малым, так что введение $t_{\lambda\nu}$ в (7.6.5) (и использование η для опускания индексов) не приводит к каким-нибудь серьезным изменениям в энергии и импульсе физических систем.

Г. Хотя величины $t_{\mu\varkappa}$, $\tau^{\nu\lambda}$ и $M^{\mu\nu\lambda}$ не являются общековариантными, они все же по крайней мере лоренц-ковариантны. Поэтому для замкнутой системы P^{λ} и $J^{\nu\lambda}$ не только постоянны, но и являются лоренц-ковариантами (см. § 6 гл. 2).

Д. В начале этого параграфа мы решили работать в системе координат, в которой компоненты $h_{\mu\nu}$ исчезают на бесконечности. На больших расстояниях от конечной материальной системы, создающей гравитационное поле, $T_{\mu\varkappa} = 0$, а $t_{\mu\varkappa}$ порядка h^2, так что источник в правой части уравнения поля (7.6.3) эффективно сохраняется в конечных областях. Это предполагает, что в большинстве физических ситуаций $h_{\mu\nu}$ ведут себя на больших расстояниях, как потенциалы в электростатике или в теории тяготения Ньютона, т. е. при $r \to \infty$ имеем

$$h_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}\, dx^{0}} = O\left(\frac{1}{r^3}\right). \tag{7.6.16}$$

В этом случае (7.6.14) дает

$$t_{\mu\varkappa} = O\left(\frac{1}{r^4}\right), \tag{7.6.17}$$

так что интеграл $\int \tau^{0\lambda} d^3x$, определяющий полную энергию и импульс, сохраняется. Для этой цели и важно было идентифицировать систему координат с системой, близкой к системе Минковского: если бы $g_{\mu\nu}$ переходила на бесконечности в метрику сферических полярных координат, то наши определения (7.6.1) и (7.6.4) приводили бы к плотности гравитационной энергии, растущей на бесконечности! (Заметим, однако, что оценки (7.6.16) и (7.6.17) не всегда справедливы. Если система все время излучает гравитационные волны (см. гл. 10), то $h_{\mu\nu}$ осциллирует так, что $\partial h_{\mu\nu}/\partial x^{\lambda}$ и $\partial^2 h_{\mu\nu}/\partial x^{\lambda}\partial x^{0}$ имеют тот же самый порядок, что и метрика $h_{\mu\nu}$. Это дает бесконечную полную энергию, которая, как и следовало ожидать, должна содержаться в поле гравитационного излучения, заполняющего все пространство. В этом случае члены, нечетные по $h_{\mu\nu}$, ведут себя как $1/r$ [4].)

Е. По способу построения $\tau^{\nu\lambda}$ есть явно тот «тензор» энергии-импульса, который мы определяем при измерении гравитационного поля, создаваемого какой-либо системой. Существует много возможных определений «тензора» энергии-импульса поля гравитации, обладающего большинством хороших свойств нашего тензора $t_{\mu\varkappa}$ (эти определения обычно основываются на принципе наименьшего действия; см. гл. 12), но $t_{\mu\varkappa}$ выделен особой его ролью в (7.6.3), где он фигурирует в качестве источника $h_{\mu\nu}$.

Ж. Хотя вычисление $t_{\mu\varkappa}$ для конкретных физических проблем может быть затруднительным, к счастью, можно избежать этих вычислений, если все, что мы хотим знать,— это полная энергия и импульс системы. Левая часть уравнения поля (7.6.3) может быть записана в виде

$$R^{(1)\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta^{\nu\lambda}R^{(1)\mu}{}_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}Q^{\rho\nu\lambda}, \tag{7.6.18}$$

где

$$Q^{\rho\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial h^{\mu}{}_{\mu}}{\partial x_{\nu}}\eta^{\rho\lambda} - \frac{\partial h^{\mu}{}_{\mu}}{\partial x_{\rho}}\eta^{\nu\lambda} - \frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}}\eta^{\rho\lambda} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial h^{\mu\rho}}{\partial x^{\mu}}\eta^{\nu\lambda} + \frac{\partial h^{\nu\lambda}}{\partial x_{\rho}} - \frac{\partial h^{\rho\lambda}}{\partial x_{\nu}}\right\}. \tag{7.6.19}$$

Заметим, что $Q^{\rho\nu\lambda}$ антисимметрично по первым двум индексам

$$Q^{\rho\nu\lambda} = -Q^{\nu\rho\lambda}, \tag{7.6.20}$$

из чего следует дифференциальное тождество (7.6.6). Используя уравнения поля (7.6.3) вместе с (7.6.18), найдем следующее значение полного «вектора» энергии-импульса:

$$P^{\lambda} = -\frac{1}{8\pi G}\int_{V}\frac{\partial Q^{\rho 0\lambda}}{\partial x^{\rho}}d^3x = -\frac{1}{8\pi G}\int_{V}\frac{\partial Q^{i0\lambda}}{\partial x^{i}}d^3x.$$

Применяя затем теорему Гаусса, получаем

$$P^{\lambda} = -\frac{1}{8\pi G}\int Q^{i0\lambda}n_i r^2\,d\Omega. \tag{7.6.21}$$

Интеграл здесь берется по большой сфере радиусом r; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ней, а $d\Omega$ — бесконечно малый элемент телесного угла, т. е.

$$r \equiv (x_i x_i)^{1/2}, \qquad n_i \equiv \frac{x_i}{r},$$
$$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

(По повторяющимся латинским индексам производится суммирование по значениям 1, 2, 3.) Более подробно полная энергия и им-

пульс с помощью (7.6.19) и (7.6.21) записываются так:

$$P^j = -\frac{1}{16\pi G}\int\left\{-\frac{\partial h_{kk}}{\partial t}\delta_{ij}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial h_{k0}}{\partial x^k}\delta_{ij}-\frac{\partial h_{j0}}{\partial x^i}+\frac{\partial h_{ij}}{\partial t}\right\}n_i r^2\,d\Omega, \qquad (7.6.22)$$

$$P^0 = -\frac{1}{16\pi G}\int\left\{\frac{\partial h_{jj}}{\partial x^i}-\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j}\right\}n_i r^2\,d\Omega. \qquad (7.6.23)$$

По аналогии «тензор» полного углового момента (7.6.13)

$$J^{\nu\lambda} = \int d^3x\,(x^\nu\tau^{0\lambda}-x^\lambda\tau^{0\nu}) = \frac{-1}{8\pi G}\int d^3x\left(x^\nu\frac{\partial Q^{i0\lambda}}{\partial x^i}-x^\lambda\frac{\partial Q^{i0\nu}}{\partial x^i}\right).$$

Как отмечалось в § 9 гл. 2, представляющие физический интерес компоненты $J^{\nu\lambda}$ — это три независимые чисто пространственные компоненты

$$J_1 \equiv J^{23}, \qquad J_2 \equiv J^{31}, \qquad J_3 \equiv J^{12}.$$

Используя, как и выше, теорему Гаусса, находим эти компоненты в виде

$$J^{jk} = -\frac{1}{16\pi G}\int\left\{-x_j\frac{\partial h_{0k}}{\partial x^i}+x_k\frac{\partial h_{0j}}{\partial x^i}+x_j\frac{\partial h_{ki}}{\partial t}-x_k\frac{\partial h_{ji}}{\partial t}+\right.$$

$$\left.+h_{0k}\delta_{ij}-h_{0j}\delta_{ik}\right\}n_i r^2\,d\Omega. \qquad (7.6.24)$$

Таким образом, для того чтобы вычислить полный импульс, энергию и угловой момент произвольной конечной системы, необходимо знать асимптотическое поведение $h_{\mu\nu}$ на больших расстояниях.

3. Было показано, что P^0 всегда положительно и принимает нулевое значение только в пустом пространстве, свободном от всякой материи [5—8].

И. Хотя $\tau^{\nu\lambda}$ не является тензором, а P^λ — вектором, полная энергия и импульс обладают важным свойством инвариантности при любых преобразованиях координат, сводящихся на бесконечности к тождественным. Такие преобразования должны иметь форму

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x),$$

где $\varepsilon^\mu(x)$ исчезает при $r \to \infty$, хотя на конечных расстояниях $\varepsilon^\mu(x)$ не обязательно мало. Метрический тензор в новой системе координат равен

$$g'^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}\left(\delta^\mu{}_\rho+\frac{\partial\varepsilon^\mu}{\partial x^\rho}\right)\left(\delta^\nu{}_\sigma+\frac{\partial\varepsilon^\nu}{\partial x^\sigma}\right).$$

При $r\to\infty$ как ε^μ, так и $h_{\mu\nu}$ малы, а потому мы можем вычислить $g'^{\mu\nu}$ в первом порядке по ε^μ и $h_{\mu\nu}$, полагая $g^{\rho\sigma} \simeq \eta^{\rho\sigma} - h^{\rho\sigma}$

и производя разложения по малым параметрам. Это дает

$$g'^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu},$$

где

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \varepsilon^{\nu}}{\partial x_{\mu}}.$$

Тогда изменение величины (7.6.19), создаваемое таким преобразованием координат, равно при $r \to \infty$

$$\Delta Q^{\rho\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left\{ -\frac{\partial^2 \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\mu}\, \partial x_{\nu}} \eta^{\rho\lambda} + \frac{\partial^2 \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\mu}\, \partial x_{\rho}} \eta^{\nu\lambda} + \Box^2 \varepsilon^{\nu} \eta^{\rho\lambda} - \right.$$

$$\left. - \Box^2 \varepsilon^{\rho} \eta^{\nu\lambda} - \frac{\partial^2 \varepsilon^{\nu}}{\partial x_{\rho}\, \partial x_{\lambda}} + \frac{\partial^2 \varepsilon^{\rho}}{\partial x_{\nu}\, \partial x_{\lambda}} \right\},$$

или

$$\Delta Q^{\rho\nu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} D^{\sigma\rho\nu\lambda},$$

где

$$D^{\sigma\rho\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2}\left\{ -\frac{\partial \varepsilon^{\sigma}}{\partial x_{\nu}} \eta^{\rho\lambda} + \frac{\partial \varepsilon^{\sigma}}{\partial x_{\rho}} \eta^{\nu\lambda} + \frac{\partial \varepsilon^{\nu}}{\partial x_{\sigma}} \eta^{\rho\lambda} - \frac{\partial \varepsilon^{\rho}}{\partial x_{\sigma}} \eta^{\nu\lambda} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varepsilon^{\nu}}{\partial x_{\rho}} \eta^{\sigma\lambda} + \frac{\partial \varepsilon^{\rho}}{\partial x_{\nu}} \eta^{\sigma\lambda} \right\}.$$

Заметим, что D полностью антисимметрично по первым трем его индексам

$$D^{\sigma\rho\nu\lambda} = -D^{\rho\sigma\nu\lambda} = -D^{\sigma\nu\rho\lambda} = -D^{\nu\rho\sigma\lambda},$$

и, следовательно, изменение поверхностного интеграла вычисляется так:

$$\Delta P^{\lambda} = -\frac{1}{8\pi G} \int \left(\frac{\partial D^{\sigma i 0 \lambda}}{\partial x^{\sigma}} \right) n_i r^2 \, d\Omega =$$

$$= -\frac{1}{8\pi G} \int \left(\frac{\partial D^{ji0\lambda}}{\partial x^{j}} \right) n_i r^2 \, d\Omega,$$

или, применяя снова теорему Гаусса, получаем

$$\Delta P^{\lambda} = -\frac{1}{8\pi G} \int \left(\frac{\partial^2 D^{ji0\lambda}}{\partial x^{i}\, \partial x^{j}} \right) d^3x = 0. \qquad (7.6.25)$$

В качестве следствия отметим, что P^{λ} преобразуется как 4-вектор при любых преобразованиях, оставляющих неизменной метрику $\eta_{\mu\nu}$ на бесконечности, поскольку любые такие преобразования могут быть выражены как произведение преобразования Лоренца

$x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ (при котором P^λ преобразуется как 4-вектор; см. пункт Г) на преобразование, становящееся на бесконечности тождественным (и, следовательно, не изменяющее P^λ).

К. Если вещество в нашей системе разделяется на отдельные *удаленные* подсистемы S_n, гравитационное поле можно вычислить приближенно, записывая $h_{\mu\nu}$ в виде суммы полей $h^n_{\mu\nu}$, создаваемых каждой подсистемой отдельно. (Интерференционными членами между различными $h^n_{\mu\nu}$ в $t_{\mu\varkappa}$ можно пренебречь, поскольку в любом месте, где одно из $h^n_{\mu\nu}$ велико, все другие поля малы.) Тогда, используя способ вычисления P^λ, приведенный в пункте Д, можно полную энергию и импульс представить как сумму значений $P_n{}^\lambda$ для каждой системы отдельно.

Определяемый выражением (7.6.9) «вектор» энергии-импульса P^λ сохраняется, является лоренцевым 4-вектором и обладает свойством аддитивности. Какие вопросы могут еще возникнуть? Любые четыре величины, обладающие указанными свойствами, определены единственным образом и являются обычным импульсом и энергией (что формально можно показать, применяя законы сохранения к акту столкновения, в котором удаленные подсистемы сталкиваются, взаимодействуют и затем уходят снова на бесконечность [9]).

Аргументы, приведенные в этом параграфе, можно рассматривать в обратном порядке, что приведет к еще одному выводу уравнений поля Эйнштейна [10—12]. Предположим, что нам надо построить уравнения дальнодействующего поля со спином 2. Общее теоретико-групповое рассмотрение требует, чтобы они имели форму (см., например, [13])

$$R^{(1)}{}_{\mu\varkappa} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\varkappa}R^{(1)\lambda}{}_{\lambda} = \Theta_{\mu\varkappa}\ , \tag{7.6.26}$$

где $\Theta_{\mu\varkappa}$ — некая функция источника, которая благодаря тождествам (7.6.6) должна сохраняться:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Theta_{\mu\varkappa} = 0. \tag{7.6.27}$$

Неправильно было бы считать $\Theta_{\mu\varkappa}$ пропорциональной тензору энергии-импульса $T_{\mu\varkappa}$ одного вещества, поскольку вещество может обмениваться энергией и импульсом с гравитационным полем и, следовательно, $T_{\mu\varkappa}$ не удовлетворяет уравнению (7.6.27). *Необходимо* ввести в $\Theta_{\mu\varkappa}$ члены, включающие само h. Когда эти члены вычисляются с помощью условия (7.6.27), мы приходим к выводу, что уравнения поля (7.6.26) должны иметь вид (7.6.3), эквивалентный тому, что мы имеем в теории Эйнштейна. Теперь вернемся к замечанию, сделанному в начале этой главы, о том что, главное различие электромагнитных и гравитационных полей состоит в том, что источником электромагнитного по-

тенциала A^α служит сохраняющийся ток J^α, который не включает A^α, поскольку само электромагнитное поле не заряжено, в то время как источником гравитационного поля $h_{\mu\varkappa}$ является сохраняющийся «тензор» $\tau^{\mu\varkappa}$, который *должен* содержать $h_{\mu\varkappa}$, поскольку гравитационное поле само *переносит* энергию и импульс.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Bruhat Y., The Cauchy Problem, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. L. Witten, Wiley, 1962, p. 130.

Lichnerowicz A, Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics, W. A. Benjamin, 1967, Ch. 1.

Trautman A., Conservation Laws in General Relativity, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research (см. выше), p. 169.

См. также библиографию к гл. 3.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Einstein A.*, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., **142** (1917) (см. перевод: *Эйнштейн С.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1965, т. 1, стр. 601).
2. *Brans C. H.*, *Dicke R. H.* Phys. Rev., **124**, 925 (1961).
3. *Dicke R. H.*, Phys. Rev., **125**, 2163 (1962).
4. *Arnowitt R.*, *Deser S.*, *Misner C.*, цитируется в книге *Misner C.*, Proceedings of the Conference on the Theory of Gravitation, Gautier-Villars, 1964, p. 189.
5. *Brill D. R.*, *Deser S.*, Ann. Phys. (N. Y.), **50**, 542 (1968).
6. *Deser S.*, Nuovo Cimento, **55B**, 593 (1968).
7. *Brill D.*, *Deser S.*, Phys. Rev. Lett., **20**, 8 (1968).
8. *Brill D.*, *Deser S.*, *Faddeev L.*, Phys. Lett., **26A**, 538 (1968).
9. *Einstein A.*, Bull. Am. Mat. Soc., 223 (April 1935). (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1966, т. 2, стр. 416).
10. *Gupta S. N.*, Proc. Phys. Soc., **A65**, 161, 608 (1952); Phys. Rev., **96**, 1683 (1954); Rev. Mod. Phys., **29**, 334 (1957).
11. *Thirring W.*, Ann. Phys. (N. Y.), **16**, 96 (1961).
12. *Deser S.*, Gen. Rel. and Grav., **1**, 9 (1970).
13. *Weinberg S.*, Phys. Rev., **138**, 988 (1965).

Часть III

ПРИМЕНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Общепринятые суждения во все времена и во всех странах имеют тенденцию основываться на числах при оценке убедительности свидетельств.

Уигмор, О Свидетельстве

Глава 8

КЛАССИЧЕСКИЕ ОПЫТЫ ПО ПРОВЕРКЕ ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА

Эйнштейн предложил три способа проверки общей теории относительности, основанных на измерениях:

А. Гравитационного красного смещения спектральных линий.

Б. Отклонения света Солнцем.

В. Прецессии перигелия орбит внутренних планет.

За прошедшее время был выполнен еще один эксперимент по проверке общей теории относительности:

Г. Измерение временного запаздывания радарного эха, приходящего от Солнца.

Скоро также будет измерена

Д. Прецессия гироскопа на земной орбите.

Все пять опытов выполняются в пустом пространстве и в таких гравитационных полях, которые в хорошем приближении можно считать статическими (исключая опыт Д) и сферически симметричными. Таким образом, наша первая задача — решить уравнения Эйнштейна в вакууме при упрощающих предположениях об изотропности полей и независимости их от времени. Эти результаты будут затем использованы для рассмотрения опыта Б с помощью опыта Г. В гл. 3 мы уже видели, что опыты типа А позволяют проверять только принцип эквивалентности, поэтому нет необходимости рассматривать его здесь. Опыт Д связан с анизотропными эффектами, возникающими из-за вращения Земли, и будет обсуждаться в следующей главе.

§ 1. Общий случай статической изотропной метрики

На некоторое время оставим уравнения Эйнштейна и найдем в самом общем виде метрический тензор, представляющий статическое изотропное гравитационное поле. «Статическое и изотропное» означает следующее: всегда можно найти набор координат, близкий к координатам Минковского x^1, x^2, x^3, $x^0 \equiv t$, такой, что инвариантное собственное время $d\tau^2 \equiv -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ не зависит от t, а зависит от $\mathbf{x}$ и $d\mathbf{x}$ только через инварианты группы трехмерных вращений: $d\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^2$. Наиболее общий вид записи для интервала собственного времени:

$$d\tau^2 = F(r)\,dt^2 - 2E(r)\,dt\;\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} - D(r)\,(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})^2 - C(r)\,d\mathbf{x}^2, \qquad (8.1.1)$$

где F, E, D и C — неизвестные функции величины

$$r \equiv (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2}.$$

(Скалярные произведения трехмерных векторов определены во всей этой главе обычным образом, например: $\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} = x^1dx^1 + x^2dx^2 + x^3dx^3$ и т. д.) Более глубокое обоснование выражения (8.1.1) будет дано в гл. 13. Для настоящих целей можно рассматривать (8.1.1) как определение статической изотропной метрики или, альтернативно, как исходную формулу, которая позволит нам отыскать некоторые из решений уравнений поля.

Удобно заменить $\mathbf{x}$ сферическими полярными координатами τ, θ, φ, определенными обычным образом:

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 = r\cos\theta.$$

Интервал собственного времени (8.1.1) принимает тогда вид

$$d\tau^2 = F(r)\,dt^2 - 2rE(r)\,dt\,dr - r^2D(r)\,dr^2 - C(r)\,(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (8.1.2)$$

Мы вольны установить наши часы в соответствии с определением новой временной координаты

$$t' \equiv t + \Phi(r),$$

где Φ — произвольная функция r. Это позволяет исключить недиагональный элемент g_{tr}, положив

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{rE(r)}{F(r)}.$$

Тогда интервал собственного времени (8.1.2) выражается следующим образом:

$$d\tau^2 = F(r)\,dt'^2 - G(r)\,dr^2 - C(r)\,(dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2) \qquad (8.1.3)$$

где

$$G(r) \equiv r^2 \left(D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right).$$

Мы можем также переопределить радиус r и наложить тем самым еще одну связь на функции F, G и C. Например, предположим, что мы ввели

$$r'^2 \equiv C(r)\, r^2.$$

Тогда выражение (8.1.3) записывается в так называемой стандартной форме

$$d\tau^2 = B(r')\, dt'^2 - A(r')\, dr'^2 - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (8.1.4)$$

где

$$B(r') \equiv F(r),$$

$$(r') \equiv \left(1 + \frac{G(r)}{C(r)}\right) \left(1 + \frac{r}{2C(r)} \frac{dC(r)}{dr}\right)^{-2}.$$

Альтернативно можно было бы определить

$$r' = \exp \int \left(1 + \frac{G(r)}{C(r)}\right)^{1/2} \frac{dr}{r},$$

и тогда (8.1.3) записалось бы в так называемой *изотропной форме*:

$$d\tau^2 = H(r'')\, dt'^2 - J(r'') (dr''^2 + r''^2\, d\theta^2 + r''^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (8.1.5)$$

$$H(r'') \equiv F(r),$$

$$J(r'') \equiv \frac{C(r)\, r^2}{r''^2}$$

Большей частью мы будем иметь дело со «стандартной» формой

$$d\tau^2 = B(r)\, dt^2 - A(r)\, dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (8.1.6)$$

(Штрихи у r и t далее будем опускать.) Метрический тензор имеет следующие неисчезающие компоненты:

$$g_{rr} = A(r), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta, \quad g_{tt} = -B(r), \qquad (8.1.7)$$

где функции $A(r)$ и $B(r)$ должны быть определены путем решения уравнений поля. Так как $g_{\mu\nu}$ — диагональный тензор, легко написать все неисчезающие компоненты тензора, обратного ему:

$$g^{rr} = A^{-1}(r), \qquad g^{\theta\theta} = r^{-2},$$

$$g^{\varphi\varphi} = r^{-2} (\sin\theta)^{-2}, \qquad g^{tt} = -B^{-1}(r). \qquad (8.1.8)$$

Кроме того, детерминант метрического тензора равен $-g$, где

$$g = r^4 A(r)\, B(r) \sin^2\theta, \qquad (8.1.9)$$

так что инвариантный элемент объема имеет вид

$$\sqrt{g}\,dr\,d\theta\,d\varphi = r^2\sqrt{A(r)\,B(r)}\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi. \qquad (8.1.10)$$

Аффинная связность может быть вычислена с помощью обычной формулы:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,g^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right).$$

Ее неисчезающие компоненты оказываются равными:

$$\Gamma^{r}_{rr} = \frac{1}{2A(r)}\frac{dA(r)}{dr}, \qquad \Gamma^{r}_{\theta\theta} = -\frac{r}{A(r)},$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -\frac{r\sin^2\theta}{A(r)}, \qquad \Gamma^{r}_{tt} = \frac{1}{2A(r)}\frac{dB(r)}{dr},$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg} 0,$$

$$\Gamma^{t}_{tr} = \Gamma^{t}_{rt} = \frac{1}{2B(r)}\frac{dB(r)}{dr}. \qquad (8.1.11)$$

Нам необходим также тензор Риччи. Он задается формулами (6.2.4) и (6.1.5) следующим образом:

$$R_{\mu\varkappa} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta}. \qquad (8.1.12)$$

Заметим, что, несмотря на его внешний вид, первый член в нем симметричен по μ и $\varkappa$, поскольку из (4.7.6) следует, что $\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}$ равно $^1/_2\,\partial \ln g/\partial x^{\mu}$.] Подставляя в (8.1.12) компоненты аффинной связности (8.1.11), находим

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4}\left(\frac{B'(r)}{B(r)}\right)\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{A'(r)}{A(r)}\right), \qquad (8.1.13)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A(r)}\left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) + \frac{1}{A(r)},$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta},$$

$$R_{tt} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4}\left(\frac{B'(r)}{A(r)}\right)\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{B'(r)}{A(r)}\right),$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \text{ для } \mu \neq \nu.$$

(Штрих теперь означает дифференцирование по r.) Вывод о том, что $R_{r\theta}$, $R_{r\varphi}$, $R_{t\theta}$, $R_{t\varphi}$ и $R_{\theta\varphi}$ исчезают, и о том, что $R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}$, является просто следствием инвариантности метрики относительно вращений. Равенство нулю R_{rt} связано с тем, что мы установили наши часы так, что метрика оказалась инвариантной при обращении времени $t \to -t$.

Ни стандартные, ни изотропные координаты не являются гармоническими, но легко использовать для построения гармонических координат X_1, X_2, X_3, t результаты (8.1.7) и (8.1.11), найденные для метрики и аффинной связности и записанные в стандартных координатах. Введем гармонические координаты так:

$$X_1 = R(r)\sin\theta\cos\varphi, \qquad X_2 = R(r)\sin\theta\sin\varphi,$$
$$X_3 = R(r)\cos\theta. \tag{8.1.14}$$

Тогда непосредственные вычисления дадут

$$\Box^2 X_i \equiv g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2 X_i}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial X_i}{\partial x^\lambda}\right] =$$
$$= \left(\frac{X_i}{AR}\right)\left[\left(\frac{B'}{2B}+\frac{2}{r}-\frac{A'}{2A}\right)R' + R'' - \frac{2A}{r^2}R\right]$$

и

$$\Box^2 t = 0$$

для стандартной временной координаты t.

Таким образом, координаты X_1, X_2, X_3, t являются гармоническими, если $R(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 B^{1/2}A^{-1/2}\frac{dR}{dr}\right) - 2A^{1/2}B^{1/2}R = 0. \tag{8.1.15}$$

В этих гармонических координатах собственное время (8.1.6) записывается следующим образом:

$$d\tau^2 = B\,dt^2 - \frac{r^2}{R^2}\,d\mathbf{X}^2 - \left[\frac{A}{R^2R'^2} - \frac{r^2}{R^4}\right](\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X})^2. \tag{8.1.16}$$

§ 2. Решение Шварцшильда

Рассмотрим теперь уравнения поля Эйнштейна в общей статической изотропной метрике. Воспользуемся стандартной формой, введенной в предыдущем параграфе, т. е.

$$d\tau^2 = B(r)\,dt^2 - A(r)\,dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \tag{8.2.1}$$

Уравнения поля Эйнштейна в пустом пространстве имеют вид

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{8.2.2}$$

В рассматриваемой метрике компоненты тензора Риччи задаются выражениями (8.1.13). Из них видно, что достаточно приравнять нулю компоненты R_{rr} $R_{\theta\theta}$ и R_{tt}. Видно также, что выполняется соотношение

$$\frac{B_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}\right), \tag{8.2.3}$$

а потому (8.2.2) требует равенства $B'/B = -A'/A$ или

$$A(r)\,B(r) = \text{const}. \tag{8.2.4}$$

Наложим далее на A и B граничные условия, вытекающие из требования, чтобы метрический тензор при $r \to \infty$ стремился к тензору Минковского, записанному в сферических координатах:

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = \lim_{r\to\infty} B(r) = 1. \tag{8.2.5}$$

Тогда из (8.2.4) и (8.2.5) следует

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \tag{8.2.6}$$

Так как выражение (8.2.3) теперь равно нулю, остается приравнять нулю R_{rr} и $R_{\theta\theta}$. Подставляя (8.2.6) в (8.1.13), получаем

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)\,r + B(r), \tag{8.2.7}$$

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = \frac{R'_{\theta\theta}(r)}{2rB(r)}, \tag{8.2.8}$$

так что оказывается достаточным приравнять нулю $R_{\theta\theta}$, т. е.

$$\frac{d}{dr}(rB(r)) = rB'(r) + B(r) = 1.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$rB(r) = r + \text{const}. \tag{8.2.9}$$

Чтобы отыскать постоянную интегрирования, вспомним, что на больших расстояниях от центральной массы M компонента $g_{tt} \equiv \equiv -B$ должна стремиться к величине $(-1 - 2\phi)$, где ϕ — ньютоновский потенциал, равный $-MG/r$ (см. § 4 гл. 3). Следовательно, константа интегрирования равна $-2MG$ и в окончательном виде решение выглядит так:

$$B(r) = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right], \tag{8.2.10}$$

$$A(r) = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]^{-1}. \tag{8.2.11}$$

Тогда полная метрика записывается следующим образом:

$$d\tau^2 = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right] dt^2 - \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]^{-1} dr^2 - r^2\,d\theta - r^2 \sin^2\theta\,d\varphi^2. \tag{8.2.12}$$

Это решение было найдено Шварцшильдом в 1916 г.

Решение Шварцшильда найдено нами в «стандартной» форме. Мы можем также записать его в эквивалентной «изотропной» форме, вводя новую переменную для радиуса:

$$\rho \equiv \frac{1}{2}\left[r - MG + (r^2 - 2MGr)^{1/2}\right] \tag{8.2.13}$$

или

$$r = \rho\left(1 + \frac{MG}{2\rho}\right)^2.$$

Подставляя это выражение в (8.2.12), получаем

$$d\tau^2 = \frac{(1-MG/2\rho)^2}{(1+MG/2\rho)^2}\,dt^2 - \left(1+\frac{MG}{2\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta\,d\varphi^2). \tag{8.2.14}$$

Можно также построить гармонические координаты

$$X_1 = R\sin\theta\cos\varphi, \qquad X_2 = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad X_3 = R\cos\theta;\ t,$$

где в качестве R следует использовать решение дифференциального уравнения (8.1.15), имеющего вид

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\left[1-\frac{2MG}{r}\right]\frac{dR}{dr}\right) - 2R = 0.$$

Выберем следующее его решение:

$$R = r - MG.$$

Тогда метрика будет выглядеть так:

$$d\tau^2 = \left(\frac{1-MG/R}{1+MG/R}\right)dt^2 - \left(1+\frac{MG}{R}\right)^2 d\mathbf{X}^2 - \left(\frac{1+MG/R}{1-MG/R}\right)\frac{M^2G^2}{R^4}(\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X})^2, \tag{8.2.15}$$

где, естественно, $R^2 \equiv \mathbf{X}^2$.

Ориентируясь на ньютоновскую теорию, приравняем постоянную интегрирования M массе Солнца. И действительно, можно показать, что M точно равно полной энергии P^0 Солнца, *включая энергию его гравитационного поля*. Запишем метрику в стандартной форме в соответствии с определениями

$$x^1 \equiv r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 = r\cos\theta.$$

Тогда формула (8.2.12) переписывается в виде

$$d\tau^2 = \left[1-\frac{2MG}{r}\right]dt^2 - \left\{\left[1-\frac{2MG}{r}\right]^{-1} - 1\right\} r^{-2}(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})^2 - d\mathbf{x}^2.$$

Так как $g_{\mu\nu}$ не зависит от времени, а g_{i0} исчезает, из формулы (7.6.22) следует, что полный импульс системы P^i равен нулю. Но так и должно быть, поскольку рассматриваемая система — статическая и изотропная. Чтобы вычислить полную энергию, нужно выяснить асимптотическое поведение пространственной части метрики. Когда $r \to \infty$, получаем

$$h_{ij} \equiv g_{ij} - \delta_{ij} \to \frac{2MG}{r}\,n_i n_j + O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

где $n_i \equiv x^i/r$. Чтобы вычислить теперь интеграл (7.6.21), воспользуемся выражениями

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = n_i, \qquad \frac{\partial n_i}{\partial x^j} = \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{r}$$

и найдем

$$\frac{\partial h_{jj}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} \to -\frac{4MG}{r^2} n_i + O\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

так что формула (7.6.23) приводит в этом случае к полной энергии вещества и гравитационного поля, равной

$$P^0 = M. \tag{8.2.16}$$

Читатель может убедиться, что тот же самый результат следует из изотропной и гармонической форм решения Шварцшильда. И наконец, формула (7.6.24), как и следовало ожидать, дает для полного углового момента системы нулевое значение.

§ 3. Другие метрики

Общие кинематические ограничения, накладываемые принципом эквивалентности, имеют гораздо более твердое обоснование, чем уравнения поля Эйнштейна. Действительно, в гл. 3, 4, 5 мы перешли почти с неизбежностью от равенства гравитационной и инертной масс к полному аппарату тензорного анализа и общей ковариантности. Напротив, вывод уравнений Эйнштейна в гл. 7 содержал ряд догадок и, во всяком случае, не решал вопроса о существовании дальнодействующего скалярного поля типа поля Бранса — Дикке, изменяющего сами уравнения. Поэтому очень полезно, проверяя теорию относительности, считать, что, хотя законы движения частиц и фотонов в данном метрическом поле $g_{\mu\nu}$ остаются справедливыми, сама метрика может отличаться от той, которую дают уравнения Эйнштейна.

В любом случае мы могли бы ожидать, что метрика, создаваемая сферически симметричным телом, подобным Солнцу, должна выражаться в «стандартной», «изотропной» и «гармонической» формах, найденных в § 1 этой главы. Далее, мы могли бы предполагать, что метрические коэффициенты [например, $A(r)$ и $B(r)$] могут быть разложены в степенные ряды по малому параметру MG/r. Такое разложение метрики в изотропной форме было найдено Эддингтоном и Робертсоном [1, 2]:

$$d\tau^2 = \left(1 - 2\alpha \frac{MG}{\rho} + 2\beta \frac{M^2G^2}{\rho^2} + \ldots\right) dt^2 -$$
$$- \left(1 + 2\gamma \frac{MG}{\rho} + \ldots\right)(d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{8.3.1}$$

где α, β и γ — неизвестные безразмерные параметры. (Причина, по которой в разложении g_{00} удерживаются члены до порядка M^2G^2/ρ^2, а в g_{ij} — только до порядка MG/ρ, состоит в том, что в приложении к небесной механике пространственная часть метрики g_{ij} всегда умножается на дополнительный коэффициент $v^2 \sim MG/\rho$.) Сравнивая (8.3.1) с изотропной формой (8.2.14) решения Шварцшильда, видим, что уравнения поля Эйнштейна приводят к равенствам

$$\alpha = \beta = \gamma = 1. \tag{8.3.2}$$

Напротив, теория Бранса и Дикке (§ 3 гл. 7) приводит к метрике (§ 9 гл. 9), которую можно выразить в форме (8.3.1), где

$$\alpha = \beta = 1, \qquad \gamma = \frac{\omega+1}{\omega+2}, \tag{8.3.3}$$

причем ω здесь — неизвестный параметр этой теории. Для того чтобы решить, какие из полученных уравнений правильны — Эйнштейна, Бранса и Дикке или какие-нибудь еще, надо измерить α, β и γ. Вообще говоря, мы будем проводить вычисления с метрикой в ее стандартной форме, так что удобно преобразовать ее с помощью робертсоновского разложения (8.3.1) к этому виду, пользуясь определением

$$r \equiv \rho\left(1 + \gamma\frac{MG}{\rho} + \ldots\right) \tag{8.3.4}$$

или

$$\rho = r\left(1 - \gamma\frac{MG}{r} + \ldots\right).$$

Простое вычисление позволяет найти

$$d\tau^2 = \left(1 - 2\alpha\frac{MG}{r} + 2(\beta - \alpha\gamma)\frac{M^2G^2}{r^2} + \ldots\right)dt^2 - \\ - \left(1 + 2\gamma\frac{MG}{r} + \ldots\right)dr^2 - r^2\,d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2. \tag{8.3.5}$$

Мы можем также построить гармонические координаты $\mathbf{X}$, t, используя для $\mathbf{X}$

$$X_1 = R\sin\theta\cos\varphi, \quad X_2 = R\sin\theta\sin\varphi, \quad X_3 = R\cos\theta,$$

где R удовлетворяет дифференциальному уравнению (8.1.15):

$$0 = \frac{d}{dr}r^2\left(1 - (\alpha+\gamma)\frac{MG}{r} + \ldots\right)\frac{dR}{dr} - 2\left(1 - (\alpha-\gamma)\frac{MG}{r} + \ldots\right)R.$$

Решение его имеет вид

$$R = \left(1 + \frac{(\alpha - 3\gamma)\,MG}{2r} + \ldots\right)r, \tag{8.3.6}$$

и (8.1.16) приводит к следующей метрике (где $R^2 \equiv \mathbf{X}^2$):

$$d\tau_1^2 = \left[1 - 2\alpha\frac{MG}{R} + (\alpha\gamma - \alpha^2 + 2\beta\frac{M^2G^2}{R^2} + \ldots\right] dt^2 -$$

$$-\left[1 + \frac{(3\gamma - \alpha)\,MG}{R} + \ldots\right] d\mathbf{X}^2 - \frac{[(\alpha - \gamma)\,MG/R + \ldots]\,(\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X})^2}{R^2}. \quad (8.3.7)$$

Сравнение (8.3.5) и (8.3.7) с соответствующими точными решениями (8.2.12) и (8.2.15) опять показывает, что теория Эйнштейна дает $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Предсказание о том, что $\alpha = 1$, сразу следует из эмпирического определения массы M. Заметим, что выражение (8.3.1) предсказывало бы для медленно движущейся частицы, далекой от начала координат, центростремительное ускорение, равное

$$-g = -\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = -\frac{\alpha MG}{r^2}$$

(для $MG/r \ll 1$ и $v^2 \ll 1$),

в то время как массы Солнца и планет в действительности *измеряются* путем приравнивания g к MG/r^2. Следовательно, мы должны ввести α в M или, другими словами, положить $\alpha = 1$. Только в том случае, если бы оказалось возможным определить M с помощью некоторого независимого негравитационного измерения, имело бы смысл спрашивать, действительно ли α точно равно единице. При $\alpha = 1$ метрические функции, задаваемые (8.3.5), таковы

$$B(r) = 1 - \frac{2MG}{r^2} + 2(\beta - \gamma)\frac{M^2G^2}{r^2} + \ldots, \quad (8.3.8)$$

$$A(r) = 1 + 2\gamma\frac{MG}{r} + \ldots. \quad (8.3.9)$$

Как показано в гл. 3, при измерении гравитационного красного смещения определяется только член $-2MG/r$ в $B(r)$ и, следовательно, проверяется только принцип эквивалентности. Мы увидим что из других опытов по проверке общей теории относительности, перечисленных в начале этой главы, с помощью Б и Г можно обнаружить только, действительно ли $\gamma \approx 1$, в то время как с помощью В — с помощью наблюдения прецессии перигелия — проверяется соотношение $2\gamma - \beta \approx 1$. (С точностью до пренебрежения вращением Земли эксперимент Д также проверяет, равно ли $\gamma \approx 1$.)

§ 4. Общий вид уравнений движения

Рассмотрим теперь движение свободно падающей материальной частицы или фотона в статическом изотропном гравитационном поле. Сначала рассмотрим наиболее общий вид метрики, задан-

ный в стандартной форме (см. § 1 этой главы), т. е.

$$d\tau^2 = B(r)\,dt^2 - A(r)\,dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \quad (8.4.1)$$

Уравнения свободного падения имеют вид

$$\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dp}\frac{dx^\lambda}{dp} = 0, \quad (8.4.2)$$

где p — параметр, описывающий траекторию. Вообще, $d\tau$ пропорционально dp, а потому для материальной частицы мы можем нормировать p так, чтобы сделать $p = \tau$. Однако для фотона константа пропорциональности $d\tau/dp$ равна нулю, а так как мы хотим рассматривать фотоны наравне с массивными частицами, удобно сохранить свободу нормировать p независимо от нормировки τ. Подставляя в (8.4.2) ненулевые компоненты аффинной связности, задаваемой (8.1.11), получаем:

$$0 = \frac{d^2r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{A(r)}\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - r\frac{\sin\theta}{A(r)}\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{B'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2, \quad (8.4.3)$$

$$0 = \frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dp}\frac{dr}{dp} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2, \quad (8.4.4)$$

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dp}\frac{dr}{dp} + 2\operatorname{ctg}\theta\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\theta}{dp}, \quad (8.4.5)$$

$$0 = \frac{d^2t}{dp^2} + \frac{B'(r)}{B(r)}\frac{dt}{dp}\frac{dr}{dp}. \quad (8.4.6)$$

(Штрих означает d/dr.) Мы решим эти уравнения, отыскивая интегралы движения.

Так как поле изотропно, можно считать, что орбита рассматриваемой частицы расположена в экваториальной плоскости, т. е.

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (8.4.7)$$

Тогда (8.4.4) удовлетворяется тривиально, и мы можем забыть о θ как о динамической переменной. Разделив затем уравнения (8.4.5) и (8.4.6) на $d\varphi/dp$ и dt/dp соответственно, находим

$$\frac{d}{dp}\left\{\ln\frac{d\varphi}{dp} + \ln r^2\right\} = 0, \quad (8.4.8)$$

$$\frac{d}{dp}\left\{\ln\frac{dt}{dp} + \ln B\right\} = 0. \quad (8.4.9)$$

Это приводит к двум интегралам движения. Один из них можно включить в определение p, поскольку p выбирается таким образом, чтобы решение (8.4.9) имело вид

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B(r)}. \quad (8.4.10)$$

Так как величина $B(r)$ близка к единице, то параметр p почти равен координатному времени t. Другой интеграл движения получается с помощью (8.4.8) и играет роль углового момента для единицы массы:

$$r^2\frac{d\varphi}{dp} = J\ (\text{const}). \tag{8.4.11}$$

Подставляя (8.4.7), (8.4.10) и (8.4.11) в (8.4.3), переписываем это последнее оставшееся уравнение движения в виде

$$0 = \frac{d^2r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{J^2}{r^3 A(r)} + \frac{B'(r)}{2A(r)B^2(r)}. \tag{8.4.12}$$

Умножая это уравнение на $2A(r)\,dr/dp$, можно переписать его так:

$$\frac{d}{dp}\left\{A(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)}\right\} = 0.$$

Тогда последний неизвестный интеграл движения оказывается равным

$$A(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E\ (\text{const}). \tag{8.4.13}$$

Собственное время τ можно теперь найти с помощью (8.4.1), (8.4.7), (8.4.10), (8.4.11) и (8.4.13); полученный результат

$$d\tau^2 = Edp^2 \tag{8.4.14}$$

находится в соответствии с ранее сделанным замечанием о том, что (8.4.2) требует, чтобы производная $d\tau/dp$ была постоянной. Мы видим, что

$$E > 0 \text{ для материальных частиц,} \tag{8.4.15}$$

$$E = 0 \text{ для фотонов.} \tag{8.4.16}$$

Заметим также, что $A(r)$ на практике всегда положительно, а потому (8.4.13) говорит о том, что рассматриваемая частица может достигать радиуса r только в том случае, если выполняется условие

$$\frac{J^2}{r^2} + E \leqslant \frac{1}{B(r)}. \tag{8.4.17}$$

Параметр p можно везде исключить подстановкой (8.4.10) в (8.4.11), (8.4.13) и (8.4.14). В результате получаем

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = JB(r), \tag{8.4.18}$$

$$\frac{A(r)}{B^2(r)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E, \tag{8.4.19}$$

$$d\tau^2 = EB^2(r)\,dt^2. \tag{8.4.20}$$

Для медленно движущейся частицы в слабом поле величины J^2/r^2, $(dr/dt)^2$, $A-1$ и $B-1 \approx 2\phi$ будут все малы, и в первом порядке по этим величинам вышеприведенные уравнения движения записываются следующим образом:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} \approx J,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{J^2}{2r^2} + \phi \approx \frac{1-E}{2}.$$

Это те же самые уравнения, которые получались бы в теории Ньютона с учетом того, что величина $(1-E)/2$ выполняет роль энергии, приходящейся на единицу массы.

Для наглядности рассмотрим точные уравнения движения для простого случая частицы, движущейся по круговой орбите радиусом R. Так как dr/dt равно нулю, уравнение (8.4.19) имеет вид

$$\frac{J^2}{R^2} - \frac{1}{B(R)} + E = 0. \tag{8.4.21}$$

Далее, чтобы на этом радиусе частица находилась в состоянии равновесия, производная по R от левой части должна равняться нулю:

$$-\frac{2J^2}{R^3} + \frac{B'(R)}{B^2(R)} = 0. \tag{8.4.22}$$

[Если мы будем рассматривать окружность как предельный случай эллипса с перигелием $R-\delta$ и афелием $R+\delta$, тогда (8.4.19) показывает, что величина $J^2/r^2 - 1/B(r) + E$ должна равняться нулю при $r = R \pm \delta$, а это дает соотношения (8.4.21) и (8.4.22) в пределе $\delta \to 0$.] Из (8.4.21) и (8.4.22) находим

$$E = \frac{1}{B(R)}\left(1 - \frac{RB'(R)}{2B(R)}\right), \tag{8.4.23}$$

$$J^2 = \frac{B'(R)\,R^3}{2B^2(R)}. \tag{8.4.24}$$

Подставляя (8.4.24) в (8.4.18), находим, что скорость вращения равняется

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{B'(R)}{2R}\right)^{1/2}, \tag{8.4.25}$$

в то время как (8.4.23) и (8.4.20) приводят к следующей формуле для собственного времени:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{B(R) - \frac{1}{2}RB'(R)}. \tag{8.4.26}$$

Используя разложение Робертсона (8.3.8), находим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{MG}{R^3}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{(\beta-\gamma)MG}{R} + \ldots\right], \tag{8.4.27}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \left[1 - \frac{3MG}{R} + \ldots\right]. \tag{8.4.28}$$

В большинстве приложений общей теории относительности наибольший интерес представляет для нас форма орбит, т. е. зависимость r от φ, а не их эволюция во времени. Форму орбит можно получить непосредственно, исключая dp из (8.4.11) и (8.4.13); это приводит к уравнению

$$\frac{A(r)}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}-\frac{1}{J^2B(r)}=-\frac{E}{J^2}. \tag{8.4.29}$$

Решение может быть найдено в квадратурах: 44

$$\varphi=\pm\int\frac{A^{1/2}(r)\,dr}{r^2\left(\frac{1}{J^2B(r)}-\frac{E}{J^2}-\frac{1}{r^2}\right)^{1/2}}. \tag{8.4.30}$$

§ 5. Неограниченные орбиты: отклонение света Солнцем

Рассмотрим частицу или фотон, прилетающий к Солнцу из очень удаленных областей (фиг. 8.1). На бесконечности метрика является метрикой Минковского, т. е. $A(\infty)=B(\infty)=1$, и частица должна двигаться с постоянной скоростью V, причем

$$b\approx r\sin(\varphi-\varphi_\infty)\approx r(\varphi-\varphi_\infty),$$
$$-V\approx\frac{d}{dt}(r\cos(\varphi-\varphi_\infty))\approx\frac{dr}{dt},$$

где b — «прицельный параметр», а φ_∞ — начальное направление. Подставляя эти выражения в (8.4.18) и (8.4.19), видим, что они действительно удовлетворяют уравнениям движения на бесконечности, где $A=B=1$, а константы движения равны

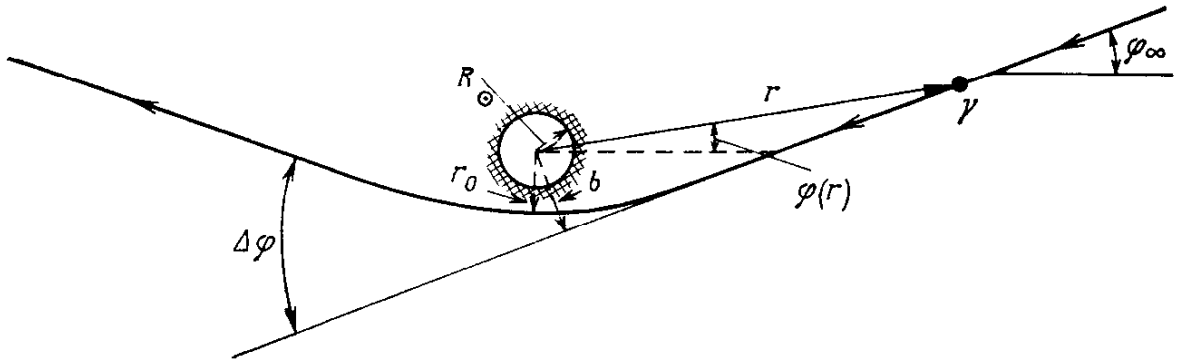
$$J=bV^2, \tag{8.5.1}$$
$$E=1-V^2. \tag{8.5.2}$$

(Фотон, конечно, имеет $V=1$, и, как мы уже видели, отсюда следует, что $E=0$.) Часто бывает более удобным выразить J через расстояние r_0 между Солнцем и ближайшей к нему точкой траектории, а не через прицельный параметр b. Для значения $r=r_0$ величина $dr/d\varphi$ исчезает, так что (8.4.29) и (8.5.2) дают

$$J=r_0\left(\frac{1}{B(r_0)}-1+V^2\right)^{1/2}. \tag{8.5.3}$$

Тогда формула (8.4.30) описывает орбиту следующим образом:

$$\varphi(r)=\varphi_\infty+\int_r^\infty\frac{A^{1/2}(r)\,dr}{r^2\left(\frac{1}{r_0^2}\left[\frac{1}{B(r)}-1+V^2\right]\left[\frac{1}{B(r_0)}-1+V^2\right]^{-1}-\frac{1}{r^2}\right)^{1/2}}. \tag{8.5.4}$$



Фиг. 8.1. Величины, употребляемые при вычислении отклонения света гравитационным полем Солнца.
Величина отклонения сильно преувеличена.

Полное изменение φ, когда r убывает от бесконечности до его минимального значения r_0, а затем опять уходит в бесконечность, как раз в два раза больше, чем изменение его в интервале от ∞ до r_0, т. е. составляет $2\,|\,\varphi(r_0) - \varphi_\infty\,|$. Если бы траектория была прямой линией, изменение как раз равнялось бы π; следовательно, *отклонение* орбиты от прямой линии составляет

$$\Delta\varphi = 2\,|\,\varphi(r_0) - \varphi_\infty\,| - \pi. \tag{8.5.5}$$

Когда эта величина положительна, угол φ изменяется более чем на 180°, т. е. траектория загибается к Солнцу; когда $\Delta\varphi$ отрицательно, траектория изгибается в обратную сторону.

Для фотона $V^2 = 1$, и (8.5.4) принимает вид

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty A^{1/2}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\left(\frac{B(r_0)}{B(r)}\right) - 1\right]^{-1/2}\frac{dr}{r}. \tag{8.5.6}$$

Если бы мы воспользовались точными значениями $A(r)$ и $B(r)$ из решений Шварцшильда (8.2.10) и (8.2.11), мы получили бы $\varphi(r)$ и $\Delta\varphi$ в виде эллиптических интегралов обычного типа, которые могут быть вычислены лишь численно с помощью разложения по малым параметрам MG/r_0 и MG/r. Однако и легче и поучительней провести разложения до интегрирования, находя $A(r)$ и $B(r)$ из разложений Робертсона (8.3.8) и (8.3.9):

$$A(r) = 1 + 2\gamma\frac{MG}{r} + \ldots,$$

$$B(r) = 1 - 2\frac{MG}{r} + \ldots.$$

Аргумент второго квадратного корня в выражении (8.5.6) тогда равен

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\left(\frac{B(r_0)}{B(r)}\right)-1=$$
$$=\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\left[1+2MG\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)+\ldots\right]-1=$$
$$=\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2-1\right]\left[1-\frac{2MGr}{r_0(r+r_0)}+\ldots\right],$$

так что (8.5.6) принимает вид

$$\varphi(r)-\varphi_\infty=\int_r^\infty\frac{dr}{r\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2-1\right]^{1/2}}\left[1+\frac{\gamma MG}{r}+\frac{MGr}{r_0(r+r_0)}+\ldots\right].$$

Этот интеграл легко берется. В результате получаем

$$\varphi(r)-\varphi_\infty=\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right)+$$
$$+\frac{MG}{r_0}\left(1+\gamma-\gamma\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2}-\sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}\right)+\ldots. \quad (8.5.7)$$

Следовательно, в первом порядке по MG/r_0 отклонение (8.5.5) определяется формулой

$$\Delta\varphi=\frac{4MG}{r_0}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right). \quad (8.5.8)$$

В этом порядке мы могли бы сразу заменить здесь r_0 прицельным параметром b.)

Если лучи света отклоняются Солнцем, мы должны подставить в полученную формулу $M=M_\odot=1{,}97\cdot10^{33}g$, следовательно, $MG=M_\odot G=1{,}475$ км, а вместо минимального значения r_0 — радиус Солнца $R_\odot=6{,}95\cdot10^5$ км. Тогда (8.5.8) принимает вид

$$\Delta\varphi=\left(\frac{R_\odot}{r_0}\right)\theta_\odot, \quad (8.5.9)$$

где

$$\theta_\odot\equiv\frac{4M_\odot G}{R_\odot}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)=1{,}75''\left(\frac{1+\gamma}{2}\right). \quad (8.5.10)$$

Далее общая теория относительности дает $\gamma=1$, а потому она предсказывает отклонение к Солнцу на угол $\theta_\odot=1{,}75''$. (Юпитер отклоняет луч света только на $0{,}02''$, так что надежд наблюдать отклонение света каким-либо другим телом, кроме Солнца, мало.) В теории Бранса и Дикке выражения (8.5.10) и (8.3.3) приводят к следующему углу отклонения:

$$\theta_\odot=\frac{4M_\odot G}{R_\odot}\left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right). \quad (8.5.11)$$

Всякий раз, когда мы получаем предсказания на основе общей теории относительности, возникает (или должен возникать) вопрос: действительно ли полученный результат относится к реальному физическому измерению или в него привнесены произвольные субъективные элементы, зависящие от нашего выбора системы координат? В рассмотренном выше случае нам следует выяснить, каким должно быть предсказываемое изменение φ, т. е. действительное смещение изображений звезд на фотопластинках. К счастью, ответить на этот вопрос достаточно просто, так как мы имеем здесь дело с экспериментом *по рассеянию*. Лучи света приходят из очень отдаленных областей, отклоняются, когда приближаются к Солнцу, и затем детектируются на Земле, пройдя путь более чем в 200 радиусов Солнца. В точках испускания и наблюдения метрику можно считать метрикой Минковского, и в этих областях не возникает никаких вопросов о смысле φ; это азимутальный угол в системе координат, в которой световые лучи движутся в основном по прямым. Поэтому мы можем связать $\Delta\varphi$ со сдвигом изображений звезд на фотопластинках с помощью обычных законов геометрической оптики. (Мы пренебрегаем здесь эффектами гравитационного поля самой Земли, поскольку это поле у ее поверхности более чем в 10^3 раз слабее, чем поле Солнца у его поверхности.) Однако нам следует быть намного осторожнее в отношении смысла нашего φ, если предсказывать отклонение света Солнцем, проводя наблюдения, например, на спутнике, движущемся вокруг Солнца по орбите, удаленной от него всего на несколько солнечных радиусов.

Другая трудность, которая возникает здесь, связана с рассмотрением фотона как кванта света, движущегося подобно любой другой частице, имеющей скорость, близкую к единице, т. е. к c. Действительно, квантовой механике не уделено никакого внимания. Длина волны света настолько мала по сравнению с масштабом гравитационного поля Солнца (примерно 10^{-5} см по сравнению с 10^{10} см), что в любой точке этого поля можно построить локально-инерциальную систему координат, которая охватывает огромное число длин волн, скажем 10^{15}. Принцип эквивалентности утверждает, что в такой системе координат свет ведет себя, как в свободном от гравитации пустом пространстве, а так как длина волны света очень мала, то это означает, что можно пренебречь дифракцией и каждый элемент фронта волны движется по прямой линии с единичной скоростью. Это утверждение, записанное в неинерциальной астрономической системе координат, есть не что иное, как наше уравнение движения (8.4.2). (Этот аргумент, кстати, поясняет, почему отклонение света не может зависеть от поляризации.)

Теперь посмотрим, как сравнивать эйнштейновское предсказание (8.5.9) с результатами наблюдений. Угол отклонения $\Delta\varphi$ измеряется классическим способом: сопоставлением видимых положений звезд вблизи солнечного диска во время затмения, когда их свет проходит у края Солнца, с их положениями ночью за шесть месяцев до момента затмения, когда эти звезды видимы на небе с Земли на противоположной стороне от Солнца, так что их свет не проходит около Солнца на пути к нам. Вычитая φ, соответствующее ночным наблюдениям, из φ, измеренного во время затмения, мы в принципе могли бы получить $\Delta\varphi$. Однако имеются неизбежные изменения в *масштабах* фотоснимков за шестимесячный срок отчасти из-за малых колебаний температур, отчасти из-за механических изменений геометрии системы телескоп — камера за столь продолжительный срок. Изменение масштаба фотоснимка приводило бы к мнимому отклонению положения звезды к Солнцу или от него на угол, пропорциональный расстоянию r_0, на котором ее свет проходит около Солнца. Поэтому на практике, наблюдения надо сравнивать с теоретической кривой

$$\Delta\varphi = \theta_\odot \frac{R_\odot}{r_0} + S\frac{r_0}{R_\odot}, \qquad (8.5.12)$$

где S — неизвестная масштабная постоянная (часто обозначаемая α), а $\theta_\odot$ — угол, который следует сравнивать с теоретическим значением 1,75″. Имеются другие эффекты, которые могут давать вклады в $\Delta\varphi$, такие, как рефракция света звезд на солнечной короне, или эффекты, создаваемые более холодным воздухом в лунной тени, но все же кажется, что ни один из них не играет важной роли. Наблюдения не могут быть выполнены для света, проходящего около солнечного диска на расстоянии, меньшем $r_0 \approx 2R_\odot$. Однако такие наблюдения все же полезны для определения $\Delta\varphi$ сопоставлением наблюдаемого значения $\Delta\varphi$ и теоретической кривой (8.5.12). Трудность такой программы состоит на самом деле в том, что измерить $\Delta\varphi$ точно за краткое время затмения нелегко. В 1919 г. экспедиция по изучению затмения была послана на два маленьких острова, Собрал у северо-восточного побережья Бразилии и Принсипи в Гвинейском заливе. Было изучено около дюжины звезд, которые дали для θ значения [3] $1{,}98 \pm 0{,}12''$ и $1{,}61 \pm 0{,}31''$ в хорошем согласии с эйнштейновским предсказанием $\theta_\odot = 1{,}75''$. Вероятно, именно этот потрясающий результат, больше чем что-либо другое, привлек внимание широкой публики к общей теории относительности в 20-х годах нашего века.

С 1919 г. были проведены измерения положений около 380 звезд во время затмений 1922, 1929, 1936, 1947 и 1952 гг., результаты которых приводятся в табл. 8.1 (взятой из сводки данных

Таблица 8.1

Измерения величин отклонения света Солнцем [4—7]

В четвертом столбце—минимальные и максимальные значения расстояний, на которые световые лучи от изученных звезд приближаются к центру Солнца. В пятом столбце приведены окончательные значения отклонений тех световых лучей, которые касаются солнечного диска.

Дата затмения	Место наблюдения	Число звезд	$r_0/R_\odot$	$\theta_\odot$, угловые секунды	Литература
29 мая 1919 г.	Собрал	7	2—6	1,98±0,16	[3]
	Принсипи	5	2—6	1,61±0,40	[3]
21 сентября 1922 г.	Австралия	11—14	2—10	1,77±0,40	[34]
	»	18	2—10	от 1,42 до 2,16	[35]
	»	62—85	2,1—14,5	1,72±0,15	[36]
	»	145	2,1—42	1,82±0,20	[37]
9 мая 1929 г.	Суматра	17—18	1,5—7,5	2,24±0,10	[38]
19 июня 1936 г.	СССР	16—29	2—7,2	2,73±0,31	[39]
	Япония	8	4,7	от 1,28 до 2,13	[40]
20 мая 1947 г.	Бразилия	51	3,3—10,2	2,01±0,27	[41]
25 февраля 1952 г.	Судан	9—11	2,1—8,6	1,70±0,10	[42]

фон Клюбера [4] [1]). Значения, полученные для $\theta_\odot$, изменяются от 1,3″ до 2,7″, но в основном попадают в интервал от 1,7″ до 2″. Самые последние результаты дают $\Delta\varphi = 1{,}70 \pm 0{,}10''$ и находятся в согласии с предсказанием Эйнштейна. Не ясно, однако, действительно ли систематическая ошибка здесь меньше, чем в предыдущих наблюдениях. Из всего этого мы можем сделать вывод, что определенно имеется отклонение света, большее чем $\theta_\odot = 0{,}875''$, которое предсказывается при $\gamma = 0$ [т. е. при $A(r) = 1$], однако о точном значении мы можем сказать лишь то, что $\theta_\odot$ лежит где-то между 1,6″ и 2,2″, т. е. значение γ лежит между 0,9″ и 1,3″. Имеется возможность улучшить точность этих измерений в ближайшем будущем, когда будет использоваться фотоэлектрическая аппаратура, следящая за положением звезд, независимо от затмений.

Последние достижения радиоастрономии [8] позволяют измерять отклонения радиосигналов Солнцем в принципе с гораздо большей точностью, чем точность измерений в оптической астрономии. Точность угловых измерений в оптическом диапазоне ограничена неоднородностями земной атмосферы и равна приблизительно 0,1″, в то время как радиоинтерферометр, работающий на длине волны λ и имеющий базис D, позволяет в принципе измерять углы с точностью порядка $\lambda/2\pi D$ рад. Это составляет уже 0,1″ при $\lambda = 3$ см и $D = 10$ км и пропорционально меньше для бóльших базисов.

[1]) Некоторые из этих данных вновь проанализированы в работе [5]; см. также [6, 7].

Одно осложнение доставляет астрономам бóльшие хлопоты на радиочастотах, чем в оптическом диапазоне: это рефракция лучей на солнечной короне. Для частот X-полосы (8000—12500 МГц) рефракция очень мала и может быть исключена обрезанием данных, связанных с радиосигналами, проходящими на расстояниях, меньших чем $2R_\odot$ от диска Солнца. Однако в S-полосе частот (2000—4000 МГц) надо анализировать данные с помощью модели, в которой часть отклонения объясняется общей теорией относительности, а часть — эффектом короны. Параметры, описывающие солнечную корону, могут быть в принципе измерены этим методом (на нескольких частотах) одновременно с измерением ОТО-эффекта, но плотность электронов в короне изменяется во времени и оказывается, что единственный действительно удовлетворительный метод учета рефракции на короне — это использование радиочастот X-полосы и выше.

В октябре каждого года происходит затмение квазара 3С279 Солнцем и несколько радиоастрономических групп пользуются этим удобным случаем, чтобы наблюдать изменение угла (около 9,5°) между квазарами 3С279 и 3С273 в интервале времени как раз перед и как раз после затмения. Эти результаты приведены в табл. 8.2. Снова видим, что общая теория относительности

Таблица 8.2

Интерферометрические измерения величин отклонения Солнцем радиоволн, приходящих от источника 3С279

Данные выражены через угол отклонения $\theta_\odot$, соответствующий радиосигналу, который касается солнечного диска.

Аппаратура	Радарные частоты, Мгц	Базис, км	Время затмения	$\theta_\odot$, угловые секунды	Литература
Оуэнс-Вэлли	9602	1,0662	30.9.1969—15.10.1969	$1{,}77\pm0{,}20$	[43]
Голдстоун	2388	21,566	2.10.1969—10.10.1969	$1{,}82^{+0{,}24}_{-0{,}17}$	[44]
»	7840	3899,92	30.9.1969—15.10.1969	$1{,}80\pm0{,}2$	[45]
Грин-Бэнк	2695 и 8085	2,7	2.10.1970—12.10.1970	$1{,}57\pm0{,}08$	[46]
	2697 и 4993,8	1,41	8.10.1970	$1{,}87\pm0{,}3$	[47]

подтверждается, но достигнутая точность все еще недостаточна, чтобы сделать выбор между теориями Эйнштейна и Бранса — Дикке. Однако данные, полученные на интерферометрах с очень большими базисами (например, «Голдстоун», имеющий базис 3900 км), дают в принципе достаточно информации для измерения углового положения с точностью около 0,001″. Можно надеяться, что анализ этих данных позволит наконец действительно точно определить γ.

§ 6. Замкнутые орбиты: смещение перигелия

Рассмотрим теперь пробную частицу, которая движется по околосолнечной орбите (фиг. 8.2). В перигелии и афелии r достигает своего минимального и максимального значения r_- и r_+ и в обеих точках равно нулю $dr/d\varphi$, так что (8.4.29) дает

$$\frac{1}{r_\pm^2} - \frac{1}{J^2 B(r_\pm)} = -\frac{E}{J^2}.$$

Из этих двух уравнений можно вывести величины двух интегралов движения

$$E = \frac{\dfrac{r_+^2}{B(r_+)} - \dfrac{r_-^2}{B(r_-)}}{r_+^2 - r_-^2}, \tag{8.6.1}$$

$$J^2 = \frac{\dfrac{1}{B(r_+)} - \dfrac{1}{B(r_-)}}{\dfrac{1}{r_+^2} - \dfrac{1}{r_-^2}}. \tag{8.6.2}$$

Угол, на который поворачивается вектор положения r от начального направления r_-, задается уравнением (8.4.30) в виде

$$\varphi(r) = \varphi(r_-) + \int_{r_-}^{r} A^{1/2}(r) \left[\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2}\right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2}.$$

Используя (8.6.1) и (8.6.2), получаем

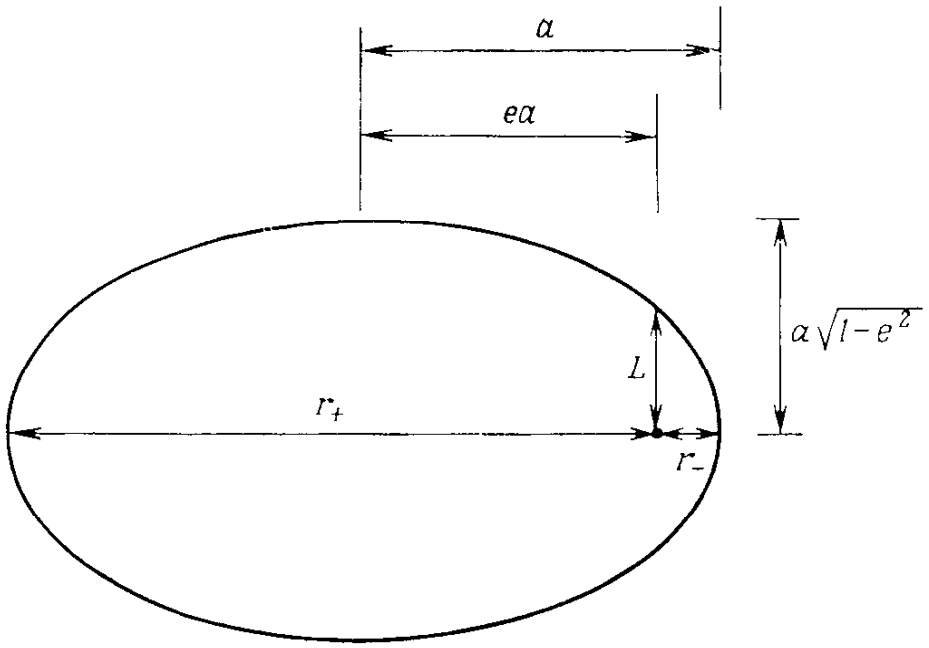
$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \int_{-r}^{r} \left[\frac{r_-^2(B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)) - r_+^2(B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+))}{r_+^2 r_-^2 (B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-))} - \frac{1}{r^2}\right]^{-1/2} \times$$

$$\times A^{1/2}(r)\, r^{-2}\, dr. \tag{8.6.3}$$

Изменение φ при уменьшении r от r_+ до r_- то же, что и при возрастании r от r_- к r_+, поэтому общее изменение угла φ при полном обороте равно $2\,|\,\varphi(r_+) - \varphi(r_-)\,|$. Если орбита представляла бы собой замкнутый эллипс, эта величина равнялась бы 2π, поэтому в общем случае при каждом повороте орбита прецессирует на угол, равный

$$\Delta\varphi = 2\,|\,\varphi(r_+) - \varphi(r_-)\,| - 2\pi. \tag{8.6.4}$$

Если подставить точные значения $A(r)$ и $B(r)$, даваемые решением Шварцшильда (8.2.10) и (8.2.11), в выражение (8.6.3), получим формулы для $\varphi(r)$ и $\Delta\varphi$ в виде эллиптических интегралов. Для того чтобы вычислить их численно, следовало бы разложить эти интегралы по степеням величин MG/r и $MG/r_\pm$.



Фиг. 8.2. Элементы эллипса, используемые при вычислении прецессии планетарных орбит.

Эллипс имеет здесь тот же эксцентриситет, что и орбита Икаруса.

Вместо этого мы разложим подынтегральное выражение, используя разложения Робертсона (8.3.8) и (8.3.9) для $A(r)$ и $B(r)$:

$$\begin{aligned} A(r) &= 1 + 2\gamma\frac{MG}{r} + \ldots, \\ B(r) &= 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{2(\beta-\gamma)M^2G^2}{r^2} + \ldots. \end{aligned} \tag{8.6.5}$$

Отметим, что в выражении (8.6.3) полностью сокращаются главные члены в $B(r)$, но не в $A(r)$. Поэтому, чтобы вычислить φ и $\Delta\varphi$ в первом порядке по $Mg/r_\pm$, необходимо в $B(r)$ учесть члены *второго* порядка по MG/r, в то время как в $A(r)$ можно ограничиться членами только первого порядка.

Дальнейшие вычисления сильно облегчаются, если заметить, что разложение

$$B^{-1}(r) \approx 1 + \frac{2MG}{r} + \frac{2(2-\beta+\gamma)M^2G^2}{r^2}$$

делает подкоренное выражение первого квадратного корня в (8.6.3) квадратичной функцией от $1/r$. Кроме того, это выражение обращается в нуль при $r = r_\pm$, а потому

$$\frac{r_-^2(B^{-1}(r)-B^{-1}(r_-)) - r_+^2(B^{-1}(r)-B^{-1}(r_+))}{r_+^2 r_-^2 (B^{-1}(r_+)-B^{-1}(r_-))} - \frac{1}{r^2} = C\left(\frac{1}{r_-}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_+}\right). \tag{8.6.6}$$

Постоянную C здесь можно определить, если устремить r к бесконечности:

$$C = \frac{r_+^2 (1 - B^{-1}(r_+)) - r_-^2 (1 - B^{-1}(r_-))}{r_+ r_- (B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-))}.$$

Умножая далее числитель и знаменатель на $2(r_- - r_+)/MG$, получаем

$$C \approx 1 - (2 - \beta + \gamma) MG \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right). \qquad (8.6.7)$$

Подстановка (8.6.5) — (8.6.7) в (8.6.3) дает

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) \approx \left[1 + \frac{1}{2}(2 - \beta + \gamma) MG \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)\right] \times \int_{-r}^{r} \frac{\left[1 + \frac{\gamma MG}{r}\right] dr}{r^2 \left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)\right]^{1/2}}.$$

Если ввести новую переменную ψ с помощью соотношения

$$\frac{1}{r} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \sin\psi, \qquad (8.6.8)$$

то интеграл становится тривиальным. Результат имеет вид

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \left[1 + \frac{1}{2}(2 - \beta + 2\gamma) MG \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)\right]\left[\psi + \frac{\pi}{2}\right] - \frac{1}{2}\gamma MG \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)\cos\psi. \qquad (8.6.9)$$

В афелии ψ равно $\pi/2$, так что (8.6.4) и (8.6.9) дают следующую прецессию при одном обороте (в единицах рад/об):

$$\Delta\varphi = \left(\frac{6\pi MG}{L}\right)\left(\frac{2 - \beta + 2\gamma}{3}\right), \qquad (8.6.10)$$

где L — характеристика эллипса, называемая *фокальным параметром*:

$$\frac{1}{L} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right).$$

Элементы планетарных орбит — большую ось a и эксцентриситет e, определяемые следующим образом:

$$r_\pm = (1 \pm e)\, a,$$

находят обычно из таблиц. Следовательно, используя формулу

$$L = (1 - e^2)\, a,$$

можно, зная a и e, определить L. Уравнения поля Эйнштейна дают $\beta = \gamma = 1$, что предсказывает следующую прецессию (в еди-

ницах рад/об):

$$\Delta\varphi = 6\pi \frac{MG}{L}. \qquad (8.6.11)$$

Величина $\Delta\varphi$ положительная, и это означает, что в целом орбита прецессирует в том же направлении, в котором движется пробная частица. В теории Бранса — Дикке соотношения (8.6.10) и (8.3.3) дают

$$\Delta\varphi = \left(\frac{6\pi MG}{L}\right)\left(\frac{3\omega+4}{3\omega+6}\right). \qquad (8.6.12)$$

Здесь нам снова следует задаться вопросом: что же означает это предсказываемое значение $\Delta\varphi$? Рассматриваемый случай не является экспериментом по рассеянию, подобно отклонению света Солнцем; здесь мы имеем дело с объектом, который никогда не уходит на бесконечность, где пространство-время описывается метрикой Минковского. При любом наблюдении за движением пробной частицы с помощью оптических приборов или радаров астрономы используют световые лучи, которые сами находятся под воздействием гравитационного поля, и если не внести поправки на отклонение света, то для любого заданного радиуса r наблюдаемая астрономом величина $\varphi(r)$ будет содержать ошибку порядка MG/L [см. выражение (8.5.8)]. Однако на практике эти тонкости не играют существенной роли, так как прецессия — величина кумулятивная. Из выражения (8.6.10) видно, что после N оборотов перигелий сместится на угол порядка NMG/L. Поэтому если $N \gg 1$, то нет необходимости учитывать в φ ошибки порядка MG/L. Действительно, выражение (8.6.11) утверждает, что после $L/3MG \gg 1$ оборотов перигелий вернется к своему первоначальному азимуту — предсказание, которое совершенно не связано с тем, как мы определяем r или φ.

Для Меркурия следует принять $L = 55{,}3 \cdot 10^6$ км, $MG = 1{,}475$ км, и тогда выражение (8.6.11) дает величину $\Delta\varphi = 0{,}1038''$ за оборот. За столетие Меркурий совершает 415 оборотов, и общая теория относительности предсказывает

$$\Delta\varphi = 43{,}03'' \text{ за столетие } (\mathrm{\u263F}).$$

К счастью, существуют точные наблюдения за Меркурием, восходящие еще к 1765 г. Эти данные были вновь проанализированы Клеменсом [9, 10] в 1943 г. Он нашел, что за столетие набегает величина $\Delta\varphi = 43{,}11 \pm 0{,}45''$, что хорошо согласуется с данными, полученными ранее Ньюкомом (§ 2 гл. 1), и находится в блестящем соответствии с общей теорией относительности. Принимая это значение, найдем поправочный коэффициент в выражении (8.6.10):

$$\left(\frac{2-\beta+2\gamma}{3}\right) = 1{,}00 \pm 0{,}01.$$

Это — наиболее важное из подтверждений общей теории относительности, во-первых, благодаря высокой его точности, а во-вторых, потому что это единственная величина, чувствительная к коэффициенту β в членах второго порядка в g_{tt}.

Данные [10—17] для Венеры, Земли, Икаруса вместе с данными для Меркурия сведены в табл. 8.3. Очевидно, что точность,

Таблица 8.3

Сравнение теоретических и наблюдаемых значений прецессии планетарных орбит за столетие [10—15]

Планета	a (10^6 км)	e	$\frac{6\pi MG}{L}$	Число оборотов за столетие	$\Delta\varphi$ (″/столетие)	
					ОТО	наблюдение
Меркурий ☿	57,91	0,2056	0,1038″	415	43,03	43,11±0,45
Венера ♀	108,21	0,0068	0,058″	149	8,6	8,4±4,8
Земля ⊕	149,60	0,0167	0,038″	100	3,8	5,0±1,2
Икарус	161,0	0,827	0,115″	89	10,3	9,8±0,8

с которой можно изучать планеты, сильно понижается по мере удаления планеты от Солнца. Это происходит по двум причинам: во-первых, потому что уменьшение эксцентриситета делает наблюдения за перигелием менее надежными, и, во-вторых, поскольку L возрастает, величина прецессии за оборот и число оборотов за столетие уменьшаются. Икарус (астероид) был обнаружен только в 1949 г., но в некотором отношении это наиболее подходящий объект для изучения, поскольку он имеет малые размеры, подходит близко к Земле, а большой эксцентриситет его орбиты позволяет определять прецессию с большой точностью. Вносилось также предложение поместить на вытянутую орбиту, расположенную близко к Солнцу, искусственный спутник. При этом спутник с параметром орбиты L, скажем, равным $10R_\odot$, за столетие прецессировал бы на угол 8250″! Трудность здесь состоит в том, что столь малый объект подвергался бы действию негравитационных возмущений, таких, как радиационное давление, солнечный ветер, микрометеориты, влиянием которых на Меркурий и Икарус можно, конечно, пренебречь.

Существуют два обстоятельства, которые необходимо помнить, оценивая согласие наблюдаемого смещения перигелия с предсказанием общей теории относительности.

Прежде всего известно множество возмущений, которые вносят вклад в прецессию планетарных орбит. В частности, теория Нью-

тона дает следующее значение прецессии для Меркурия:

$$\Delta\varphi_N = 5557{,}62 \pm 0{,}20'' \ (\mathrm{☿}).$$

Однако около 5025″ из этой величины обусловлены вращением астрономической системы координат, связанной с Землей, а примерно 532″ связаны с гравитационными возмущениями. При этом последняя величина находится в ньютоновской теории возмущений из расчетов движения других планет, в основном Венеры, Земли и Юпитера. В действительности же наблюдаемая прецессия равна

$$\Delta\varphi_{\text{набл}} = 5600{,}73 \pm 0{,}41'' \ (\mathrm{☿}),$$

и величину $\Delta\varphi = 43{,}11 \pm 0{,}45''$, названную выше «наблюдаемой» аномальной прецессией, можно получить, вычитая ньютоновскую прецессию из действительно наблюдаемой, т. е.

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{\text{набл}} - \Delta\varphi_{\text{н}}. \qquad (8.6.13)$$

Можно поставить вопрос: та ли это величина, что следует сравнивать с предсказанием общей теории относительности, 43,03″ за столетие, т. е. как узнать, будет ли правильным определять полную прецессию следующим образом: к ньютоновской величине $\Delta\varphi_{\text{н}}$, вычисленной без учета эффектов общей теории относительности, прибавлять эйнштейновскую величину $\Delta\varphi_{\text{ото}}$, вычисленную в пренебрежении всеми эффектами планетарных возмущений? В какой-то мере на этот вопрос можно ответить, вспоминая о том, что общерелятивистские поправки к $\Delta\varphi_{\text{н}}$ должны иметь порядок $MG/L \cdot \Delta\varphi_{\text{н}}$ или около $10^{-4''}$ за столетие. Для более полного ответа необходимо обсудить постньютоновское приближение, что и будет сделано в следующей главе. Но если даже допустить, что (8.6.13) в принципе верно, необходимо сознавать, что даже очень малая систематическая ошибка в $\Delta\varphi_{\text{н}}$ либо в $\Delta\varphi_{\text{набл}}$ может полностью нарушить согласие между теорией и наблюдением.

Другая опасность связана с тем, что очень малые *неизвестные* нам сейчас эффекты могут давать в наблюдаемую прецессию перигелия вклад, сравнимый по величине с предсказанием общей теории относительности. Действительно, в гл. 1 мы упоминали о том, что Ньюком вынужден был в 1911 г. отказаться от своего предложения ввести отклонения от закона обратных квадратов, поскольку наблюдаемую аномальную прецессию в 43″ за столетие можно было объяснить в рамках ньютоновской механики как величину, связанную с гравитационным полем, создаваемым веществом, вызывающим явление «зодиакального света». (Сегодня мы знаем, что между Меркурием и Солнцем нет достаточного количества вещества, которое могло бы вызвать сколько-нибудь заметную прецессию.)

Возможно также, что Солнце слегка сплюснуто [16, 17] и в этом случае его ньютоновский потенциал содержит член r^{-3}, приводящий при обращении планет к аномальной прецессии, величина которой убывает как обратный квадрат расстояния планеты от Солнца. Табл. 8.2 показывает, что в действительности в соответствии с общей теорией относительности наблюдаемая аномальная прецессия, возникающая при обращении, убывает приближенно как $1/r$, а не как $1/r^2$. Еще важнее то, что большая сплюснутость Солнца вызывала бы аномальную прецессию плоскостей орбит внутренних планет [18], которая не наблюдается. В совокупности эти два обстоятельства исключают возможность объяснения всей величины наблюдаемой аномальной прецессии за счет сплюснутости Солнца; за счет нее можно отнести не более 20% наблюдаемого эффекта. Чтобы проверить эту гипотезу, Дикке и Голденберг [19] сканировали солнечный диск фотоэлектрически в течение периода с 1 июня по 23 сентября 1966 г. Они пришли к выводу, что полярный диаметр Солнца короче экваториального диаметра с относительной разностью $(5{,}0 \pm 0{,}7) \cdot 10^{-5}$. Если явно учесть эту величину, то возникает дополнительная прецессия перигелия Меркурия, равная 3,4″ за столетие. Поэтому лишь прецессия, равная 39,6″ за столетие, может обусловливаться релятивистскими эффектами, так что возникает расхождение в 8% с предсказанием Эйнштейна: 43,03″ за столетие. Теория Бранса — Дикке может объяснить прецессию 39,6″ за столетие, если в ней положить $\omega = 6{,}4$. Однако существует несколько причин, которые не позволяют сразу отказаться от общей теории относительности.

А. Чтобы возникла сплюснутость Солнца, внутренняя часть Солнца должна совершать полный оборот вокруг собственной оси за один или два дня, т. е. намного быстрее, чем наблюдаемая скорость вращения поверхности Солнца (оборот за 25 дней). Такое различие в скоростях вращения, по-видимому, можно было бы связать [20] с наличием магнитного вращающего момента, возникающего из-за солнечного ветра и замедляющего вращение поверхности, однако не ясно, обладает ли такая конфигурация динамической устойчивостью [21, 22].

Б. В период с 1891 по 1902 г. на Геттингенском гелиометре были проведены две серии прецизионных измерений [23], которые дали значения относительной разности экваториального и полярного диаметров Солнца $(0{,}36 \pm 0{,}78) \cdot 10^{-5}$ и $(-0{,}10 \pm \pm 0{,}47) \cdot 10^{-5}$ соответственно. Эти результаты согласуются друг с другом и указывают на идеальную сферичность, однако расходятся с результатом Дикке и Голденберга $(5{,}0 \pm 0{,}7) \cdot 10^{-5}$. Геттингенские результаты были подтверждены последующими гелиометрическими измерениями.

Процитируем Ашбрука [23]:

«Что нам со всем этим делать? Может ли с учетом астрономических данных полярный диаметр Солнца быть на 0,1 угловой секунды короче экваториального, как утверждают Дикке и Голденберг? Была ли в Принстонском эксперименте какая-нибудь тонкая систематическая ошибка? Или же во всей серии гелиометрических измерений проявился какой-то незамеченный эффект?»

Чтобы правильно судить об опытах Дикке и Голденберга, следует заметить, что ось сплющенного эллипсоида, который они наблюдали, следует за осью вращения Солнца в ее изменяющемся на протяжении года положении. Это говорит о том, что Дикке и Голденберг наблюдали нечто реальное.

В. Даже если исходить из того, что визуально поверхность Солнца сплюснута, то что можно при этом утверждать о форме массового распределения и о гравитационном поле Солнца? Дикке [16] утверждает, что видимая поверхность Солнца совпадает с эквипотенциальной гравитационной поверхностью, но этот вывод опирается в значительной степени на астрофизическую теорию и поэтому может быть ошибочным.

Г. Наконец, если Дикке и Голденберг правы, то соответствие между предсказанием Эйнштейна и наблюдаемой аномальной прецессией (в пределах 1%) есть просто совпадение.

§ 7. Запаздывание радарного эха

Классическая проверка общей теории относительности, рассмотренная нами в предыдущих параграфах, определялась только видом траекторий фотонов и планет. Развитие в последние годы быстродействующей электроники и мощных средств радиолокации дало возможность измерять движение в зависимости от *времени* с той степенью точности, которая необходима для проверки уравнений Эйнштейна. В частности, Шапиро [24] предложил эксперимент и провел его совместно с группой Линкольновской лаборатории, измерив [25, 26] время, которое необходимо радарному сигналу, чтобы достичь планеты, расположенной на внутренней орбите, и, отразившись, вернуться обратно на Землю.

Чтобы понять смысл этих измерений, вычислим прежде всего время, затрачиваемое радиолокационным сигналом на прохождение от одной точки с координатами $r = r_1$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = \varphi_1$ до другой с координатами $r = r_2$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = \varphi_2$. Уравнение (8.4.19), определяющее эволюцию орбиты во времени, выглядит следующим образом:

$$\frac{A(r)}{B^2(r)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E.$$

Поскольку мы имеем дело со световыми лучами, то $E = 0$. Более того, $(dr/dt)^2$ должно обращаться в нуль в точке максимального сближения с Солнцем $r = r_0$, поэтому

$$J^2 = \frac{r_0^2}{B(r_0)}.$$

Тогда уравнение движения фотона имеет вид

$$\frac{A(r)}{B^2(r)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 B^{-1}(r_0) - B^{-1}(r) = 0. \qquad (8.7.1)$$

Из этого уравнения находим время, необходимое свету для прохождения пути от r_0 до r или от r до r_0:

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^{r} \left(\frac{A(r)/B(r)}{\left[1 - \frac{B(r)}{B(r_0)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]}\right)^{1/2} dr, \qquad (8.7.2)$$

а потому полное время, которое будет затрачено, чтобы пройти от точки *1* к точке *2*, равно (для $|\varphi_1 - \varphi_2| > \pi/2$)

$$t_{1\,2} = t(r_1, r_0) + t(r_2, r_0). \qquad (8.7.3)$$

Чтобы вычислить интеграл (8.7.2), необходимо снова применить к подынтегральному выражению разложение Робертсона, о котором говорилось в § 3 этой главы, а именно

$$A(r) \approx 1 + \frac{2\gamma MG}{r}, \qquad B(r) \approx 1 - \frac{2MG}{r}.$$

Тогда имеем

$$1 - \frac{B(r)}{B(r_0)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \approx 1 - \left[1 + 2MG\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right]\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \approx$$

$$\approx \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\left[1 - \frac{2MGr_0}{r(r+r_0)}\right].$$

Поэтому в первом порядке по MG/r и MG/r_0 (8.7.2) сводится к

$$t(r, r_0) \approx \int_{r_0}^{r} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left[1 + \frac{(1+\gamma)\,MG}{r} + \frac{MGr_0}{r(r+r_0)}\right] dr.$$

Интеграл стал табличным, и можно найти время прохождения светом расстояния от r_0 до r:

$$t(r, r_0) \approx \sqrt{r^2 - r_0^2} + (1+\gamma)\,MG \times$$

$$\times \ln\left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}\right) + MG\left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{1/2}. \qquad (8.7.4)$$

Основной член $\sqrt{r^2 - r_0^2}$ — это то, чего следовало ожидать, если бы свет распространялся с единичной скоростью по прямым линиям. Очевидно, что другие члены отражают дополнительное

гравитационное *запаздывание* во времени, которое возникнет, пока радиосигнал дойдет до Меркурия и обратно. (Обратим внимание на то, что это запаздывание прямо противоположно тому, которое следует из аналогии со случаем медленно движущегося тела, скажем, кометы.) Это дополнительное запаздывание максимально, когда Меркурий находится в верхнем соединении и радиолокационный сигнал касается Солнца. В этом случае расстояние r_0 примерно равно радиусу Солнца, $r_0 \approx R_\odot$, и много меньше, чем расстояния от Земли $r_\oplus$ и от Меркурия r до Солнца. Поэтому дополнительное максимальное время запаздывания при движении луча туда и обратно задается с помощью соотношений (8.7.3) и (8.7.4) в виде

$$(\Delta t)_{\text{макс}} \equiv 2\left[t(r_\oplus, R_\odot) + t(r_\varphi, R_\odot) - \sqrt{r_\oplus^2 - R_\odot^2} - \sqrt{r_\varphi^2 - R_\odot^2}\right] \approx$$

$$\approx 4M_\odot G\left\{1 + \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\ln\left(\frac{4r_\varphi r_\oplus}{R_\odot^2}\right)\right\} \approx$$

$$\approx 5{,}9 \text{ км}\left\{1 + 11{,}2\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\right\}. \qquad (8.7.5)$$

Если уравнения поля Эйнштейна верны, то $\gamma = 1$ и дополнительное максимальное запаздывание

$$(\Delta t)_{\text{макс}} \approx 72 \text{ км} = 240 \text{ мкс}. \qquad (8.7.6)$$

Не представляет никакой сложности отсчитать с точностью до микросекунд время порядка 20 мин, затрачиваемое радиосигналом на прохождение до Меркурия и обратно. Тем не менее при разборе и интерпретации такого эксперимента возникают чрезвычайно большие трудности.

Одна из трудностей заключается в том, что радиолокационный сигнал отражается не от одной «зеркальной точки» поверхности Меркурия, а от площадки вполне определенного размера, а потому момент прибытия сигнала известен с точностью до нескольких сотен микросекунд из-за его размазывания. Группа Шапиро разрешила эту проблему, измеряя распределения вернувшегося сигнала как по времени прибытия, так и по частоте. Вследствие вращения и орбитального движения Земли и Меркурия каждый элемент отражающей поверхности имеет относительно антенны радара определенную скорость, а потому элемент отражает радиолокационный сигнал с определенным доплеровским смещением частоты. Тогда если известны отражающие свойства поверхности, то, анализируя наблюдаемое распределение возвращающегося эха по времени и по частоте, можно найти время прибытия эха, отразившегося от ближайшей к Земле точки поверхности Меркурия.

Отражающие свойства поверхности можно исследовать, изучая эхо от Меркурия, когда он находится вблизи нижнего соединения,

поскольку отношение сигнала к шуму в этом положении наибольшее и никакие известные эффекты общей теории относительности не влияют на время распространения сигнала.

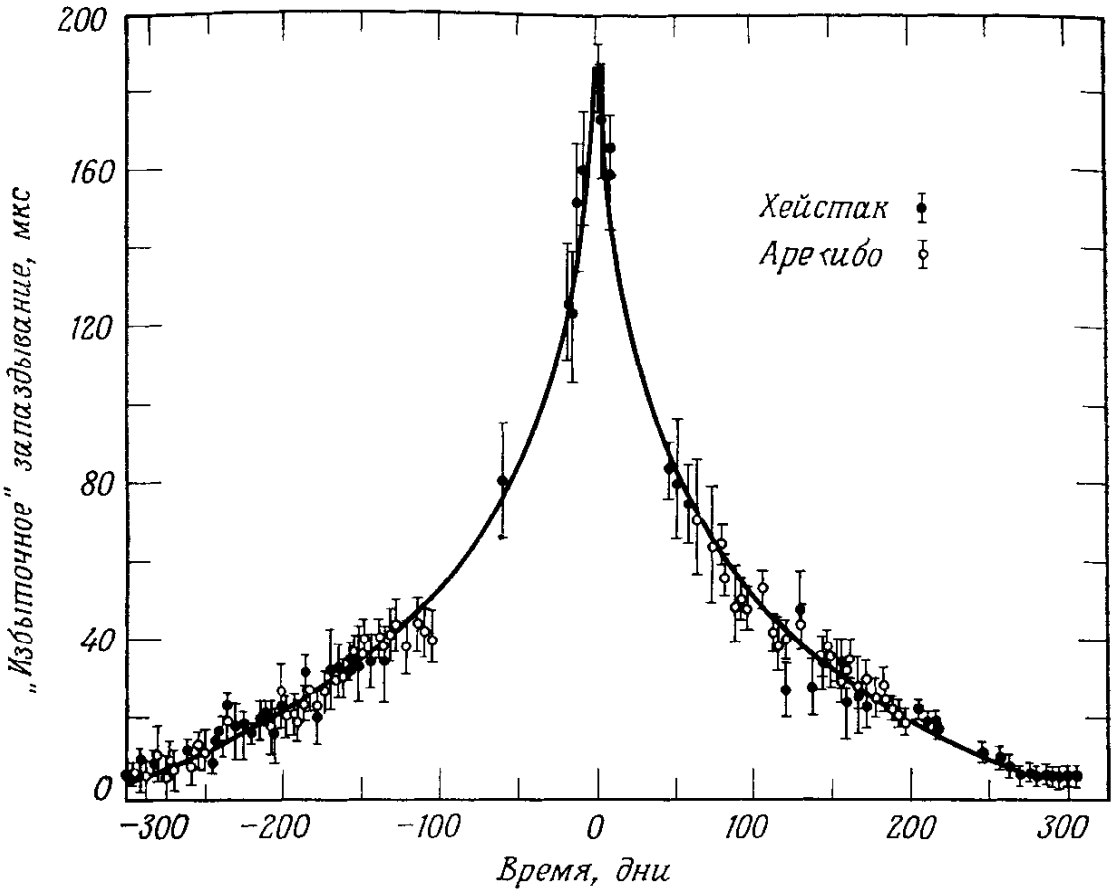
Основная трудность состоит в том, что для вычисления дополнительного времени запаздывания порядка, например, 10 мкс необходимо знать с той же точностью время, за которое радиосигнал прошел бы этот путь в отсутствие поля тяготения Солнца, т. е. мы должны знать расстояние

$$(r_\oplus^2 - r_0^2)^{1/2} + (r_\varphi^2 - r_0^2)^{1/2}$$

с точностью до 1,5 км! Здесь $r_\oplus$, r_φ и r_0 — расстояния (в «стандартных» координатах) от центра Солнца до радарной антенны, находящейся на Земле, до ближайшей к Земле точки на поверхности Меркурия и до точки наибольшего сближения сигнала с Солнцем соответственно. Однако одна оптическая астрономия, конечно, не в состоянии определить со сколько-нибудь близкой к указанной точностью положение центров Меркурия и Земли или же радиус Меркурия. Более того, требование столь высокой точности связано с необходимостью определить, имеем ли мы дело со стандартными, изотропными или гармоническими координатами. Можно не сомневаться в том, чтобы даже Военно-Морская обсерватория США не обращает внимания на столь тонкие отличия! Группа Шапиро справилась с этой проблемой, использовав общую теорию относительности, чтобы выразить $r_\oplus(t)$, $r_\varphi(t)$ и $r_0(t)$ через большой набор неизвестных параметров, включающих β, γ, $M_\odot G$, экваториальный радиус Меркурия, а также положения и скорости Меркурия и Земли в некоторый начальный момент времени. Эти параметры были затем определены подгонкой наблюдаемого времени движения радиосигнала до Меркурия и обратно по теоретическим формулам (8.7.3) и (8.7.4).

Первый эксперимент, в котором был использован работающий на частоте 7840 МГц Хейстакский радар Линкольновской лаборатории, проведенный во время верхних соединений Меркурия с 28 апреля до 20 мая и с 15 августа до 10 сентября 1967 г., дал хорошее согласие теории и наблюдений [25]. Чтобы оценить это количественно, укажем, что при вычислении для произвольного γ с помощью уравнений (8.7.3) и (8.7.4) времени запаздывания сигнала наилучшее соответствие получается при $\gamma = 0{,}8 \pm 0{,}4$. (В предварительном анализе β было принято за единицу по чисто техническим причинам.) Дальнейшие наблюдения в Хейстаке и улучшенный анализ данных дали следующий результат [26]:

$$\gamma = 1{,}03 \pm 0{,}1 \qquad (8.7.7)$$



Фиг. 8.3. Сравнение теоретических и наблюдаемых значений времени запаздывания радиоэха от Венеры [26].
Верхнее соединение: 25 янв. 1970 г.

(фиг. 8.3). В дополнение к этому в связи с появлением новых радиолокационных данных Шапиро вновь проанализировал [27] свыше 400 000 ранее выполненных оптических наблюдений Солнца, Луны и планет и нашел, что квадрупольный член гравитационного потенциала Солнца имеет величину $J_2 = (-0{,}8 \pm 2{,}5) \times \times 10^{-5}$, причем J_2 определяется разложением по полиномам Лежандра:

$$\phi_\odot = -\frac{GM_\odot}{r}\left\{1 - \sum_{l=2}^{\infty} J_l \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)\right\}.$$

Укажем для сравнения, что сплющенность Солнца, найденная Дикке и Голденбергом, соответствует квадрупольному члену $J_2 = (2{,}7 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-5}$. Если J_2 обратить в нуль, то, согласно анализу Шапиро, значения дополнительной прецессии перигелия орбит Меркурия и Марса будут равны значениям, предсказываемым общей теорией относительности, умноженным на $(0{,}99 \pm 0{,}01)$ и $(1{,}07 \pm 0{,}1)$ соответственно.

Шапиро [28] предложил также измерить время запаздывания радиоимпульса, приходящего от пульсара. Когда пульсар CP0952

наблюдается вместе с Солнцем в телесном угле с раствором 5°, то в это время радиоимпульс должен запаздывать приблизительно на 50 мкс.

Недавно группа Лаборатории реактивного движения измерила [29] время запаздывания радиосигналов, посланных с Земли на ретрансляторы на борту искусственных спутников «Маринер» 6 и 7 и вернувшихся оттуда на Землю, в период март — июнь 1970 г., когда эти спутники были вблизи нижнего соединения. Наилучшие данные были получены 28 апреля, когда радиосигнал прошел на расстоянии трех солнечных радиусов от центра Солнца. Анализ этих данных дает время запаздывания, совпадающее с точностью до 5% с предсказаниями общей теории относительности. К сожалению, частота, использованная в этом эксперименте, лежала в S-полосе, т. е. вблизи 2300 МГц, и поэтому солнечная корона приводила здесь к осложнениям (§ 5 гл. 8). К тому же спутники «Маринер» ввиду их малости испытывают заметное влияние негравитационных сил, возникающих в основном из-за давления солнечного излучения, утечки газа и разбалансировки системы, контролирующей ориентацию.

Время возвращения радарного эха сильно зависит от незначительных особенностей орбитального движения, и это превращает вычисление «теоретического» времени возвращения в задачу огромной трудности. Мы не будем рассматривать ее здесь, поскольку она выходит за рамки простого аналитического рассмотрения, принятого в этой книге. Есть, однако, возможность получить представление об этом, рассмотрев достаточно идеализированную ситуацию.

Будем считать, что сигнал отражается от точечной планеты *1*, находящейся на круговой орбите радиусом r_1 вокруг Солнца, а радарную антенну поместим на планету *2*, которая движется в плоскости орбиты планеты *1* ($\theta = \pi/2$), но настолько удалена от Солнца, что ее положение можно считать фиксированным с $r_2 \gg r_1$ и $\phi_2 = 0$. (Величина ϕ_2 за время прохождения сигнала изменяется как $r_2^{-1/2}$.) Радиосигнал, испущенный в момент времени t с планеты *2*, достигнет планеты *1* в момент времени t_1 задаваемый (для $|\phi_1| > \pi/2$) следующим образом:

$$t_1 = t + t(r_1, r_0) + t(r_2, r_0),$$

или, используя (8.7.4) при $r_2 \to \infty$, получаем

$$t_1 = t + T + (r_1^2 - r_0^2)^{1/2} + MG\left(\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}\right)^{1/2} + \\ + (1+\gamma)\, MG \ln\left(\frac{[r_1 + (r_1^2 - r_0^2)^{1/2}]\, r_1}{r_0^2}\right), \qquad (8.7.8)$$

где T — большая постоянная величина, равная

$$T \equiv r_2 + MG + (1+\gamma)\, MG \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \qquad (8.7.9)$$

В этот момент времени азимутальный угол планеты задается с помощью уравнения (8.4.27) следующим образом:

$$\varphi_1 = \varphi(0) + \omega t_1, \tag{8.7.10}$$

$$\omega \approx \left(\frac{MG}{r_1^3}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{(\beta-\gamma)\,MG}{r_1}\right) \tag{8.7.11}$$

И наконец, r_0 можно вычислить, положив φ_1 равным величине, определяемой уравнением (8.5.7), а именно

$$\varphi_1 = [\varphi(r_0) - \varphi(r_1)] + [\varphi(r_0) - \varphi(\infty)] =$$
$$= \pi - \arcsin\left(\frac{r_0}{r_1}\right) + \left(\frac{MG}{r_0}\right)\left[1 + \gamma + \gamma\left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right)^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}\right)^{1/2}\right].$$

Тогда в первом порядке по MG имеем

$$r_0 \approx r_1 \sin\varphi_1 - MG\operatorname{ctg}\varphi_1\left[1 + \gamma - \gamma\cos\varphi_1 + \left(\frac{1-\sin\varphi_1}{1+\sin\varphi_1}\right)^{1/2}\right]. \tag{8.7.12}$$

Подставляя (8.7.10) — (8.7.12) в (8.7.8), получим следующее соотношение между t — временем излучения первоначального радарного сигнала и t_1 — временем отражения сигнала:

$$t_1 = t + T - a\cos(\omega t_1 + \varphi(0)) -$$
$$- b\{1 - \ln[1 + \cos(\omega t_1 + \varphi(0))]\}, \tag{8.7.13}$$

где

$$a \equiv r_1 - \gamma MG, \tag{8.7.14}$$

$$b \equiv (1 + \gamma)\,MG. \tag{8.7.15}$$

Соотношение (8.7.13) можно разрешить относительно $t_1(t)$, и тогда момент прибытия эха обратно определится так:

$$t_2(t) = t + 2[t_1(t) - t] = 2t_1(t) - t. \tag{8.7.16}$$

Сравнивая это теоретическое предсказание с наблюдаемым временем возвращения радиоэха, можно в принципе определить пять параметров:

$$T,\quad a,\quad b,\quad \omega,\quad \varphi(0).$$

Но эти параметры зависят от шести неизвестных величин: r_1, r_2, MG, γ, β и $\varphi(0)$; поэтому даже если наши измерения и соотношения (8.7.13) — (8.7.16) будут совершенно точными, мы не в состоянии определить ни β, ни γ. Лучшим выходом будет исключить из формул (8.7.11), (8.7.14), (8.7.15) для ω, a и b величины r_1

и MG и таким способом получить формулу для γ:

$$1+\gamma = ba^{-3}\omega^{-2}\left[1+O\left(\frac{MG}{a}\right)\right]. \qquad (8.7.17)$$

Отметим, что в данном случае β нельзя определить, измеряя запаздывание радиосигнала, даже в принципе (интересные соображения по этому вопросу содержатся в [30, 31]). Чтобы стало возможным определить и β и γ, необходимо наблюдать радиоэхо, отраженное от *двух* планет, находящихся на круговых орбитах, поскольку в этом случае есть десять наблюдаемых параметров и из них только восемь неизвестны. Более важным является то, что β можно измерить, наблюдая радиоэхо только от Меркурия, поскольку его орбита настолько вытянута, что ее прецессия существенно влияет на время возвращения радиосигнала.

§ 8. Сингулярность Шварцшильда *

Читатель, возможно, обратил внимание на то, что решение Шварцшильда (8.2.12) становится при $r = 2MG$ сингулярным. Это значение радиуса соответствует $\rho = MG/2$ и $R = MG$, откуда видно, что эта сингулярность возникает в том случае, когда метрика выражена в изотропной (8.2.14) или гармонической (8.2.15) формах. Радиус, при котором в стандартных координатах возникает сингулярность, называется *шварцшильдовским радиусом* массы M.

Следует сразу подчеркнуть, что ни у одного из известных объектов во Вселенной гравитационное поле не имеет сингулярности Шварцшильда. Сингулярность Шварцшильда возникает в решении вакуумных уравнений Эйнштейна $R_{\mu\nu} = 0$, и, следовательно, не существенна, если радиус $2GM$ находится внутри массивного тела, где необходимо использовать полное уравнение Эйнштейна (7.1.13). Для Солнца радиус Шварцшильда $2GM_\odot$ равен 2,95 км, т. е. находится глубоко внутри Солнца, и, как мы убедимся в гл. 11, решение полного уравнения Эйнштейна для внутренней части стабильной звезды не имеет ни сингулярности Шварцшильда, ни какой-либо другой сингулярности. Для протона радиус Шварцшильда равен 10^{-50} см, что на 37 порядков ниже, чем характерный радиус протона 10^{-13} см! Как мы увидим из дальнейшего (гл. 11), очень массивное тело может коллапсировать до радиуса, много меньшего его шварцшильдовского радиуса, но, за этим одним гипотетическим исключением, сингулярность Шварцшильда, кажется, не имеет большого отношения к реальному миру.

*) Этот параграф лежит несколько в стороне от основной линии книги и может быть опущен при первом чтении.

Тем не менее поучительно представить себе настолько малое и массивное тело, что радиус $2GM$ лежит вне его, в пустом пространстве. Тогда решение Шварцшильда выполняется для этого радиуса, и действительно возникает сингулярность. Но будет ли реально проявляться эта сингулярность? Легко вычислить четыре неисчезающих инварианта кривизны, описанных в § 7 гл. 6 и увидеть, что на радиусе Шварцшильда все они имеют идеально хорошее поведение, хотя и становятся сингулярными в нуле. Это наводит на мысль, что кажущаяся сингулярность Шварцшильда может быть только свойством системы координат, нами использованной. (Если на радиусе Шварцшильда хотя бы один инвариант кривизны был бы сингулярным, то эта сингулярность, конечно, проявлялась бы во всех системах координат.) Лишь не очень давно была найдена система координат, в которой можно избежать сингулярности Шварцшильда, если допустить возможность того, что мир имеет необычную топологию [32]. Чтобы продемонстрировать эту новую интерпретацию сингулярности Шварцшильда, введем новый набор координат r', θ, φ, t' следующим образом:

$$r'^2 - t'^2 \equiv T^2 \left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2GM}\right), \tag{8.8.1}$$

$$\frac{2r't'}{r'^2 + t'^2} \equiv \operatorname{th}\left(\frac{t}{2MG}\right), \tag{8.8.2}$$

где T — произвольная константа. Тогда решение Шварцшильда приобретает вид

$$d\tau^2 = \left(\frac{32G^3M^3}{rT^2}\right) \exp\left(\frac{-r}{2GM}\right)(dt'^2 - dr'^2) - \\ - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2, \tag{8.8.3}$$

где r считается теперь функцией интервала $r'^2 - t'^2$, задаваемого выражением (8.8.1). Метрика будет несингулярной, пока r^2 имеет хорошее поведение и положительно определено, т. е. при условии

$$r'^2 > t'^2 - T^2.$$

Следовательно, для временного интервала $0 < t' < T$ и всех действительных r' метрика будет совершенно гладкой, финитной функцией r'. Действительно, даже $g_{\theta\theta}$ и $g_{\varphi\varphi}$ не исчезают при $r' = 0$, так что, когда мы приближаемся к началу координат $r' = 0$, ничто не мешает нам продолжить на отрицательные r! Следовательно, пространство, описываемое (8.3.3), свободно от сингулярностей и состоит из двух тождественных листов с $r' > 0$ и $r' < 0$, переходящих друг в друга непрерывным образом в точке ветвления $r' = 0$. Когда t' достигает значения T, листы разъединяются и с этого момента в мет-

рике появляется действительная сингулярность при $r' = \pm\sqrt{t'^2 - T^2}$, т. е. при $r = 0$. Однако если даже это так, метрика не имеет сингулярности при $r' = t'$, что соответствует радиусу Шварцшильда $r = 2GM$.

Напомним еще раз, что сингулярность Шварцшильда не возникает в реально существующих во Вселенной гравитационных полях. В самом деле, эта сингулярность не может проявиться даже при гравитационном коллапсе (§ 9 гл. 11), ибо при $t' < T$ пространство пусто для всех r'. Однако, как из басен Эзопа, отсюда следует полезная мораль. Она состоит в том, что появляющаяся в одной системе координат сингулярность в другой системе координат может иметь совершенно другую интерпретацию.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Брагинский В. Б., Руденко В. Л., УФН, **100**, 395 (1970).
Bertotti B., Brill D., Krotkov R., Experiments in Gravitation, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, ed.L Witten, Wiley, 1962, p. 1.
Dicke R. H., Experimental Relativity, в книге Relativity, Groups, and Topology, ed. C. DeWitt and B. DeWitt, Gordon and Breach Science Publ., 1964, p. 163.
Dyson F. J., Experimental Tests of General Relativity, в книге Relativity-Theory and Astrophysics 1. Relativity and Cosmology, ed. J. Ehlers, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1967, p. 117.
Schiff L. I., Comparison of Theory and Observation in General Relativity, в книге Relativity Theory and Asrophysics 1. Relativity and Cosmology (см. выше), p. 105.
Thorne K. S., Will C. M., High Precision Tests of General Relativity, Comments Astrophys. and Space Phys., 2, 35 (1970).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Robertson H. P.*, в книге Space Age Astronomy, ed, A. J. Deutsch and W. B. Klemperer Academic Press, 1962, p. 228.
2. *Eddington A. S.*, The Mathematical Theory of Relativity, 2nd ed., Cambridge University Press, 1924, p. 105 (см. перевод: *Эддингтон А. С.*, Математическая теория относительности, Гос. научн. тех. изд., 1933).
3. *Dyson F. W., Eddington A. S., Davidson C.*, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), **220A**, 291 (1920); Mem. Roy. Astron. Soc. **62**, 291 (1920).
4. *Von Klüber H.*, в книге Vistas in Astronomy, ed. A. Beer, Vol. 3, Pergamon Press, 1960, p. 47.
5. *Bertotti B., Brill D., Krotkov R.*, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, Wiley, 1962, p. 1.
6. *Trumpler R. J.*, Helv. Phys. Acta, Suppl., IV, 106 (1956).
7. *Mikhailov A. A.*, Astron. Zh., **33**, 912 (1956).
8. *Shapiro I. I.*, Science, **157**, 806 (1967).
9. *Clemence G. M.*, Astron. Papers Am. Ephemeris, **11**, Part 1 (1943).
10. *Clemence G. M.*, Rev. Mod. Phys., **19**, 361 (1947).
11. *Duncombe R. L., Astron J.*, **61**, 174 (1956); Astron. Papers Am. Ephemeris, **16**, Part 1 (1958).
12. *Duncombe R. L., Clemence G. M.*, Astron. J., **63**, 456 (1958).
13. *Shapiro I. I., Smith W. B., Ash M. E., Herrick S.*, Astron. J., **76**, 588 (1971).
14. *Shapiro I. I., Ash M. E., Smith W. B.*, Phys. Rev. Lett., **20**, 1517(1968).

15. *Lieske J. H., Null G.*, Astron. J., **74**, 297 (1969).
16. *Dicke R. H.*, Nature, **202**, 432 (1964).
17. *Roxburgh I. W.*, Icarus, **3**, 92 (1964).
18. *Shapiro I. I.*, Icarus, **4**, 549 (1965).
19. *Dicke R. H., Goldenberg H. M.*, Phys. Rev. Lett., **18**, 313 (1967).
20. *Brandt J. C.*, Astrophys. J., **144**, 1221 (1966).
21. *Goldreick P., Schubert G.*, Ap. J., **154**, 1005 (1969).
22. *Dicke R. H.*, Astrophys. J., **159**, 1 (1970).
23. *Ashbrook J.*, Sky and Telescope, **34**, 229 (1967).
24. *Shapiro I. I.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 789 (1964).
25. *Shapiro I. I., Pettengill G. H., Ash M. E., Stone M. L., Smith W. B., Ingalls R. P., Brockelman R. A.*, Phys. Rev. Lett., **20**, 1265 (1968).
26. *Shapiro I. I., Ash M. E., Ingalls R. P., Smith W. B., Campbell D. B., Dyce R. B., Jurgens R. F., Pettengill G. H.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 1132 (1971),
27. *Shapiro I. I.*, Доклад на 3-й конференции по теории относительности, Кембридж, июнь 1970 (не опубликовано).
28. *Shapiro I. I.*, Science, **162**, 352 (1968).
29. *Anderson J. D.*, Доклад на 3-й конференции по теории относительности, Кембридж, июнь 1970 (не опубликовано).
30. *Ross D. K., Schiff L. I.*, Phys. Rev., **141**, 1215 (1966).
31. *Shapiro I. I.*, Phys. Rev., **145**, 1005 (1966).
32. *Kruskal M. D.*, Phys. Rev., **119**, 1743 (1960).
33. *Fronsdal C.*, Phys. Rev., **116**, 778 (1959).
34. *Dodwell G. F., Davidson C. R.*, Mon. Nat. Roy. Astron. Soc., **84**, 150 (1924).
35. *Chant C. A., Young R. K.*, Publ. Dominion Astron. Obs., **2**, 275 (1924).
36. *Campbell W. W., Trumpler R.*, Lick Observ. Bull., **11**, 41 (1923); Publ. Astron. Soc. Pacific, **35**, 158 (1923).
37. *Campbell W. W., Trumpler R.*, Lick Observ. Bull., **13**, 130 (1928).
38. *Freundlich E. F., Klüber H., Brunn A.*, Ab. Preuss. Akad. Wiss., No. 1, 1931; Zs. Astrophys., **3**, 171 (1931).
39. *Михайлов А. А.*, ДАН СССР, **29**, 189 (1940).
40. *Matukuma T., Onuki A., Yosida S., Iwana Y.*, Jap. Journ. Astron., and Geophys., **18**, 51 (1940).
41. Van Biesbroeck G., Astron. Journ., **55**, 49, 247 (1949).
42. Van Biesbroeck G., Astron. Journ., **58**, 87 (1953).
43. *Seielstad G. A., Sramek R. A., Weller K. W.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 1373 (1970).
44. *Muhleman D. O., Ekers R. D., Fomalont E. B.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 1377 (1970).
45. *Shapiro I. I.*, частное сообщение.
46. *Sramek R. A.*, Astrophys. Journ., **167**, L55 (1971).
47. *Hill J. M.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **153**, 7P (1971).

Я думаю, что сейчас у нашего руля почти все время стоит Исаак Ньютон.

Астронавт Вильям А. Андерс на обратном пути после первого облета Луны, 26.12.68

Глава 9

ПОСТНЬЮТОНОВСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Уравнения поля Эйнштейна нелинейны и потому не могут быть точно решены в общем виде. Налагая требования симметрии — независимость от времени и изотропию пространства, нам удалось найти одно точное полезное решение — метрику Шварцшильда, но невозможно в полной мере использовать это решение, поскольку Солнечная система в действительности *не* является ни статической, ни изотропной. В самом деле, ньютоновские эффекты в гравитационных полях планет на порядок величины больше, чем первые поправки, связанные с общей теорией относительности, и совершенно нечувствительны к высшим поправкам, которые в принципе возникают из точного решения Шварцшильда.

Вот почему нам не нужно искать более точного решения, а следует развивать систематический приближенный метод безотносительно к каким-либо предполагаемым свойствам симметрии системы. Существуют два таких особенно полезных метода; они называются *постньютоновским приближением* [1] и *приближением слабого поля*. Первый из них применим к системам, подобным солнечной, т. е. к системам медленно движущихся частиц, связанных гравитационными силами. Именно такие системы являются предметом рассмотрения в данной главе. Во втором методе поля рассматриваются в приближении низшего порядка, но не предполагается, что материя движется нерелятивистски. Такое приближение применимо для изучения гравитационного излучения и будет обсуждаться в следующей главе. Ясно, что существует область, в которой методы перекрываются, а именно когда частицы медленно движутся в очень слабых полях. Однако ввиду их различных применений эти методы лучше разделить.

Постньютоновское приближение исторически возникло [1] как один из результатов исследования следующей *проблемы движения*: могут ли уравнения движения массивных частиц вытекать из одних только уравнений гравитационного поля? Согласно точке зрения, принятой в этой книге, уравнения движения в общей теории относительности следуют из уравнений движения специальной теории относительности и принципа эквивалентности.

Поэтому в этой главе мы будем рассматривать постньютоновское приближение как метод, представляющий собственный интерес, а не как часть проблемы движения.

§ 1. Постньютоновское приближение

Рассмотрим систему частиц, которые, подобно Солнцу и планетам, связаны взаимным гравитационным притяжением. Пусть $\bar{M}$, $\bar{v}$ и $\bar{r}$ — средние значения масс, скоростей частиц и расстояний между ними. В ньютоновской механике есть хорошо известный результат, что среднее значение кинетической энергии $^1/_2\bar{M}\bar{v}^2$ по порядку величины примерно равно характерной потенциальной энергии $G\bar{M}^2/\bar{r}$, поэтому

$$\bar{v}^2 \sim \frac{G\bar{M}}{\bar{r}}. \tag{9.1.1}$$

(Например, частица, вращающаяся по круговой орбите радиусом r вокруг центральной массы M, имеет скорость v, задаваемую в ньютоновской механике точной формулой $v^2 = GM/r$.) Постньютоновское приближение можно рассматривать как метод описания движения системы на один порядок точнее по малым параметрам $G\bar{M}/\bar{r}$ и $\bar{v}^2$, чем это делает ньютоновская механика. Иногда говорят о разложении по обратным степеням скорости света, но так как в нашей системе единиц $c = 1$, мы будем считать параметром разложения $\bar{v}^2$ или, эквивалентно, $G\bar{M}/\bar{r}$.

Прежде всего посмотрим, в чем состоит наша задача. Уравнения движения частиц имеют вид

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0.$$

Отсюда можно вычислить ускорения следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{dt^2} &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}\frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}\frac{dx^i}{d\tau}\right] = \\ &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-2}\frac{d^2x^i}{d\tau^2} - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-3}\frac{d^2t}{d\tau^2}\frac{dx^i}{d\tau} = \\ &= -\Gamma^i{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} + \Gamma^0{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{dx^i}{dt}.\end{aligned}$$

Более подробно это выражение можно переписать так:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{dt^2} = &-\Gamma^i_{00} - 2\Gamma^i{}_{0j}\frac{dx^j}{dt} - \Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + \\ &+\left[\Gamma^0{}_{00} + 2\Gamma^0{}_{0j}\frac{dx^j}{dt} + \Gamma^0{}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right]\frac{dx^i}{dt}.\end{aligned} \tag{9.1.2}$$

В ньютоновском приближении, которое мы обсуждали в § 4 гл. 3, все скорости считались исчезающе малыми и в разности между $g_{\mu\nu}$ и тензором Минковского $\eta_{\mu\nu}$ удерживались лишь члены первого порядка. При этом мы получали

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\Gamma^i{}_{00} \approx \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}.$$

Но $(g_{00} - 1)$ есть величина порядка $G\bar{M}/\bar{r}$, поэтому ньютоновское приближение приводит к величине d^2x^i/dt^2 порядка $G\bar{M}/\bar{r}^2$, или, что то же самое, $\bar{v}^2/r$. *Следовательно, цель постньютоновского приближения состоит в том, чтобы вычислить значения* d^2x^i/dt^2 *с точностью до* $\bar{v}^4/r$. Глядя на уравнение (9.1.2), мы видим, что нам необходимо иметь компоненты аффинной связности со следующей точностью:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^i{}_{00}, \text{ включая члены порядка } \bar{v}^4/r,\\
&\Gamma^i{}_{0j}, \quad » \quad » \quad » \quad \bar{v}^3/r,\\
&\Gamma^i{}_{jk}, \quad » \quad » \quad » \quad \bar{v}^2/r,\\
&\Gamma^0{}_{00}, \quad » \quad » \quad » \quad \bar{v}^3/r,\\
&\Gamma^0{}_{0j}, \quad » \quad » \quad » \quad \bar{v}^2/r,\\
&\Gamma^0{}_{jk}, \quad » \quad » \quad » \quad \bar{v}/r.
\end{aligned} \tag{9.1.3}$$

Исходя из нашего опыта по нахождению решения Шварцшильда, мы можем думать, что существует система координат, в которой метрический тензор почти равен тензору Минковского $\eta_{\mu\nu}$, причем поправки можно разложить по степеням $\bar{M}\bar{G}/\bar{r} \sim \bar{v}^2$. В частности, мы полагаем, что справедливы следующие разложения:

$$g_{00} = -1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + \ldots, \tag{9.1.4}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + \overset{4}{g}_{ij} + \ldots, \tag{9.1.5}$$

$$g_{i0} = \overset{3}{g}_{i0} + \overset{5}{g}_{i0} + \ldots, \tag{9.1.6}$$

где символ $\overset{N}{g}_{\mu\nu}$ означает член порядка $\bar{v}^N$ в $g_{\mu\nu}$. Зависимость от нечетных степеней $\bar{v}$ в g_{i0} возникает из-за того, что g_{i0} должно менять знак при обращении времени $t \to -t$. Действительное оправдание такого разложения будет дано ниже, когда мы покажем, что оно приводит к самосогласованному решению эйнштейновских уравнений поля.

Обратный метрический тензор определяется следующими соотношениями:

$$g^{i\mu}g_{0\mu} = g^{i0}g_{00} + g^{ij}g_{j0} = 0, \tag{9.1.7}$$

$$g^{0\mu}g_{0\mu} = g^{00}g_{00} + g^{0i}g_{0i} = 1, \tag{9.1.8}$$

$$g^{i\mu}g_{j\mu} = g^{i0}g_{j0} + g^{ik}g_{jk} = \delta_{ij}. \tag{9.1.9}$$

Мы полагаем, что

$$g^{00} = -1 + \overset{2}{g}{}^{00} + \overset{4}{g}{}^{00} + \ldots, \tag{9.1.10}$$

$$g^{ij} = \delta_{ij} + \overset{2}{g}{}^{ij} + \overset{4}{g}{}^{ij} + \ldots, \tag{9.1.11}$$

$$g^{i0} = \overset{3}{g}{}^{i0} + \overset{5}{g}{}^{i0} + \ldots, \tag{9.1.12}$$

и, подставляя эти разложения в соотношения (9.1.7) — (9.1.9), получаем

$$\overset{2}{g}{}^{00} = -\overset{2}{g}_{00}, \qquad \overset{2}{g}{}^{ij} = -\overset{2}{g}_{ij}, \qquad \overset{3}{g}{}^{i0} = \overset{3}{g}_{i0} \text{ и т. д.} \tag{9.1.13}$$

Аффинную связность можно получить из хорошо известной формулы

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\rho}\left\{\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}\right\}.$$

При вычислении $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ мы должны учесть, что в качестве масштабов расстояния и времени в нашей системе выбраны $\bar{r}$ и $\bar{r}/\bar{v}$ соответственно. Поэтому будем считать, что пространственные и временные производные имеют следующий порядок:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \sim \frac{1}{\bar{r}}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{\bar{v}}{\bar{r}}.$$

Используя наши оценки (9.1.4) — (9.1.6) и (9.1.10) — (9.1.13), находим, что компоненты Γ^{i}_{00}, Γ^{i}_{jk} и Γ^{0}_{0i} имеют разложения

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \overset{2}{\Gamma}{}^{\mu}_{\nu\lambda} + \overset{4}{\Gamma}{}^{\mu}_{\nu\lambda} + \ldots \qquad (\text{для } \Gamma^{i}_{00},\ \Gamma^{i}_{jk},\ \Gamma^{0}_{0i}), \tag{9.1.14}$$

а компоненты Γ^{i}_{0j}, Γ^{0}_{00} и Γ^{0}_{ij} имеют разложения

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \overset{3}{\Gamma}{}^{\mu}_{\nu\lambda} + \overset{5}{\Gamma}{}^{\mu}_{\nu\lambda} + \ldots \quad (\text{для } \Gamma^{i}_{0j},\ \Gamma^{0}_{00},\ \Gamma^{0}_{ij}). \tag{9.1.15}$$

Здесь символ $\overset{N}{\Gamma}{}^{\mu}_{\nu\lambda}$ означает член порядка $\bar{v}^N/\bar{r}$ в $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$. Компоненты, перечисленные в (9.1.3), имеют следующий явный вид:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{00} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}, \tag{9.1.16}$$

$$\overset{4}{\Gamma}{}^{i}_{00} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \overset{4}{g}_{00}}{\partial x^i} + \frac{\partial \overset{3}{g}_{i0}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\overset{2}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^j}, \tag{9.1.17}$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{i}_{0j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \overset{3}{g}_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial \overset{2}{g}_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{3}{g}_{j0}}{\partial x^i}\right], \tag{9.1.18}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{jk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \overset{2}{g}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right], \tag{9.1.19}$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{0}_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial t}, \tag{9.1.20}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{0}_{0i} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}, \tag{9.1.21}$$

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{0}_{ij} = 0. \tag{9.1.22}$$

Очевидно, что нам необходимо знать компоненты g_{ij}, включая члены порядка $\overset{-2}{v}$, g_{i0} до порядка $\overset{-3}{v}$ и g_{00} до порядка $\overset{-4}{v}$. Напомним для сравнения требования ньютоновского приближения, когда надо знать g_{00} с учетом порядка $\overset{-2}{v}$, а g_{i0} и g_{ij} только в нулевом порядке.

Чтобы вычислить тензор Риччи, используем (6.1.5):

$$R_{\mu\varkappa} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\varkappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\varkappa\eta} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta\lambda}.$$

Из (9.1.14) и разложений (9.1.15) и (9.1.16) находим, что компоненты тензора $R_{\mu\varkappa}$ имеют разложения вида

$$R_{00} = \overset{2}{R}_{00} + \overset{4}{R}_{00} + \ldots, \tag{9.1.23}$$

$$R_{i0} = \overset{3}{R}_{i0} + \overset{5}{R}_{i0} + \ldots, \tag{9.1.24}$$

$$R_{ij} = \overset{2}{R}_{ij} + \overset{4}{R}_{ij} + \ldots, \tag{9.1.25}$$

где $\overset{N}{R}_{\mu\nu}$ означает член порядка $\overset{-N-2}{v}$, r в $R_{\mu\nu}$. Члены, которые можно вычислить, пользуясь «известными» разложениями компонент аффинной связности, таковы:

$$\overset{2}{R}_{00} = -\frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{00}}{\partial x^i} \tag{9.1.26}$$

$$\overset{4}{R}_{00} = \frac{\partial \overset{3}{\Gamma}{}^{i}_{0i}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{4}{\Gamma}{}^{i}_{00}}{\partial x^i} + \overset{2}{\Gamma}{}^{0}_{0i}\overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{00} - \overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{00}\overset{2}{\Gamma}{}^{j}_{ij}, \tag{9.1.27}$$

$$\overset{3}{R}_{i0} = \frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{j}_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{3}{\Gamma}{}^{j}_{0i}}{\partial x^j}, \tag{9.1.28}$$

$$\overset{2}{R}_{ij} = \frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{0}_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}}{\partial x^k}. \tag{9.1.29}$$

Если использовать (9.1.16) — (9.1.21), получим

$$\overset{2}{R}_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{2}{g}_{00}, \tag{9.1.30}$$

$$\overset{4}{R}_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{ii}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \overset{3}{g}_{i0}}{\partial x^i\, \partial t} + \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{4}{g}_{00} - \\ - \frac{1}{2}\overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i\, \partial x^j} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}\right) + \\ + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial \overset{2}{g}_{jj}}{\partial x^i}\right), \tag{9.1.31}$$

$$\overset{3}{R}_{i0} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{jj}}{\partial x^i\, \partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{3}{g}_{j0}}{\partial x^i\, \partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^j \partial t} + \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{3}{g}_{i0}, \tag{9.1.32}$$

$$\overset{2}{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i\, \partial x^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{kk}}{\partial x^i\, \partial x^j} - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{ik}}{\partial x^k\, \partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{kj}}{\partial x^k\, \partial x^i} + \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{2}{g}_{ij}. \tag{9.1.33}$$

Теперь можно сильно упростить все выражения, выбрав подходящую систему координат. Мы показали в § 4 гл. 7, что x^μ всегда можно определить так, чтобы оно подчинялось условию гармоничности координат:

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0. \tag{9.1.34}$$

Используя (9.1.10) — (9.1.13) и (9.1.16) — (9.1.21), находим, что исчезающий набор членов третьего порядка в $g^{\mu\nu}\Gamma^{0}_{\mu\nu}$ имеет вид

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{3}{g}_{0i}}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{ii}}{\partial t}, \tag{9.1.35}$$

а равные нулю члены второго порядка в $g^{\mu\nu}\Gamma^{i}_{\mu\nu}$ записываются так:

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i} + \frac{\partial \overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial \overset{2}{g}_{jj}}{\partial x^i}. \tag{9.1.36}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{ii}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \overset{3}{g}_{i0}}{\partial x^i\,\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{ii}}{\partial t\,\partial x^j} - \frac{\partial^2 \overset{3}{g}_{i0}}{\partial x^i\,\partial x^j} - \frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^i\,\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{ij}}{\partial x^k\,\partial x^j} + \frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{kj}}{\partial x^j\,\partial x^i} - \frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{jj}}{\partial x^i\,\partial x^k} + \frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i\,\partial x^k} = 0$$

и выражения (9.1.30) — (9.1.33) дают теперь упрощенные формулы для тензора Риччи:

$$\overset{2}{R}_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{2}{g}_{00}, \tag{9.1.37}$$

$$\overset{4}{R}_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{4}{g}_{00} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i\,\partial x^j} + \frac{1}{2}(\nabla \overset{2}{g}_{00})^2 \tag{9.1.38}$$

$$\overset{3}{R}_{0i} = \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{3}{g}_{i0}, \tag{9.1.39}$$

$$\overset{2}{R}_{ij} = \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{2}{g}_{ij}. \tag{9.1.40}$$

Мы готовы использовать полные уравнения Эйнштейна, записанные в форме

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}\right). \tag{9.1.41}$$

Исходя из нашей интерпретации плотности энергии, плотности импульса и потока импульса, мы полагаем, что разложения T^{00}, T^{i0} и T^{ij} имеют вид:

$$T^{00} = \overset{0}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{00} + \ldots, \tag{9.1.42}$$

$$T^{i0} = \overset{1}{T}{}^{i0} + \overset{3}{T}{}^{i0} + \ldots, \tag{9.1.43}$$

$$T^{ij} = \overset{2}{T}{}^{ij} + \overset{4}{T}{}^{ij} + \ldots, \tag{9.1.44}$$

где символ $\overset{N}{T}{}^{\mu\nu}$ означает член $T^{\mu\nu}$ порядка $(\bar{M}/\bar{r})^{\bar{3}}\,\bar{v}^{\bar{N}}$. (В частности, $\overset{0}{T}{}^{00}$ есть плотность массы покоя, а $\overset{2}{T}{}^{00}$ — нерелятивистская часть плотности энергии.) Итак, выражение, которое необходимо знать, имеет вид

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}. \tag{9.1.45}$$

Но $G\bar{M}/\bar{r}$ имеет порядок $\bar{v}^2$, поэтому формулы (9.1.4) — (9.1.6) и (9.1.42) — (9.1.44) приводят к следующим выражениям:

$$S_{00} = \overset{0}{S}_{00} + \overset{2}{S}_{00} + \ldots, \tag{9.1.46}$$

$$S_{i0} = \overset{1}{S}_{i0} + \overset{3}{S}_{i0} + \ldots, \tag{9.1.47}$$

$$S_{ij} = \overset{0}{S}_{ij} + \overset{2}{S}_{ij} + \ldots, \tag{9.1.48}$$

где $\overset{N}{S}_{\mu\nu}$ есть член порядка $\bar{M}\bar{v}^N/\bar{r}^3$ в $\overset{N}{S}_{\mu\nu}$. В частности, имеем

$$\overset{0}{S}_{00} = \frac{1}{2}\overset{0}{T}^{00}, \tag{9.1.49}$$

$$\overset{2}{S}_{00} = \frac{1}{2}[\overset{2}{T}^{00} - 2\overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}^{00} + \overset{2}{T}^{ii}], \tag{9.1.50}$$

$$\overset{1}{S}_{i0} = -\overset{1}{T}^{0i}, \tag{9.1.51}$$

$$\overset{0}{S}_{ij} = +\frac{1}{2}\delta_{ij}\overset{0}{T}^{00}. \tag{9.1.52}$$

Подставляя (9.1.37) — (9.1.40) и (9.1.46) — (9.1.52) в уравнения поля (9.1.41), видим, что уравнения в гармонических координатах действительно согласуются с использованными разложениями, и это приводит к таким результатам:

$$\nabla^2\overset{2}{g}_{00} = -8\pi G\overset{0}{T}^{00}, \tag{9.1.53}$$

$$\nabla^2\overset{4}{g}_{00} = -\frac{\partial^2\overset{2}{g}_{00}}{\partial t^2} + \overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^2\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i\,\partial x^j} - \left(\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial\overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i}\right) - 8\pi G[\overset{2}{T}^{00} - 2\overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}^{00} + \overset{2}{T}^{ii}], \tag{9.1.54}$$

$$\nabla^2\overset{3}{g}_{i0} = +16\pi G\overset{1}{T}^{i0}, \tag{9.1.55}$$

$$\nabla^2\overset{2}{g}_{ij} = -8\pi G\delta_{ij}\overset{0}{T}^{00}. \tag{9.1.56}$$

Из (9.1.53), как и ожидалось, вытекает следующее соотношение:

$$\overset{2}{g}_{00} = -2\phi, \tag{9.1.57}$$

где ϕ — *потенциал Ньютона*, определяемый уравнением Пуассона

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\overset{0}{T}^{00}. \tag{9.1.58}$$

Поскольку $\overset{2}{g}_{00}$ исчезает на бесконечности то решение уравнения (9.1.58) имеет вид

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -G \int d^3x' \frac{\overset{0}{T}{}^{00}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{9.1.59}$$

Из (9.1.56) можно найти исчезающее на бесконечности решение для $\overset{2}{g}_{ij}$:

$$\overset{2}{g}_{ij} = -2\delta_{ij}\phi \tag{9.1.60}$$

Но $\overset{3}{g}_{i0}$ можно рассматривать и как новый векторный потенциал ζ:

$$\overset{3}{g}_{i0} \equiv \zeta_i. \tag{9.1.61}$$

Поэтому исчезающее на бесконечности решение (9.1.55) запишется так:

$$\zeta_i(\mathbf{x}, t) = -4G \int \frac{\overset{1}{T}{}^{i0}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x'. \tag{9.1.62}$$

И наконец, используя (9.1.57), (9.1.58) и тождество

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \equiv \frac{1}{2}\nabla^2\phi^2 - \phi\nabla^2\phi,$$

можно упростить (9.1.54), сведя его к следующему выражению:

$$\overset{4}{g}_{00} = -2\phi^2 - 2\psi, \tag{9.1.63}$$

где ψ — еще один потенциал:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 4\pi G[\overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{ii}]. \tag{9.1.64}$$

Поскольку $\overset{4}{g}_{00}$ должно обращаться в нуль на бесконечности решение уравнения (9.1.64) имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}, t) = -\int \frac{d^3x'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x}', t)}{\partial t^2} + \right.$$

$$\left. + G\overset{2}{T}{}^{00}(\mathbf{x}', t) + G\overset{2}{T}{}^{ii}(\mathbf{x}', t)\right]. \tag{9.1.65}$$

Координатное условие (9.1.35) налагает на φ и ζ следующую связь:

$$4\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\zeta = 0, \tag{9.1.66}$$

координатное же условие (9.1.36) выполняется теперь автоматически. В § 3 этой главы мы увидим, что благодаря законам сохранения, которым подчиняется $T^{\mu\nu}$, уравнение (9.1.66) также удовлетворяется нашими решениями.

Подставляя (9.1.57), (9.1.60), (9.1.61) и (9.1.63) в (9.1.16) — (9.1.22), получаем следующие выражения для нужных нам ком-

понент аффинной связности:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{00} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \tag{9.1.67}$$

$$\overset{4}{\Gamma}{}^{i}_{00} = \frac{\partial}{\partial x^i}(2\phi^2 + \psi) + \frac{\partial \zeta_i}{\partial t}, \tag{9.1.68}$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{i}_{0j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \zeta_j}{\partial x^i}\right) - \delta_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{9.1.69}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{jk} = -\delta_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x^k} - \delta_{ik}\frac{\partial \phi}{\partial x^j} + \delta_{jk}\frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \tag{9.1.70}$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{0}_{00} = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{9.1.71}$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{0}_{0i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \tag{9.1.72}$$

В качестве премии мы можем вычислить еще и три дополнительных члена в аффинной связности, играющих роль в постньютоновской гидродинамике:

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{0}_{ij} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \zeta_j}{\partial x^i}\right) - \delta_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{9.1.73}$$

$$\overset{4}{\Gamma}{}^{0}_{i0} = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \tag{9.1.74}$$

$$\overset{5}{\Gamma}{}^{0}_{00} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \boldsymbol{\zeta}\cdot\nabla\phi. \tag{9.1.75}$$

§ 2. Динамика частицы и фотона

Прежде чем продолжить вычисление постньютоновской метрики, обратимся вновь к задаче, с которой мы начинали, а именно к вычислению ускорения свободно падающей частицы до членов порядка $\bar{v}^4/\bar{r}$. (Подробности применения постньютоновского приближения будут даны в § 5—9 этой главы.) Подставляя компоненты аффинной связности (9.1.67) — (9.1.72) в (9.1.2), получаем непосредственно уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(\phi + 2\phi^2 + \psi) - \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + \\ + \mathbf{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{\zeta}) + 3\mathbf{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi - \mathbf{v}^2\nabla\phi, \tag{9.2.1}$$

где $v^i \equiv dx^i/dt$.

Кроме этого, нам необходимо знать, как время t в гармонических координатах связано с собственным временем τ, измеряемым для тела, свободно падающего со скоростью $\mathbf{v}$. По определению

имеем

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = -g_{00} - 2g_{i0}v^i - g_{ij}v^iv^j.$$

С учетом членов порядка $\bar{v}^4$ это приводит к выражению

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - [\mathbf{v}^2 + \overset{2}{g}_{00}] - [\overset{4}{g}_{00} + 2\overset{3}{g}_{i0}v^i + \overset{2}{g}_{ij}v^iv^j],$$

или, используя (9.1.57), (9.1.60), (9.1.61) и (9.1.63), получаем

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 + [2\phi - \mathbf{v}^2] + 2[\phi^2 + \psi - \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{v} + \phi\mathbf{v}^2].$$

Слагаемые, заключенные в скобки, имеют порядок $\bar{v}^2$ и $\bar{v}^4$. Используя степенное разложение корня $\sqrt{1+x}$, находим, что с учетом членов порядка $\bar{v}^4$ справедливо следующее выражение:

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \phi - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{1}{8}(2\phi - \mathbf{v}^2)^2 + \phi^2 + \psi - \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{v} + \phi\mathbf{v}^2,$$

которое можно переписать так:

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - L, \tag{9.2.2}$$

где

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \phi - \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{3}{2}\phi\mathbf{v}^2 + \frac{1}{8}(\mathbf{v}^2)^2 - \psi + \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{v}. \tag{9.2.3}$$

Поскольку величина $\int (d\tau/dt)\,dt$ стационарна, величину L можно рассматривать как *лагранжиан* одной частицы и вывести уравнения движения, исходя из известного уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i}. \tag{9.2.4}$$

(Производную d/dt при действии на ϕ или $\boldsymbol{\zeta}$ следует брать в виде $\partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}$.) Читатель может легко проверить, что уравнение Лагранжа (9.2.4) согласуется с уравнением (9.2.1).

Постньютоновские поля можно также использовать для вычисления ускорения фотона в гравитационном поле до членов порядка $\bar{v}^2$. (Здесь $\bar{v}$ — конечно, не скорость фотона, а обычная скорость частиц с отличной от нуля массой, из которых состоит система.) Поскольку скорость фотона $u_i \equiv dx^i/dt$ равна единице, уравнение (9.1.2) приводит к следующему выражению для ускорения:

$$\frac{du_i}{dt} = -\overset{2}{\Gamma}{}^i_{00} - \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk}u_ju_k + 2u_i\overset{2}{\Gamma}{}^0_{0j}u_j + O(\bar{v}^3).$$

Используя (9.1.67), (9.1.70) и (9.1.72), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(1 + \mathbf{u}^2)\boldsymbol{\nabla}\phi + 4\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi) + O(\bar{v}^3).$$

Заметим, что скорость фотона задается условием

$$0 = -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = 1 - \mathbf{u}^2 + 2(1+\mathbf{u}^2)\,\phi + O(\bar{v}^3)$$

или

$$|\mathbf{u}| = 1 + 2\phi + O(\bar{v}^3). \tag{9.2.5}$$

Следовательно, при требуемой точности в формуле для ускорения фотона можно $\mathbf{u}^2$ заменить единицей. Тогда

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -2\nabla\phi + 4\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\nabla\phi) + O(v^3). \tag{9.2.6}$$

Несколько удобнее записать это выражение в виде уравнения для единичного вектора $\hat{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$:

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = \hat{\mathbf{u}}\times(\hat{\mathbf{u}}\times\nabla\phi) + O(\bar{v}^3). \tag{9.2.7}$$

§ 3. Тензор энергии-импульса

Чтобы завершить программу вычислений, намеченную в § 1 этой главы, покажем, как можно вычислить тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, который служит в качестве источника гравитационного поля. Посмотрим сперва, как проявляются в постньютоновском приближении законы сохранения энергии и импульса. Законы сохранения в общем виде записываются так: $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$. Более подробная запись левой части при этом имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{\mu\nu} = -\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu}. \tag{9.3.1}$$

Так как все Γ имеют по крайней мере порядок $\bar{v}^2/\bar{r}$, член порядка $M\bar{v}/\bar{r}^4$ с $\nu = 0$ дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{0}{T}{}^{00} + \frac{\partial}{\partial x^i}\overset{1}{T}{}^{i0} = 0. \tag{9.3.2}$$

Это выражение можно рассматривать как закон сохранения *массы*; для нас не будет неожиданностью сохранение массы в постньютоновском приближении, так как большая скорость превращения массы в энергию создавала бы температуры, при которых частицы системы двигались бы релятивистски, в противоречии с исходным условием $\bar{v} \ll 1$. Уравнение (9.3.2) важно не только само по себе; оно нам необходимо для согласованности с условиями гармоничности координат. Из (9.1.53) и (9.1.55) мы видим, что уравнение (9.3.2) требует

$$\nabla^2\left(-2\overset{2}{\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial t}} + \overset{3}{\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^i}}\right) = \nabla^2\left(4\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}\right) = 0.$$

Поскольку ψ и $\boldsymbol{\zeta}$ на бесконечности исчезают, можно сделать вывод, что

$$4\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}=0,$$

подтвердив, таким образом, координатное условие (9.1.66).

Возвращаясь к уравнению (9.3.1), находим, что при $\nu=i$ члены порядка $M\bar{v}^2/\bar{r}^4$ приводят к следующему соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{1}{T}{}^{0i}+\frac{\partial}{\partial x^i}\overset{2}{T}{}^{ij}=-\overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{00}\overset{0}{T}{}^{00}.$$

Используя (9.1.67), запишем это так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{1}{T}{}^{0i}+\frac{\partial}{\partial x^i}\overset{2}{T}{}^{ij}=-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\overset{0}{T}{}^{00}. \tag{9.3.3}$$

Так как T^{ij} есть поток импульса, то формула (9.3.3) выражает закон сохранения импульса. Отметим, что правая часть (9.3.3) есть как раз плотность ньютоновской гравитационной силы, равная плотности массы $\overset{0}{T}{}^{00}$, умноженной на $-\nabla\phi$.

Нет других законов сохранения, которые содержали бы *только* те компоненты $T^{\mu\nu}$, которые необходимы для вычисления полей в постньютоновском приближении, т. е. только компоненты $\overset{0}{T}{}^{00}$, $\overset{2}{T}{}^{00}$, $\overset{1}{T}{}^{i0}$ и $\overset{2}{T}{}^{ij}$. Заметим, кроме того, что $g_{\mu\nu}$ входит в оба закона сохранения (9.3.2) и (9.3.3) только через ϕ, которое можно вычислить в ньютоновском приближении. Процедура, таким образом, будет существенно *итерационной*. Мы должны будем сперва решить ньютоновские уравнения движения; затем использовать это решение (в добавление к уравнениям состояния) для того, чтобы определить компоненты $\overset{0}{T}{}^{00}$, $\overset{2}{T}{}^{00}$, $\overset{1}{T}{}^{i0}$ и $\overset{2}{T}{}^{ij}$; затем вычислить постньютоновские поля ψ и $\boldsymbol{\zeta}$, а после этого вновь рассчитать движение частиц, и так далее. Можно показать [1], что эта процедура справедлива в любом порядке, т. е. чтобы вычислить поля в N-м приближении, необходимо знать компоненты тензора $T^{\mu\nu}$, которые удовлетворяли бы законам сохранения и содержали поля, вычисленные только в $(N-1)$-м приближении. Для нас здесь будет достаточным написать законы сохранения, которым подчинялись бы компоненты $T^{\mu\nu}$ более высокого порядка, чем те, что появляются в (9.3.2) и (9.3.3). В выражении (9.3.1) при $\nu=0$ член порядка $M\bar{v}^3/\bar{r}^4$ и при $\nu=i$ член порядка $M\bar{v}^4/\bar{r}^4$ имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{2}{T}{}^{00}+\frac{\partial}{\partial x^i}\overset{3}{T}{}^{i0}=-(2\overset{3}{\Gamma}{}^{0}_{00}+\overset{3}{\Gamma}{}^{i}_{i0})\overset{0}{T}{}^{00}-(3\overset{2}{\Gamma}{}^{0}_{0i}+\overset{2}{\Gamma}{}^{j}_{ji})\overset{1}{T}{}^{0i},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{3}{T}{}^{i0}+\frac{\partial}{\partial x^j}\overset{4}{T}{}^{ij}=-\overset{4}{\Gamma}{}^{i}_{00}\overset{0}{T}{}^{00}-\overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{00}\overset{2}{T}{}^{00}-$$

$$-(2\overset{3}{\Gamma}{}^{i}_{0j}+\delta_{ij}\overset{3}{\Gamma}{}^{0}_{00}+\delta_{ij}\overset{3}{\Gamma}{}^{k}_{0k})\overset{1}{T}{}^{0j}-(\overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{jk}+\overset{2}{\Gamma}{}^{0}_{0j}\delta_{ik}+\overset{2}{\Gamma}{}^{l}_{lj}\delta_{ik})\overset{2}{T}{}^{jk}.$$

Используя (9.1.67) — (9.1.72), это можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{2}{T}{}^{00}+\frac{\partial}{\partial x^i}\overset{3}{T}{}^{i0}=\overset{0}{T}{}^{00}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{9.3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overset{3}{T}{}^{0i}+\frac{\partial}{\partial x^j}\overset{4}{T}{}^{ij}=-\overset{0}{T}{}^{00}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}(2\phi^2+\psi)+\frac{\partial\zeta_i}{\partial t}\right]-$$

$$-\overset{2}{T}{}^{00}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}-\overset{1}{T}{}^{0j}\left[\frac{\partial\zeta_i}{\partial x^j}-\frac{\partial\zeta_j}{\partial x^i}-4\delta_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]-$$

$$-\overset{2}{T}{}^{jk}\left[\delta_{jk}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}-4\delta_{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right]. \tag{9.3.5}$$

Как мы и ожидали, компоненты источника $\overset{2}{T}{}^{00}$, $\overset{3}{T}{}^{i0}$ и $\overset{4}{T}{}^{ij}$, необходимые для вычисления *пост*-постньютоновских полей, подчиняются законам сохранения, содержащим метрику только в постньютоновском порядке.

Для вычисления тензора энергии-импульса нам, конечно, необходима модель. Простейшей такой моделью является совокупность свободно падающих частиц с гравитационным или контактным взаимодействием. Из выражения (5.3.5) имеем

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x},t)=g^{-1/2}(\mathbf{x},t)\sum_n m_n\times$$

$$\times\frac{dx_n^\mu(t)}{dt}\frac{\partial x_n^\nu(t)}{\partial t}\left(\frac{d\tau_n}{dt}\right)^{-1}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)), \tag{9.3.6}$$

где m_n, $x_n^\mu(t)$ и τ_n — масса, пространственно-временная координата и собственное время n-й частицы соответственно, а $-g$ есть детерминант $g_{\mu\nu}$. Элементарные вычисления, использующие (4.7.5), дают

$$g=1+\overset{2}{g}+\overset{4}{g}+\ldots,$$

где $\overset{N}{g}$ имеет порядок $\bar{v}^N$ и, в частности,

$$\overset{2}{g}=\eta^{\mu\nu}\overset{2}{g}_{\mu\nu}=-\overset{2}{g}_{00}+\overset{2}{g}_{ii}=-4\phi. \tag{9.3.7}$$

Подставляя (9.3.7) и (9.2.3) в (9.3.6), находим, что

$$\overset{0}{T}{}^{00} = \sum_n m_n \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n), \tag{9.3.8}$$

$$\overset{2}{T}{}^{00} = \sum_n m_n \left(\phi + \frac{1}{2} \mathbf{v}_n{}^2 \right) \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n), \tag{9.3.9}$$

$$\overset{1}{T}{}^{i0} = \sum_n m_n v_n{}^i \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n), \tag{9.3.10}$$

$$\overset{2}{T}{}^{ij} = \sum_n m_n v_n{}^i v_n{}^j \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n), \tag{9.3.11}$$

где $\mathbf{v}_n \equiv d\mathbf{x}_n/dt$. Чтобы ввести законы сохранения, необходимо вспомнить, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n (t)) = v_n{}^i \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n (t)) = - \mathbf{v}_n \cdot \nabla \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n (t));$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \overset{0}{T}{}^{00} + \frac{\partial}{\partial x^i} \overset{1}{T}{}^{i0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overset{1}{T}{}^{0i} + \frac{\partial}{\partial x^i} \overset{2}{T}{}^{ij} = \sum_n m_n \frac{dv_n{}^i}{dt} \delta^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n).$$

Мы видим, что если закон сохранения массы (9.3.2) удовлетворяется автоматически, то закон сохранения импульса (9.3.3) выполняется в том и только в том случае, если каждая частица подчиняется ньютоновскому уравнению движения

$$\frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = - \nabla \phi (x_n). \tag{9.3.12}$$

Таким образом, расчет движения совокупности гравитационно взаимодействующих точечных частиц должен проводиться по следующей программе:

А. Решить ньютоновскую задачу, т. е. решить уравнения (9.3.12) и (9.1.58) для $\mathbf{x}_n (t)$ и $\phi (x)$. (Это единственный шаг, который не всегда выполняется путем прямого вычисления.)

Б. Использовать результаты А и уравнения (9.3.8) — (9.3.11) для вычисления компонент $\overset{0}{T}{}^{00}$, $\overset{2}{T}{}^{00}$, $\overset{1}{T}{}^{i0}$, $\overset{2}{T}{}^{ij}$ тензора энергии-импульса.

В. Использовать результаты А, Б и уравнения (9.1.62), (9.1.65) и вычислить постньютоновские поля ζ и ψ.

Г. Применить результаты А, В и уравнение (9.2.1) для вычисления постньютоновских поправок к траекториям $\mathbf{x}_n (t)$.

Д. Повторить ту же процедуру с новыми решениями и т. д

§ 4. Мультипольные поля

В качестве первого примера вычислим гравитационное поле на больших расстояниях от создающего его источника — произвольного конечного распределения энергии и импульса. Пусть $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ исчезает при $r > R$, где $r \equiv |\mathbf{x}|$. Знаменатель $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ в выражениях (9.1.59), (9.1.62) и (9.1.65) можно разложить по обратным степеням величины r/R:

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1} \to \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}{r^3} + \ldots . \tag{9.4.1}$$

Тогда можно показать, что

$$\phi \to -\frac{\overset{0}{M}}{r} - \frac{G\mathbf{x}\cdot\overset{0}{\mathbf{D}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{9.4.2}$$

$$\zeta_i \to -\frac{4G\overset{1}{P}_i}{r} - \frac{2Gx^j\overset{1}{J}_{ij}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{9.4.3}$$

$$\psi \to -\frac{\overset{2}{M}}{r} - \frac{G\mathbf{x}\cdot\overset{2}{\mathbf{D}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{9.4.4}$$

где

$$\overset{0}{M} \equiv \int \overset{0}{T}{}^{00}\, d^3x, \tag{9.4.5}$$

$$\overset{0}{\mathbf{D}} \equiv \int \mathbf{x}\overset{0}{T}{}^{00}\, d^3x, \tag{9.4.6}$$

$$\overset{1}{P}{}^i \equiv \int \overset{1}{T}{}^{i0}\, d^3x, \tag{9.4.7}$$

$$\overset{1}{J}_{ij} \equiv 2\int x^i\overset{1}{T}{}^{j0}\, d^3x, \tag{9.4.8}$$

$$\overset{2}{M} \equiv \int (\overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{ii})\, d^3x, \tag{9.4.9}$$

$$\overset{2}{\mathbf{D}} \equiv \int \mathbf{x}\left(\overset{2}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{ii} + \frac{1}{4\pi G}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right) d^3x. \tag{9.4.10}$$

[Член $\partial^2\phi/\partial t^2$ не дает вклада в $\overset{2}{M}$, поскольку он равен $-{}^1/_4\nabla\cdot(\partial\boldsymbol{\xi}/\partial t)$ и, следовательно, исчезает при интегрировании.]

Поле ψ проявляется физически только за счет присутствия его в разложении g_{00}:

$$g_{00} = -1 - 2\phi - 2\psi - 2\phi^2 + O(\bar{v}^6).$$

Очевидно, что поле ψ можно учесть, просто заменяя везде ϕ на $\psi + \phi$. Иначе говоря, оставаясь в рамках точности, требуемой

постньютоновским приближением, можно написать

$$g_{00} = -1 - 2(\phi + \psi) - 2(\phi + \psi)^2 + O(\bar{v}^6). \tag{9.4.11}$$

Выражения (9.4.2) и (9.4.4) позволяют представить имеющее физический смысл поле $\phi + \psi$ в виде

$$\phi + \psi \to -\frac{GM}{r} - \frac{G\mathbf{x}\cdot\mathbf{D}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \tag{9.4.12}$$

где

$$M \equiv \overset{0}{M} + \overset{2}{M}, \qquad \mathbf{D} \equiv \overset{0}{\mathbf{D}} + \overset{2}{\mathbf{D}}. \tag{9.4.13}$$

Поскольку величина $\mathbf{D}$ не описывает важного физического явления, а скорее есть просто смещение всего поля, выражение (9.4.12) можно переписать в виде

$$\phi + \psi \to -\frac{GM}{|\mathbf{x} - \mathbf{D}/M|} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \tag{9.4.14}$$

Мы можем исключить член с $\mathbf{D}$, определяя систему координат как систему центра энергии. В отличие от члена с $\mathbf{D}$, члены порядка $1/r$ и $1/r^2$ в разложении (9.4.3) величины ζ представляют большой физический интерес.

Выведем ряд полезных свойств моментов от тензора $T^{\mu\nu}$, используя сохранение энергии и импульса. Из уравнения сохранения массы (9.3.2) следует, что в общем случае справедливы уравнения

$$\frac{d\overset{0}{M}}{dt} = 0, \tag{9.4.15}$$

$$\frac{d\overset{0}{\mathbf{D}}}{dt} = \overset{1}{\mathbf{P}}. \tag{9.4.16}$$

Если тензор энергии-импульса не зависит от времени, то (9.3.2) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\overset{1}{T}{}^{i0} = 0,$$

и, следовательно, интегрируя по частям, мы получим

$$0 = \int x^i \frac{\partial}{\partial x^j}\overset{1}{T}{}^{j0}\, d^3x = -\overset{1}{P}{}^i, \tag{9.4.17}$$

$$0 = 2\int x^i x^j \frac{\partial}{\partial x^k}\overset{1}{T}{}^{k0}\, d^3x = -\overset{1}{J}_{ij} - \overset{1}{J}_{ji}. \tag{9.4.18}$$

Тот факт, что у статической системы $\overset{1}{\mathbf{P}} = 0$, едва ли удивителен. Антисимметричность же $\overset{1}{J}_{ij}$ не столь очевидна. Запишем $\overset{1}{J}_{ij}$ в виде

$$\overset{1}{J}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\overset{1}{J}_k, \tag{9.4.19}$$

где $\overset{1}{J}_k$ — вектор углового момента:

$$\overset{1}{J}_k \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\overset{1}{J}_{ij} = \int d^3x \varepsilon_{ijk} x^i \overset{1}{T}^{j0}. \tag{9.4.20}$$

Подставляя (9.4.17) и (9.4.19) в (9.4.3), получаем

$$\zeta \to \frac{2G}{r^3}(\mathbf{x}\times\mathbf{J}) + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \tag{9.4.21}$$

Наши результаты (9.4.14) и (9.4.21) для $\phi + \psi$ и ζ, вообще говоря, установлены только вдали от притягивающей массы. Однако они также справедливы вплоть до поверхности сферического распределения энергии и импульса. Допустим сперва, что $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ зависит от положения $\mathbf{x}$ только через радиус $r \equiv |\mathbf{x}|$. Тогда в выражениях (9.1.59), (9.1.62) и (9.1.65) множитель $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ можно усреднить по углам. Для $r > r'$ имеем

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{d\Omega}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{[r^2 - 2rr'\cos\theta + r'^2]^{1/2}} = \frac{1}{r}.$$

Следовательно, *везде* вне сферы

$$\phi = -\frac{\overset{0}{GM}}{r}, \tag{9.4.22}$$

$$\zeta = -4G\frac{\overset{1}{\mathbf{P}}}{r}, \tag{9.4.23}$$

$$\psi = -\frac{\overset{2}{GM}}{r}. \tag{9.4.24}$$

Если сфера покоится, то $\overset{1}{\mathbf{P}} = 0$; в этом случае (9.1.57), (9.1.60), (9.1.61), (9.1.63) и (9.4.13) приводят к следующей метрике:

$$g_{00} \approx -1 + \frac{2MG}{r} - \frac{2M^2G^2}{r^2}, \tag{9.4.25}$$

$$g_{i0} \approx 0, \tag{9.4.26}$$

$$g_{ij} \approx \delta_{ij} + 2\delta_{ij}\frac{MG}{r}. \tag{9.4.27}$$

Этот результат согласуется с точным решением Шварцшильда, задаваемым в гармонических координатах выражением (8.2.15):

$$g_{00} = -\frac{1 - MG/r}{1 + MG/r},$$

$$g_{i0} = 0,$$

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{MG}{r}\right)^2 \delta_{ij} + \left(\frac{MG}{r}\right)^2 \frac{1 + MG/r}{1 - MG/r}\left(\frac{x^i x^j}{r^2}\right).$$

Однако в этих двух выводах есть существенное различие, а именно: в то время как точное решение Шварцшильда, найденное

в § 2 гл. 7, справедливо для статической сферически-симметричной системы, постньютоновское решение применимо к системе, изменяющейся за время порядка $\bar{r}/\bar{v}$. В § 7 гл. 11 будет показано, что в действительности решение Шварцшильда справедливо вне любой сферически-симметричной системы, как статической, так и нестатической.

Рассмотрим теперь сферически-симметричную систему, которая не перемещается, но вращается с угловой частотой $\omega(r)$. Плотность импульса записывается в этом случае так:

$$\overset{1}{T}{}^{i0}(\mathbf{x}', t) = \overset{0}{T}{}^{00}(r')\,[\boldsymbol{\omega}(r') \times \mathbf{x}']_i. \tag{9.4.28}$$

Тогда уравнение (9.1.62) задает поле $\boldsymbol{\xi}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = -4G \int \frac{[\boldsymbol{\omega}(r') \times \mathbf{x}']}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \overset{0}{T}{}^{00}(r')\, d^4x'. \tag{9.4.29}$$

Интеграл по телесному углу

$$\int \frac{d\Omega' \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \begin{cases} \left(\frac{4\pi r'^2}{3r^3}\right)\mathbf{x} & \text{для } r' < r, \quad (9.4.30) \\ \left(\frac{4\pi}{3r'}\right)\mathbf{x} & \text{для } r' > r. \quad (9.4.31) \end{cases}$$

Таким образом, поле вне сферы имеет вид

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \frac{16\pi G}{3r^3}\left[\mathbf{x} \times \int \boldsymbol{\omega}(r')\, \overset{0}{T}{}^{00}(r')\, r'^4\, dr'\right]. \tag{9.4.32}$$

Интеграл можно выразить через угловой момент, определяемый с помощью (9.4.20) и (9.4.28), следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \int (\mathbf{x}' \times [\boldsymbol{\omega}(r') \times \mathbf{x}'])\, \overset{0}{T}{}^{00}(r')\, d^4x' = \\ &= \int [r'^2 \boldsymbol{\omega}(r') - \mathbf{x}'(\mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\omega}(r'))]\, \overset{0}{T}{}^{00}(r')\, d^3x' = \\ &= \frac{8\pi}{3} \int \boldsymbol{\omega}(r')\, \overset{0}{T}{}^{00}(r')\, r'^4\, dr'. \end{aligned} \tag{9.4.33}$$

Итак, выражение (9.4.32) везде вне сферы равно

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \frac{2G}{r^3}(\mathbf{x} \times \mathbf{J}), \tag{9.4.34}$$

что согласуется с общей асимптотической формулой (9.4.21). Поле *внутри* полой вращающейся сферы задается выражениями (9.4.29) и (9.4.31) в виде

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\Omega}, \tag{9.4.35}$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \frac{16\pi G}{3} \int \boldsymbol{\omega}(r')\, \overset{0}{T}{}^{00}(r')\, r'\, dr'. \tag{9.4.36}$$

В § 7 гл. 9 мы обсудим связь этого результата с принципом Маха.

§ 5. Прецессия перигелия

Мы увидим сейчас, как постньютоновский формализм, развитый в последних четырех параграфах, можно использовать для вычисления прецессии планетарных орбит в реальной Солнечной системе, т. е. с учетом существования других планет, вращения Солнца, его несферичности и т. д. В потенциале $\phi + \psi$, определяющем g_{00} [см. выражение (9.4.11)], подавляюще большую часть составляет сферически-симметричный вклад от Солнца $-GM_\odot/r$ и поэтому потенциал $\phi + \psi$ удобно записать в виде

$$\phi + \psi \equiv -\frac{GM_\odot}{r} + \varepsilon(\mathbf{x}, t), \tag{9.5.1}$$

причем функция ε включает в себя не только ньютоновские потенциалы других планет, но также любой квадрупольный момент или даже моменты более высоких порядков от вклада Солнца в потенциал $\phi + \psi$. Теперь уравнение движения (9.2.1) точечной частицы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM_\odot \mathbf{x}}{r^3} + \boldsymbol{\eta} + O(\bar{v}^6), \tag{9.5.2}$$

где $\boldsymbol{\eta}$ — малое возмущение:

$$\boldsymbol{\eta} = -\nabla(\varepsilon + 2\phi^2) - \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{\xi}) + \\ + 3\mathbf{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi - \mathbf{v}^2\nabla\phi. \tag{9.5.3}$$

В дальнейшем наиболее удобный метод вычисления прецессии перигелия будет связан с оценкой скорости изменения *вектора Рунге — Ленца* [1])

$$\mathbf{A} = -M_\odot G\frac{\mathbf{x}}{r} + (\mathbf{v} \times \mathbf{h}). \tag{9.5.4}$$

Здесь $r \equiv |\mathbf{x}|$, $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{x}/dt$, $\mathbf{h}$ — орбитальный угловой момент, приходящийся на единицу массы:

$$\mathbf{h} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{v}. \tag{9.5.5}$$

Если в уравнении (9.5.2) возмущение $\boldsymbol{\eta}$ отсутствует, то орбиты будут эллиптическими и будут задаваться обычными формулами:

$$r = \frac{L}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}, \tag{9.5.6}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{LM_\odot G}}{r^2}, \tag{9.5.7}$$

$$\frac{dr}{dt} = e\sqrt{\frac{M_\odot G}{L}}\sin(\varphi - \varphi_0), \tag{9.5.8}$$

[1]) Этот вектор введен еще Лапласом и его правильнее называть вектором Лапласа.— *Прим. ред.*

где e — эксцентриситет, а L — фокальный параметр (§ 6 гл. 8). Мы рассматриваем орбиты, лежащие в плоскости $\theta = \pi/2$, с перигелием при значении азимутального угла $\varphi = \varphi_0$. Тогда $\mathbf{h}$ будет постоянным, нормальным к орбите вектором, величина которого равна

$$|\mathbf{h}| = \sqrt{LM_\odot G}, \tag{9.5.9}$$

а $\mathbf{A}$ — постоянный, направленный к *перигелию* вектор, величина которого равна

$$|\mathbf{A}| = eM_\odot G. \tag{9.5.10}$$

Следовательно, скорость прецессии перигелия $d\varphi_0/dt$, вызванной любым возмущением, есть как раз составляющая изменения $d\hat{\mathbf{A}}/dt$ единичного вектора $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ вдоль направления, перпендикулярного как $\mathbf{A}$, так и $\mathbf{h}$, т. е.

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = (\hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt} = (\mathbf{h} \times \mathbf{A}) \cdot \frac{d\mathbf{A}/dt}{|\mathbf{h}|\,\mathbf{A}^2}. \tag{9.5.11}$$

(Если $d\varphi_0/dt$ — положительная величина, то прецессия происходит в том же самом направлении, что и движение планеты.) Непосредственным вычислением можно показать, что скорость изменения $\mathbf{A}$, порожденного возмущением $\boldsymbol{\eta}$ в (9.5.2), равна

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{h} + \mathbf{v} \times (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\eta}). \tag{9.5.12}$$

Отметим, что $d\mathbf{A}/dt$, а следовательно, и $d\varphi_0/dt$ линейны по $\boldsymbol{\eta}$, и поэтому корректное вычисление $d\varphi_0/dt$ — это суммирование вкладов в прецессию, даваемых каждым малым членом в $\boldsymbol{\eta}$.

Наибольшим членом в $\boldsymbol{\eta}$ является $-\nabla\varepsilon$, возникший от ньютоновских потенциалов других планет. Мы не будем пытаться вычислить этот член. Специалисты утверждают, что он приводит к прецессии $d\varphi_0/dt$, которая для Меркурия составляет около 532″ за столетие (§ 6 гл. 8). Следующий существенный член, появляющийся из-за релятивистских поправок в (9.5.3), можно получить, приравняв ϕ и ζ значениям, которые они имели бы при сферическом невращающемся Солнце:

$$\phi_\odot = -\frac{GM_\odot}{r}, \qquad \zeta_\odot = 0. \tag{9.5.13}$$

Тогда выражение (9.5.3) дает

$$\boldsymbol{\eta} = -2\nabla\phi_\odot^2 + 4\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi_\odot - \mathbf{v}^2\nabla\phi_\odot. \tag{9.5.14}$$

Подставив (9.5.12) — (9.5.14) и (9.5.6) — (9.5.10) в (9.5.11), получим следующую формулу для вычисления:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_0}{dt} = {} & 8M_\odot GhL^{-3}[1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)]^3 \times \\ & \times \sin^2(\varphi - \varphi_0) - M_\odot G e^{-1} h L^{-3} \times \\ & \times \{7[1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)]^2 + 4[1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)]^3 + \\ & + [1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)]^4\}\cos(\varphi - \varphi_0).\end{aligned} \tag{9.5.15}$$

Поскольку φ_0 меняется медленно, изменение φ_0 за один оборот можно определить, интегрируя $d\varphi_0/dt$ на интервале, равном одному периоду, фиксируя при этом в подынтегральном выражении φ_0 и используя для $d\varphi/dt$ формулы Кеплера (9.5.6) — (9.5.10). Это приводит к следующему выражению для прецессии за один оборот:

$$\Delta\varphi_0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_0}{dt}\frac{dt}{d\varphi}\,d\varphi = \frac{L^2}{h}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi_0}{dt}\,[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^{-2}\,d\varphi. \qquad (9.5.16)$$

Большинство членов исчезает при интегрировании по углам, и оставшиеся члены дают следующее выражение:

$$\Delta\varphi_0 = 6\pi\frac{M_\odot G}{L} \qquad (9.5.17)$$

в полном согласии с нашим более ранним результатом (8.6.11).

В качестве примера еще одного малого вклада в прецессию оценим действие поля ζ, возникающего из-за вращения Солнца. Согласно (9.4.34),

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{2G}{r^3}(\mathbf{x}\times\mathbf{J}_\odot). \qquad (9.5.18)$$

Вклад этого поля в ускорение $d\mathbf{v}/dt$ задается с помощью (9.5.3) следующим образом:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{\zeta}) = 6G\mathbf{h}\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{J}_\odot)\,r^{-5} + 2G\,(\mathbf{v}\times\mathbf{J}_\odot)\,r^{-3}. \qquad (9.5.19)$$

Тогда, согласно формуле (9.5.12), можно утверждать, что это приводит к изменению $\mathbf{A}$ со скоростью, равной

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -6G\mathbf{h}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{J}_\odot)\,r^{-5} - \\ -2G\,(\mathbf{v}\times\mathbf{J}_\odot)\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\,r^{-3} - 2G\mathbf{v}\,(\mathbf{h}\cdot\mathbf{J}_\odot)\,r^{-3}. \qquad (9.5.20)$$

Проведем для простоты ось вращения Солнца перпендикулярно плоскости планетных орбит — тогда $\mathbf{J}_\odot$ будет параллельным $\mathbf{h}$. Подставляя (9.5.20) и (9.5.6) — (9.5.10) в (9.5.11), получаем следующее выражение для скорости прецессии:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{2J_\odot h^2}{M_\odot L^4 e}\{-[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^2\,e\sin^2(\varphi-\varphi_0) - \\ -[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^3\,[e+\cos(\varphi-\varphi_0)]\}. \qquad (9.5.21)$$

Тогда (9.5.16) дает следующее выражение для прецессии за один оборот:

$$\Delta\varphi_0 = \frac{-8\pi J_\odot h}{M_\odot L^2}. \qquad (9.5.22)$$

Принято считать, что Солнце имеет угловой момент $J_\odot \approx 1{,}7 \times \times 10^{48}$ г·см^2·с$^{-1}$, масса его $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{33}$ г. Тогда в наших естественных единицах, в которых 1 с $= 3 \cdot 10^{10}$ см, находим

$$\frac{J_\odot}{M_\odot} \approx 0{,}28 \text{ км}.$$

Далее, орбита Меркурия имеет $L = 55{,}3 \cdot 10^6$ км и $h = 9{,}03 \cdot 10^3$ км, поэтому поле ζ дает в прецессию перигелия Меркурия вклад, равный (в единицах рад/об)

$$\Delta\varphi \approx -2{,}06 \cdot 10^{-11},$$

или в более удобных единицах (угловая секунда за столетие)

$$\Delta\varphi_0 \approx -17{,}6 \cdot 10^{-4}.$$

Если даже Дикке и Голденберг правы и Солнце имеет угловой момент, в 25 раз больший, то прецессия, вызванная полем ζ, составляет примерно лишь 0,04″ за столетие, что слишком мало для того, чтобы быть замеченным.

Полезно еще раз подчеркнуть, что вычисленная полная прецессия должна представлять собой сумму следующих слагаемых: 1) ньютоновский член, равный 532″ за столетие; 2) эйнштейновский член, задаваемый формулой (9.5.17); 3) член (9.5.22), обусловленный ζ; 4) ньютоновский член, возникающий из-за точно неизвестной несферичности Солнца; 5) член, появляющийся из-за вклада вращения Солнца в анизотропную часть ψ; 6) член, обусловленный постньютоновскими поправками к возмущению, вызываемому другими планетами. При этом только ньютоновские члены и эйнштейновский член (9.5.17) достаточно велики, чтобы их можно было измерить.

§ 6. Прецессия движущегося по орбите гироскопа

В § 1 гл. 5 правило параллельного переноса указывало на то, что спин S_μ свободно падающей частицы прецессирует, т. е.

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} S_\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{9.6.1}$$

Несколько лет назад Пью [2] и Шифф [3] предложили поместить гироскоп на околоземную орбиту и исследовать прецессию его вектора спина для выявления тонкой структуры гравитационного поля Земли. Шифф применил метод вычислений, предложенный Папапетроу [4, 5] и Фоком [6], согласно которому сперва рассматривается движение протяженного вращающегося тела, а затем размеры тела устремляются к нулю. Мы вместо этого с самого начала будем считать гироскоп точечной частицей, поскольку

именно для такой частицы верно утверждение принципа эквивалентности, что существует локально-инерциальная система отсчета, в которой прецессия спина *отсутствует*. Поэтому уравнение (9.6.1) можно рассматривать как обобщение этого факта на случай произвольной системы координат.

4-вектор спина S_μ по определению ортогонален скорости $\frac{dx^\mu}{d\tau}$:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} S_\mu = 0$$

[см. (5.1.9)]; иначе говоря,

$$S_0 = -v^i S_i. \tag{9.6.2}$$

Положим в (9.6.1) $\mu = i$, умножим это соотношение на $d\tau/dt$ и с помощью формулы (9.6.2) исключим S_0; в результате получим

$$\frac{dS_i}{dt} = \Gamma^j_{i0} S_j - \Gamma^0_{i0} v^j S_j + \Gamma^j_{ik} v^k S_j - \Gamma^0_{ik} v^k v^j S_j. \tag{9.6.3}$$

Постньютоновское приближение позволяет оценить коэффициенты при S_j в правой части (9.6.3) до членов порядка $\bar{v}^3/\bar{r}$:

$$\frac{dS_i}{dt} \approx [\overset{3}{\Gamma}{}^j_{i0} - \overset{2}{\Gamma}{}^0_{i0} v^j + \overset{2}{\Gamma}{}^j_{ik} v^k] S_j. \tag{9.6.4}$$

(Последний член здесь опущен, поскольку все компоненты $\overset{1}{\Gamma}{}^0_{ik}$ равны нулю.) Компоненты аффинной связности определяются выражениями (9.1.69), (9.1.70) и (9.1.72). Подставив их, получим

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} \approx \frac{1}{2}\mathbf{S} \times (\nabla \times \boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{S}\frac{\partial \phi}{\partial t} - 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S})\nabla\phi - \\ - \mathbf{S}(\mathbf{v}\cdot\nabla\phi) + \mathbf{v}(\mathbf{S}\cdot\nabla\phi). \tag{9.6.5}$$

Чтобы решить уравнение (9.6.5), используем тот факт, что при параллельном переносе величина $S_\mu S^\mu$ сохраняется [см. (5.1.10)], т. е. справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt}(g^{\mu\nu} S_\mu S_\nu) = 0. \tag{9.6.6}$$

Из уравнения (9.6.4) видно, что скорость изменения $\mathbf{S}$ должна быть порядка $\mathbf{S}\cdot\bar{v}^3/\bar{r}$, а потому необходимо сохранять только те члены в $g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}$, скорости изменения которых сравнимы в системе координат частицы, движущейся со скоростью $\bar{v}$, т. е. только такие члены, градиенты которых имеют порядок $(\bar{v}^2/\bar{r})$. Следовательно, в уравнении (9.6.5) тензор $g^{\mu\nu}$ можно заменить на $\eta^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}$. Далее, величина $(S_0)^2$ порядка $\bar{v}^2$ по отношению к $\mathbf{S}^2$, поэтому нет необходимости удерживать член $\overset{2}{g}{}^{00}$. Таким образом, с заданной точностью будем считать, что уравнение (9.6.5) имеет следующий интеграл:

$$\mathbf{S}^2 + 2\phi\mathbf{S}^2 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{S})^2 = \text{const}. \tag{9.6.7}$$

Это наводит на мысль ввести новый вектор спина $\mathscr{S}$, определяя его таким образом:

$$\mathbf{S} = (1-\phi)\,\mathscr{S} + \frac{1}{2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathscr{S}). \tag{9.6.8}$$

Тогда с учетом членов порядка $\bar{v}^2 S^2$ выражение (9.6.8) приводит к условию

$$\mathscr{S}^2 = \text{const}. \tag{9.6.9}$$

В этом же приближении соотношение (9.6.8) можно обратить и оно запишется так:

$$\mathscr{S} = (1+\phi)\,\mathbf{S} - \frac{1}{2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}). \tag{9.6.10}$$

Чтобы вычислить скорость изменения $\mathscr{S}$ с учетом членов порядка $(\bar{v}^3/\bar{r})\,S$, нужно рассматривать S как константу везде, где оно появляется с коэффициентами порядка $\bar{v}^2$ и положить $d\mathbf{v}/dt \approx -\nabla\phi$:

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{S}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\phi\right) + \frac{1}{2}\nabla\phi\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}) + \frac{1}{2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{S}\cdot\nabla\phi),$$

подставив сюда (9.6.5), найдем с учетом членов порядка $(\bar{v}^3/\bar{r})\,\mathscr{S}$

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}\times\mathscr{S}, \tag{9.6.11}$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{\zeta} - \frac{3}{2}\,\mathbf{v}\times\nabla\phi. \tag{9.6.12}$$

Уравнение (9.6.11) показывает, что вектор $\mathscr{S}$, оставаясь неизменным по величине, лишь прецессирует со скоростью $|\boldsymbol{\Omega}|$ вокруг направления вектора $\boldsymbol{\Omega}$.

Какое отношение имеет это все к прецессии гироскопа в свободном падении? Ответ, как всегда, следует искать, обращаясь к методу, реально используемому для измерения эффекта. В данном случае направление спина гироскопа контролируют, измеряя *в инерциальной системе, связанной с гироскопом*, углы θ между спином гироскопа $\mathbf{S}_g$ в этой системе и векторами скорости $\mathbf{u}_g$ световых лучей, идущих от одной или нескольких удаленных звезд:

$$\cos\theta = \mathbf{S}_g\cdot\frac{\mathbf{u}_g}{|\mathbf{S}_g|\,|\mathbf{u}_g|}. \tag{9.6.13}$$

(Этот угол можно измерить, фокусируя изображение звезды на систему фотоэлементов, так что изменение угла θ приведет к перемещению изображения вдоль системы, вызывая тем самым изменение фототока.) В инерциальной системе, связанной с гироско-

пом, световые лучи движутся с единичной скоростью

$$|\mathbf{u}_g| = 1,$$

временные компоненты $S_{g\mu}$ исчезают [см. (9.6.2)]:

$$S_{g0} = 0,$$

а вектор $\mathbf{S}_g$ сохраняет свою величину:

$$|\mathbf{S}_g| = (S_{g\mu}S_g^{\mu})^{1/2}.$$

Тогда измеряемый угол θ можно выразить в виде

$$\cos\theta = \frac{S_\mu u^\mu}{(S_\mu S^\mu)^{1/2}}. \tag{9.6.14}$$

Поскольку эта величина является инвариантом, нет больше необходимости ограничивать себя довольно неудобной инерциальной системой координат, связанной с гироскопом, а можно задавать 4-векторы спина S_μ и скорости света u^μ в любой удобной системе координат, например в системе отсчета, связанной с Землей. В такой системе 4-вектор скорости светового луча, идущего от звезды, равен

$$u^i = u^i_\infty + \delta u^i,$$
$$u^0 = 1 + \delta u^0,$$

где $\mathbf{u}_\infty$ — фиксированный единичный вектор, задающий скорость света на больших расстояниях от Земли, а δu^μ — поправки порядка $M_\oplus G/r \sim \bar{v}^2$ к скорости и направлению световых лучей, возникающие из-за гравитационного поля Земли. С учетом членов порядка $\bar{v}^2$ выражения (9.6.10) и (9.6.2) дают следующий результат:

$$S_i = \mathscr{S}_i - \phi\mathscr{S}_i + \frac{1}{2}v_i(\mathbf{v}\cdot\mathscr{S}) + O(\bar{v}^4),$$

$$S_0 = -\mathbf{v}\cdot\mathscr{S} + O(\bar{v}^3).$$

Таким образом, соотношение (9.6.14) приводит к следующему выражению для измеряемого угла θ:

$$\cos\theta \sim \hat{\mathscr{S}}\cdot\left[\mathbf{u}_\infty - \mathbf{v} + \delta\mathbf{u} - \phi\mathbf{u}_\infty + \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_\infty)\right], \tag{9.6.15}$$

где $\hat{\mathscr{S}} = \mathscr{S}/|\mathscr{S}|$. Член $-\mathbf{v}$ соответствует *аберрации света звезд* — важному эффекту, известному еще с XVIII в., который, конечно, должен быть учтен. Кроме этого члена, очевидно, что $\cos\theta$ меняется также со временем, поскольку $\delta\mathbf{u}$, ϕ и $\mathbf{v}$ изменяются при вращении гироскопа вокруг Земли, а также из-за того, что $\hat{\mathscr{S}}$ прецессирует с угловой частотой $\boldsymbol{\Omega}$. В действительности, кроме

аберрации, остальные вклады в изменение значения $\cos\theta$, возникающие из-за варьирования при одном обороте величин $\delta\mathbf{u}$, ϕ, $\mathbf{v}$ и $\mathcal{S}$, имеют порядок $\bar{v}^2$ [см. выражения (8.5.8) и (9.6.12)]. Поэтому, чтобы измерить прецессию величины $\mathcal{S}$ при одном обороте гироскопа, необходимо измерять θ с точностью до 10^{-10} рад, но даже и в этом случае для того, чтобы интерпретировать результат как проявление спиновой прецессии, мы должны будем в (9.6.15) отделить его от эффекта отклонения света $\delta\mathbf{u}$ и других вкладов. К счастью, прецессия спина имеет одно свойство, позволяющее отделить ее от всех других эффектов, — это ее *кумулятивность*. При большом числе оборотов N направление спина изменится на величину порядка $N\bar{v}^2$, в то время как вклады от $\delta\mathbf{u}$, ϕ, $\mathbf{v}$ $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_\infty)$ будут по-прежнему иметь порядок $\bar{v}^2$; поэтому с учетом аберрации изменение θ хорошо аппроксимируется изменением лишь величины $\hat{\mathcal{S}}$, т. е.

$$\Delta(\cos\theta) \approx \mathbf{u}_\infty \cdot \Delta\hat{\mathcal{S}}. \tag{9.6.16}$$

Поэтому мы можем утверждать, что прецессия $\boldsymbol{\Omega}$ вектора $\mathcal{S}$ является непосредственно измеряемым эффектом: нужно лишь набраться терпения и дождаться, пока гироскоп совершит достаточно большое число оборотов вокруг Земли.

Вернемся теперь к вопросу о вычислении вектора $\boldsymbol{\Omega}$: если рассматривать Землю как сферу, которая вращается, но не перемещается, то с помощью формул (9.4.34) и (9.4.22) поля $\boldsymbol{\zeta}$ и ϕ можно записать в виде

$$\phi = -\frac{GM_\oplus}{r}, \qquad \boldsymbol{\zeta} = \frac{2G}{r^3}(\mathbf{x}\times\mathbf{J}_\oplus).$$

Тогда частота прецессии (9.6.12) равна

$$\boldsymbol{\Omega} = 3G\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{J}_\oplus)\, r^{-5} - G\mathbf{J}_\oplus r^{-3} + \frac{3GM_\oplus(\mathbf{x}\times\mathbf{v})}{2r^3}. \tag{9.6.17}$$

Последний член в этом выражении, зависящий только от массы Земли, но не от ее спина, называется *геодезической прецессией* [7—9]; это в основном томасова прецессия, вызываемая гравитацией (§ 1 гл. 5). Первые два члена в (9.6.17) соответствуют взаимодействию между спиновым и орбитальным угловыми моментами гироскопа и Земли, подобно сверхтонкому взаимодействию в атомной физике. Если для простоты считать орбиту гироскопа окружностью радиусом r, единичная нормаль к которой есть $\hat{\mathbf{h}}$, то скорость гироскопа равна

$$\mathbf{v} = -\left(\frac{M_\oplus G}{r^3}\right)^{1/2}(\mathbf{x}\times\hat{\mathbf{h}}), \tag{9.6.18}$$

а средняя за один оборот частота прецессии вычисляется по формуле

$$\langle \boldsymbol{\Omega} \rangle = \frac{(\mathbf{J}_\oplus - \hat{\mathbf{h}}\,(\hat{\mathbf{h}}\cdot\mathbf{J}_\oplus))\,G}{2r^3} + 3\,(M_\oplus G)^{3/2}\frac{\hat{\mathbf{h}}}{2r^{5/2}}. \qquad (9.6.19)$$

Оба члена в (9.6.19) имеют максимум при минимально возможном значении r, т. е. при значении, равном примерно радиусу Земли $R_\oplus$. При этом нижний предел отношения первого, «сверхтонкого» члена ко второму, геодезическому, имеет следующий порядок:

$$\frac{\text{Сверхтонкий}}{\text{Геодезический}} \approx \frac{J_\oplus G}{3\,(M_\oplus G)^{3/2} R_\oplus^{1/2}} = 6{,}5\cdot 10^{-3}, \qquad (9.6.20)$$

так что основным эффектом является прецессия спина вокруг орбитального углового момента $\mathbf{h}$, происходящая со средней частотой (в угловых секундах за год):

$$\langle |\,\boldsymbol{\Omega}\,| \rangle \approx \frac{3\,(M_\oplus G)^{3/2}}{2r^{5/2}} \approx 8{,}4\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^{5/2}. \qquad (9.6.21)$$

Эту величину и надо измерить [10—12, 20]. Для того чтобы детектировать малую «сверхтонкую» прецессию, удобно ориентировать спин гироскопа по нормали $\hat{\mathbf{h}}$ к плоскости орбиты; в этом случае слагаемые в $\boldsymbol{\Omega}$, параллельные $\hat{\mathbf{h}}$, не дают вклада [см. уравнение (9.6.11)], и результирующая прецессия будет происходить как раз вокруг $\mathbf{J}_\oplus$. Величина и направление средней результирующей прецессии равны (в угловых секундах за год)

$$\langle \boldsymbol{\Omega} \rangle_{\text{эфф}} = \frac{G\mathbf{J}_\oplus}{2r^3}, \qquad (9.6.22)$$

$$|\,\langle \boldsymbol{\Omega} \rangle_{\text{эфф}}\,| = 0{,}055\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^3. \qquad (9.6.23)$$

Для того чтобы сделать максимальным эффект этой весьма малой прецессии, необходимо расположить спиновую ось гироскопа перпендикулярно $\mathbf{J}_\oplus$; поскольку она должна быть также перпендикулярна плоскости орбиты, наиболее выгодно вывести гироскоп на полярную орбиту, причем спин гироскопа должен быть параллелен экваториальной плоскости Земли.

Если использовать в этой задаче искусственный спутник, находящийся на эллиптической орбите, то в приведенных выше выражениях нужно везде просто заменить радиус r величиной фокального параметра L. Легко также учесть эффект возможного отклонения от эйнштейновских полевых уравнений. Для произвольной статической сферически-симметричной метрики в изотропных координатах (с $\alpha \equiv 1$) разложение Робертсона (8.3.1)

дает следующий результат:

$$\overset{2}{g}_{00} = -2\phi, \qquad \overset{2}{g}_{ij} = -2\gamma\phi\delta_{ij}, \qquad \overset{3}{g}_{i0} = 0,$$

где ϕ, как обычно, есть $-GM/r$, а γ — безразмерная константа, которая в теории Эйнштейна должна быть равна единице. Обращаясь вновь к формулам (9.1.18), (9.1.19) и (9.1.21), мы видим, что сейчас

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{j}_{ik} = \gamma\left[-\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta_{ij} - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\delta_{jk} + \frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ik}\right],$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{0}_{i0} = \frac{\partial\phi}{\partial x^i},$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{j}_{i0} = 0.$$

Подставляя эти выражения в (9.6.4), получаем следующее выражение для скорости изменения спина:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -(1+\gamma)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S})\nabla\phi - \gamma(\mathbf{v}\cdot\nabla\phi)\mathbf{S} + \gamma(\mathbf{S}\cdot\nabla\phi)\mathbf{v}.$$

Как и раньше, удобно ввести следующий вектор спина, который имел бы постоянную величину:

$$\mathcal{S} \equiv (1+\gamma\phi)\mathbf{S} - \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}).$$

Вектор $\mathcal{S}$ также прецессирует вокруг вектора $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}\times\mathcal{S},$$

но теперь $\boldsymbol{\Omega}$ задается уже таким образом:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(\mathbf{v}\times\nabla\phi). \tag{9.6.24}$$

Следовательно, видоизменение уравнений поля Эйнштейна, учитывающее эффект геодезической прецессии, сводится просто к умножению уравнения на множитель

$$\frac{1+2\gamma}{3}.$$

Чтобы проследить, как сказывается на векторе $\boldsymbol{\Omega}$ видоизменение уравнений поля Эйнштейна для системы, не являющейся ни статической, ни сферически-симметричной, необходимо знать детали новой теории. Мы еще вернемся к этому вопросу в § 9 этой главы.

§ 7. Прецессия спина и принцип Маха *

Прецессия спина, рассчитанная в предыдущем параграфе, имеет замечательную интерпретацию на основе идей Эрнста Маха, обсужденных в § 3 гл. 1. Напомним, что спин свободно

падающего гироскопа не прецессирует в инерциальной системе координат, перемещающейся вместе с гироскопом. В этом как раз и заключается смысл уравнения параллельного переноса (9.6.1). Следовательно, в другой системе, связанной, допустим, с Землей, прецессия Ω гироскопа возникает исключительно из-за того, что инерциальная система, связанная с гироскопом, вращается с угловой частотой Ω относительно Земли и отдаленных звезд. Это объясняет, почему Ω не зависит от скорости вращения гироскопа; *любой* вектор, сохраняющий в инерциальной системе фиксированное направление, в лабораторной системе или системе, связанной в Землей, будет прецессировать с угловой частотой Ω, задаваемой уравнением (9.6.12).

Почему же инерциальная система, падающая вместе с гироскопом, вращается относительно удаленных звезд? Мах утверждает, что инерциальные силы возникают из-за ускорений, в том числе и из-за вращений, относительно всей материи Вселенной, и поэтому система отсчета будет инерциальной, если она не движется ускоренно относительно некоторого среднего распределения материи во Вселенной. Обычно это означает, что инерциальная система не вращается относительно удаленных звезд. Однако наблюдатель на гироскопе, вращающемся вокруг Земли, видит, что распределение массы обусловливается не только удаленными звездами, но и большим сферическим телом, называемым Землей, которое, с его точки зрения, совершает обороты вокруг гироскопа за каждые ~ 90 мин и вокруг собственной оси. Следовательно, определение инерциальных систем отсчета, связанных с гироскопом, должно содержать некоторый компромисс в ориентации гироскопа либо на отдаленные звезды, либо на Землю. В действительности гироскоп пытается вращаться в том же направлении, что и вращение и кажущееся обращение вокруг него Земли, однако он не успевает следовать за ними, и удаленные звезды всегда побеждают в этой борьбе.

Довольно расплывчатые идеи такого сорта, вытекающие из принципа Маха, нашли свое конкретное выражение в подробных вычислениях, основанных на принципе эквивалентности. Выражение (9.6.19) указывало на то, что прецессия вращающегося на орбите гироскопа, а следовательно, и вращение связанной с ним инерциальной системы слагаются из малого «геодезического» члена, параллельного орбитальному угловому моменту $\mathbf{h}$, и столь же малого «сверхтонкого» члена, параллельного той компоненте спина Земли $\mathbf{J}_\oplus$, который перпендикулярен $\mathbf{h}$. Таким образом оказывается, что вращение и кажущееся обращение Земли вокруг гироскопа в какой-то мере воздействуют на инерциальную систему, падающую вместе с гироскопом.

Этот эффект легче понять, проделав мысленный эксперимент, обсуждавшийся Лензе и Тирингом [13, 14] вскоре после создания

общей теории относительности. Они рассмотрели полую сферическую оболочку, вращающуюся как целое с угловой скоростью ω. Согласно уравнению (9.4.35), метрика поля ζ внутри сферы определяется следующим образом:

$$\zeta = \mathbf{x} \times \Omega,$$

где

$$\Omega = -4\phi \frac{\omega}{3},$$

а ϕ — постоянный гравитационный потенциал внутри сферы, равный

$$\phi = -4\pi G \int_{\text{оболочка}} \overset{0}{T}{}^{00}(r')\, r'\, dr'.$$

Формула (9.6.12) показывает, что любая инерциальная система внутри сферы вращается с угловой скоростью Ω.

Заметим, что Ω параллельно ω, но по величине меньше его за счет безразмерного множителя $-4\phi/3$. Поэтому интересно посмотреть, что же будет, если оболочку сделать настолько массивной, чтобы величина ϕ приблизилась к значению $-{}^3/_4$. Исчезнет ли связь инерциальных систем внутри оболочки с удаленными звездами и будут ли они следовать за вращением оболочки с частотой ω? [Прислушаемся к отзвуку того далекого замечания Маха об эксперименте Ньютона с ведром воды, о котором говорилось в § 3 гл. 1: «Никто не может с уверенностью сказать, каков был бы результат эксперимента, если бы толщина (а также масса стенок сосуда) возрастала до тех пор, пока не заняла бы несколько лиг» [1]).] К сожалению, постньютоновский метод перестает работать как раз тогда, когда эта проблема становится интересной, т. е. когда $|\phi|$ становится порядка единицы. Точное решение уравнений Эйнштейна, которое *выглядит* подобно метрике пространства вне вращающейся сферы, было найдено Керром [15]; оно имеет вид

$$-d\tau^2 = -dt^2 + d\mathbf{x}^2 + \frac{2MG\rho}{(\rho^4 + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})^2)\,(\rho^2 + \mathbf{a}^2)^2} \times$$
$$\times [\rho^2 \mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} + \rho\, d\mathbf{x}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{x}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\,(\mathbf{a}\cdot d\mathbf{x}) + (\rho^2 + \mathbf{a}^2)\,\rho\, dt]^2.$$

Здесь $\mathbf{x}$ — квазиевклидов 3-вектор; $\mathbf{a}$ — некоторый постоянный вектор; скалярные произведения $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}$, $\mathbf{x}^2$ и т. д. определены так же, как и в евклидовой геометрии, а ρ задано следующим образом:

$$\rho^4 - (r^2 - \mathbf{a}^2)\,\rho^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2 = 0,$$

[1]) Лига — мера длины, равная 4,83 км.

где, как обычно, $r^2 \equiv \mathbf{x}^2$. При $r \to \infty$ имеем $\rho \to r$, и метрические коэффициенты принимают вид

$$g_{00} \to -1 + \frac{2MG}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$g_{0i} \to \frac{2MG}{r^2}\left\{x_i + \frac{1}{r}(\mathbf{a}\times\mathbf{x})_i\right\} + O\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

$$g_{ij} \to \delta_{ij} + \frac{2MG}{r^3}x_i x_j + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Непосредственное вычисление с использованием выражений (7.6.22) — (7.6.24) показывает, что полные импульс, энергия и угловой момент системы вместе с *ее гравитационным полем* имеют вид

$$\mathbf{P} = 0, \qquad P^0 = M, \qquad \mathbf{J} = M\mathbf{a}.$$

К сожалению, все еще не удалось показать, что это точное внешнее решение плавно переходит в точное решение для внутренней области вращающейся сферы. Недавно Брилл и Коэн [16] нашли такое решение для очень тонкой вращающейся сферической оболочки радиусом R, которое справедливо в низшем порядке по частоте вращения ω как внутри, так и вне ее, но справедливо во всех порядках по массе оболочки M, а также удовлетворяет корректным условиям непрерывности при пересечении поверхности оболочки. Это решение имеет вид

$$-d\tau^2 = -H(r)\,dt^2 + J(r)\,[dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\varphi - \Omega(r)\,dt)^2],$$

где

$$H(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-2MG/r}{1+2MG/r}\right)^2, & r > R, \\ \left(\dfrac{1-2MG/R}{1+2MG/R}\right)^2, & r < R, \end{cases}$$

$$J(r) = \begin{cases} (1+2MG/r)^4, & r > R, \\ (1+2MG/R)^4, & r < R. \end{cases}$$

Внутри сферы угловая скорость $\Omega(r)$ постоянна и равна

$$\Omega = \omega\left[1 + \frac{3(R-2MG)}{4MG(1+\beta)}\right]^{-1}, \qquad r < R,$$

где β — безразмерная константа, зависящая от относительных вкладов T^{ij} и T^{00} в гравитационную массу оболочки. Если мы определим новые координаты

$$t' = \sqrt{H}\,t, \qquad r' = \sqrt{J}\,r \qquad \varphi' = \varphi - \Omega t,$$

то придем к инерциальной системе координат вне сферы. Тогда Ω есть частота вращения (в единицах t) инерциальной системы

внутри оболочки относительно системы Минковского на бесконечности. Когда величины MG и β малы, то Ω/ω близко к значению постньютоновского приближения $4MG/3R$; если же MG настолько велико, что шварцшильдовский радиус оболочки $2MG$ примерно тот же, что и радиус оболочки R, отношение Ω/ω приближается к единице, как, возможно, и предполагал Мах.

§ 8. Постньютоновская гидродинамика*

Постньютоновская программа, очерченная в § 1—3 этой главы, могла бы служить надежной основой для релятивистской небесной механики, если бы можно было рассматривать Солнце и планеты как точечные частицы. Однако это не соответствует действительности; например, приливные силы на Луне, связанные с ее конечными размерами, намного больше, чем постньютоновские поправки к гравитационному полю Земли. Часто такие эффекты, связанные с конечными размерами, можно достаточно точно вычислить, если считать, что астрономические тела состоят из идеальной жидкости [17—19] [1]). Тогда тензор энергии-импульса, задаваемый выражением (5.4.2), равен

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p+\rho)\,U^\mu U^\nu. \tag{9.8.1}$$

Здесь p и ρ — собственные давление и плотность энергии, т. е. те значения, которые измеряются локально-сопутствующим и свободно падающим наблюдателем, а U^μ — 4-вектор скорости $dx^\mu/d\tau$. (Конечно, p и ρ равны нулю везде, исключая области внутри Солнца и планет.) Чтобы вычислить U^μ, положим

$$\frac{U^i}{U^0} = \frac{dx^i}{dt} \equiv v^i \tag{9.8.2}$$

и вычислим U^0 с помощью (9.2.2):

$$U^0 = \frac{dt}{d\tau} = 1 - \phi + \frac{1}{2}v^2 + O(\bar{v}^4). \tag{9.8.3}$$

Программа вычисления движения жидкости в значительной мере зависит от того, существует ли уравнение состояния, задающее p в виде функции от ρ, как в случае холодной вырожденной жидкости (гл. 11), или же p будет зависеть также и от температуры. Если давление есть функция только ρ, то наша программа, в сущности, та же, что и в § 3 гл. 9, а именно:

А. Необходимо сперва решить задачу Ньютона. При этом можно считать, что давление имеет порядок $\bar{v}^2\bar{M}/\bar{r}^3$, и, следовательно, нужные компоненты тензора энергии-импульса записы-

[1]) Постньютоновские уравнения были исследованы в работе [17]. Для ознакомления с пост-постньютоновскими уравнениями можно рекомендовать работу [18]. Эффекты радиационных реакций были учтены в работе [19].

ваются с помощью выражений (9.8.1) — (9.8.3) в виде

$$\overset{0}{T}{}^{00} = \rho, \tag{9.8.4}$$

$$\overset{1}{T}{}^{i0} = \rho v_i, \tag{9.8.5}$$

$$\overset{2}{T}{}^{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j. \tag{9.8.6}$$

К ньютоновским уравнениям движения можно прийти, подставляя выражения (9.8.4) — (9.8.6) в уравнения сохранения массы и импульса (9.3.2) и (9.3.3):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{9.8.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = -\rho \nabla \phi - \nabla p, \tag{9.8.8}$$

где p задается уравнением состояния в виде функции от ρ, а ϕ определяется уравнением Пуассона (9.3.12)

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \tag{9.8.9}$$

Б. Использовать величины ρ, p, $\mathbf{v}$ и ϕ, определенные в А, чтобы вычислить компоненты (9.8.4) — (9.8.6) тензора $T^{\mu\nu}$, а также величину

$$\overset{2}{T}{}^{00} = \rho (\mathbf{v}^2 - 2\phi). \tag{9.8.10}$$

В. Использовать результаты А и Б, а также выражения (9.1.62) и (9.1.65), чтобы рассчитать постньютоновские поля ζ и ψ.

Г. Найти ρ, p и $\mathbf{v}$ в постньютоновском приближении. В заданном порядке тензор энергии-импульса определяется выражениями (9.8.1) — (9.8.3) в виде

$$\overset{0}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{00} = \rho (1 + \mathbf{v}^2 - 2\phi), \tag{9.8.11}$$

$$\overset{1}{T}{}^{i0} + \overset{3}{T}{}^{i0} = (\rho + p + \mathbf{v}^2 \rho - 2\phi\rho)\, \mathbf{v}, \tag{9.8.12}$$

$$\overset{2}{T}{}^{ij} + \overset{4}{T}{}^{ij} = p\delta_{ij}(1 + 2\phi) + v^i v^j (p + \rho - 2\phi\rho + \phi \mathbf{v}^2), \tag{9.8.13}$$

и постньютоновские уравнения движения получаются, если подставить (9.8.11) — (9.8.13) в уравнения сохранения энергии и импульса (9.3.2), а также в (9.3.3) — (9.3.5):

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho (1 - \mathbf{v}^2 - 2\phi)] + \nabla \cdot [\mathbf{v} (\rho + p + \mathbf{v}^2 \rho - 2\phi\rho)] = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{9.8.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{v} (\rho + p + \mathbf{v}^2 \rho - 2\phi\rho)] + \nabla \cdot [\mathbf{v}\mathbf{v} (p + \rho - 2\phi\rho + \phi \mathbf{v}^2)] =$$

$$= -\nabla [p(1+2\phi)] - \rho\nabla(\phi + 2\phi^2 + \psi) - \rho\frac{\partial \xi}{\partial t} - \rho(\mathbf{v}^2 - 2\phi)\nabla\phi +$$

$$+ \rho\mathbf{v}\times(\nabla\times\xi) + 4\rho\mathbf{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} -$$

$$-(3p + \rho\mathbf{v}^2)\nabla\phi + 4p\nabla\phi + 4\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla\phi). \quad (9.8.15)$$

Д. Процедура итераций продолжается по этому рецепту дальше.

Вопрос усложняется, когда температура является независимой переменной. Тогда на каждом этапе вычислений необходимо иметь еще одно дополнительное уравнение — уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}\mu U^\mu) = 0, \quad (9.8.16)$$

где μ — плотность массы покоя, пропорциональная плотности числа частиц в жидкости [ср. с уравнением (5.2.14)]. Предположим, что уравнение состояния, задающее давление как функцию μ и плотности энергии $\varepsilon = O(\bar{v}^2)$, имеет вид

$$T^{00} \equiv \mu U^0 + \varepsilon. \quad (9.8.17)$$

Тогда в нашем распоряжении имеются уравнение непрерывности (9.8.16), условие сохранения импульса $T^{\mu i}{}_{;\mu} = 0$ и условие сохранения энергии, которое после вычитания из них (9.8.16) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{-g}\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{-g}[T^{i0} - \mu U^i] = -\sqrt{-g}\Gamma^0_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \quad (9.8.18)$$

Однако теперь на каждом этапе мы используем условие сохранения энергии на один порядок выше по $\bar{v}^2$. Последовательность такова: в ньютоновском приближении берем уравнение непрерывности, учитывая только первый порядок по $\bar{v}$, условие сохранения импульса до членов порядка $\bar{v}^2$, а условие сохранения энергии до членов порядка $\bar{v}^3$; в постньютоновском приближении используется уравнение непрерывности до членов порядка $\bar{v}^3$, условие сохранения импульса — до членов порядка $\bar{v}^4$, а условие сохранения энергии — до членов порядка $\bar{v}^5$. Даже не расписывая подробно эти выражения, можно заметить, что такая программа реализуема, поскольку при ньютоновском рассмотрении нам необходимо иметь $\overset{3}{\Gamma}{}^0_{00}$ и $\overset{2}{\Gamma}{}^0_{i0}$, которые уравнениями (9.1.71) и (9.1.72) определяются только через ϕ, а в постньютоновском приближении нам нужно знать $\overset{5}{\Gamma}{}^0_{00}$, $\overset{4}{\Gamma}{}^0_{i0}$, $\overset{3}{\Gamma}{}^0_{ij}$, задаваемые выражениями (9.1.73) — (9.1.75) через постньютоновские поля.

§ 9. Приближенные решения в теории Бранса — Дикке

Чтобы проверить общую теорию относительности, полезно сравнить ее с какой-нибудь другой теорией. Теория Бранса — Дикке, описанная в § 3 гл. 7, идентична в отношении физической интерпретации метрики $g_{\mu\nu}$ общей теории относительности, а отличается от нее только тем, что содержит в уравнениях гравитационного поля новое скалярное поле ϕ. Чтобы не спутать скалярное поле Бранса — Дикке ϕ с ньютоновским потенциалом, будем записывать первый в виде $\mathcal{G}^{-1}(1+\xi)$, где $\mathcal{G}$ — постоянная порядка G, а ξ — скалярное поле, определяемое следующим образом:

$$\xi^{;\mu}{}_{;\mu} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{3+2\omega} T^{\mu}{}_{\mu}, \tag{9.9.1}$$

$$\xi \to 0 \quad \text{при } r \to \infty. \tag{9.9.2}$$

[См. уравнение (7.3.13). Мы опустили у T индекс M, но под $T^{\mu\nu}$ будем понимать тензор энергии-импульса материи, не включая в него поле ξ. Величина ω есть безразмерная константа, равная примерно 6.] Уравнения гравитационного поля задаются формулой (7.3.14) в виде

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = &- 8\pi\mathcal{G}(1+\xi)^{-1} T_{\mu\nu} - \\ &- \omega(1+\xi)^{-2}\left(\xi_{;\mu}\xi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\xi_{;\rho}\xi^{;\rho}\right) - \\ &- (1+\xi)^{-1}(\xi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\xi^{;\rho}{}_{;\rho}). \end{aligned} \tag{9.9.3}$$

Используя (9.9.1), чтобы определить $\xi^{;\rho}{}_{;\rho}$, и свертку (9.9.3) для нахождения R, перепишем (9.9.3) в форме

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = &- 8\pi\mathcal{G}(1+\xi)^{-1}\left[T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\lambda}\left(\frac{\omega+1}{2\omega+3}\right)\right] - \\ &- \omega(1+\xi)^{-2}\xi_{;\mu}\xi_{;\nu} - (1+\xi)^{-1}\xi_{;\mu;\nu}. \end{aligned} \tag{9.9.4}$$

Из соотношений (9.9.1) и (9.9.2) следует, что ξ можно разложить в ряд:

$$\xi = \overset{2}{\xi} + \overset{4}{\xi} + \ldots, \tag{9.9.5}$$

где $\overset{N}{\xi}$ имеет порядок v^{-N} и, в частности,

$$\nabla^2 \overset{2}{\xi} = -\frac{8\pi\mathcal{G}}{3+2\omega} \overset{0}{T}{}^{00}. \tag{9.9.6}$$

С помощью (9.9.4) — (9.9.6) и (9.1.37) — (9.1.40) уравнения поля переписываются следующим образом:

$$\nabla^2 \overset{2}{g}_{00} = -8\pi\mathcal{G}\left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right)\overset{0}{T}_{00}, \tag{9.9.7}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \overset{4}{g}_{00} = {} & \frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial t^2} + \overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i\,\partial x^j} - (\nabla \overset{2}{g}_{00})^2 + \\ & + 8\pi\mathcal{G}\left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right)^2 \overset{0}{\xi}\overset{0}{T}{}^{00} - 8\pi\mathcal{G}\overset{2}{T}{}^{ii}\left(\frac{2\omega+2}{2\omega+3}\right) + \\ & + 16\pi\mathcal{G}\overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}{}^{00}\left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right) - 8\pi\mathcal{G}\left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right)\overset{2}{T}{}^{00} - \\ & - 2\omega\left(\frac{\partial \overset{2}{\xi}}{\partial t}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \overset{2}{\xi}}{\partial t^2} + 2\overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{00}\frac{\partial \overset{2}{\xi}}{\partial x^i},\end{aligned} \tag{9.9.8}$$

$$\nabla^2 \overset{3}{g}_{i0} = 16\pi\mathcal{G}\overset{1}{T}{}^{i0} - 2\frac{\partial^2 \overset{2}{\xi}}{\partial x^i\,\partial t}, \tag{9.9.9}$$

$$\nabla^2 \overset{2}{g}_{ij} = -8\pi\mathcal{G}\overset{0}{T}{}^{00}\delta_{ij}\left(\frac{2\omega+2}{2\omega+3}\right) - 2\frac{\partial^2 \overset{2}{\xi}}{\partial x^i\,\partial x^j}. \tag{9.9.10}$$

Из (9.9.7) следует, что гравитационная постоянная, измеряемая при наблюдении за медленно движущейся частицей или в эксперименте с изменением масштаба времени, есть не $\mathcal{G}$, а величина G, равная

$$G = \left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right)\mathcal{G}. \tag{9.9.11}$$

Таким образом, мы получаем обычное соотношение между $\overset{2}{g}_{00}$ и ньютоновским потенциалом ϕ

$$\overset{2}{g}_{00} = -2\phi \tag{9.9.12}$$

при условии, что ϕ определяется в виде

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\overset{0}{T}{}^{00}. \tag{9.9.13}$$

Из (9.9.6) и (9.9.13) следует также, что

$$\overset{2}{\xi} = -(\omega+2)^{-1}\phi,$$

а уравнения поля для $\overset{4}{g}_{00}$, $\overset{3}{g}_{i0}$ и $\overset{2}{g}_{ij}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\nabla^2 \overset{4}{g}_{00} = {} & -2\left(\frac{\omega+1}{\omega+2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - 2\overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\,\partial x^j} - 2\left(\frac{2\omega+5}{\omega+2}\right)(\nabla\phi)^2 - \\ & - 8\pi G\left[4 + \frac{1}{\omega+2}\right]\phi\overset{0}{T}{}^{00} - 8\pi G\left(\frac{2\omega+2}{2\omega+4}\right)\overset{2}{T}{}^{ii} - \\ & - 8\pi G\overset{2}{T}{}^{00} - \frac{2\omega}{(\omega+2)^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2,\end{aligned} \tag{9.9.14}$$

$$\nabla^2 \overset{3}{g}_{i0} = 16\pi G \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right) \overset{1}{T}^{i0} + \frac{2}{\omega+2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial t}, \tag{9.9.15}$$

$$\nabla^2 \overset{2}{g}_{ij} = -8\pi G \overset{0}{T}^{00} \delta_{ij} \left(\frac{\omega+1}{\omega+2}\right) + \frac{2}{(\omega+2)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j}. \tag{9.9.16}$$

В качестве примера рассмотрим поле статической сферически-симметричной массы. В этом случае ньютоновский потенциал есть функция только r и (9.9.16) дает

$$\overset{2}{g}_{ij} = -2\delta_{ij} \left(\frac{\omega+1}{\omega+2}\right) \phi + \\ + \frac{2}{\omega+2} \left\{ \left(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}\right) \frac{1}{r^3} \int_0^r r^2 \phi(r)\, dr + \frac{x_i x_j \phi}{r^2} \right\}. \tag{9.9.17}$$

Вне массы имеем

$$\phi = -\frac{MG}{r}, \tag{9.9.18}$$

и поэтому (9.9.17) приводит к выражению

$$\overset{2}{g}_{ij} = \left(\frac{2\omega+1}{\omega+2}\right) \frac{MG}{r} \delta_{ij} + \frac{MG}{\omega+2} \frac{x_i x_j}{r^3} + \\ + \frac{2MGR^2}{\omega+2} \left(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}\right) \frac{1}{r^3}, \tag{9.9.19}$$

где R — эффективный радиус, определяемый следующим образом:

$$MGR^2 \equiv \int_0^\infty \left[\phi(r) + \frac{MG}{r}\right] r^2\, dr. \tag{9.9.20}$$

(Подынтегральное выражение исчезает вне массы, поэтому мы вольны выбирать в качестве верхнего предела любую точку от r до ∞). Подставляя (9.9.18) и (9.9.19) в (9.9.14), имеем

$$\nabla^2 \overset{4}{g}_{00} = -\frac{2(2\omega+3) M^2G^2}{(\omega+2) r^4} - \frac{24M^2G^2R^2}{(\omega+2) r^6}$$

Решение этого уравнения записывается в виде

$$\overset{4}{g}_{00} = -\frac{(2\omega+3) M^2G^2}{(\omega+2) r^2} - \frac{2M^2G^2R^2}{(\omega+2) r^4} + \frac{\varkappa M^2G^2}{rR}, \tag{9.9.21}$$

где $\varkappa$ — безразмерная константа, которая должна быть определена из условия гладкости перехода внешнего решения (9.9.21) в несингулярное решение для внутренней области.

Из результатов (9.9.19) — (9.9.21) следует, что гравитационное поле вне сферической статической массы зависит от величины

массы и ее распределения. Однако этот эффект зависимости от величины массы можно исключить соответствующим переопределением величин M и $\mathbf{x}$:

$$M' = M\left[1 - \frac{\varkappa MG}{R}\right], \tag{9.9.22}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}\left[1 + \frac{MGR^2}{(\omega+2)\,r^3}\right]. \tag{9.9.23}$$

Тогда два последних члена в (9.9.21) и последнее слагаемое в (9.9.19) при замене переменных (9.9.22) и (9.9.23) сокращаются с соответствующими членами, возникающими в $\overset{2}{g}_{00}$ и $\overset{0}{g}_{ij}$. Опуская штрихи, в итоге получаем

$$\overset{2}{g}_{00} = \frac{2MG}{r}, \tag{9.9.24}$$

$$\overset{4}{g}_{00} = -\frac{(2\omega+3)\,M^2G^2}{(\omega+2)\,r^2}, \tag{9.9.25}$$

$$\overset{2}{g}_{ij} = \left(\frac{2\omega+1}{\omega+2}\right)\frac{MG}{r}\,\delta_{ij} + \frac{MG}{\omega+2}\,\frac{x_ix_j}{r^3}. \tag{9.9.26}$$

Таким образом, теория Бранса — Дикке разделяет утверждение теории Эйнштейна, что гравитационное поле вне статической сферически-симметричной массы зависит только от M, но не от каких-либо других свойств массы.

Это решение можно сравнить с общим разложением Робертсона (8.3.7) в гармонических координатах, которое (для $\alpha = 1$) дает

$$\overset{2}{g}_{00} = \frac{2MG}{r},$$

$$\overset{4}{g}_{00} = -(\gamma - 1 + 2\beta)\,\frac{M^2G^2}{r^2},$$

$$\overset{2}{g}_{ij} = (3\gamma - 1)\,\delta_{ij}\,\frac{MG}{r} + (1-\gamma)\,\frac{MGx_ix_j}{r^3}.$$

Следовательно, результаты Бранса — Дикке (9.9.24) — (9.9.26) можно воспроизвести, задав параметры Робертсона с помощью формул

$$\gamma = \frac{\omega+1}{\omega+2}, \qquad \beta = 1. \tag{9.9.27}$$

Эти формулы уже использовались в предыдущей главе при сравнении теории Бранса — Дикке с экспериментом.

Отметим, что элемент $\overset{3}{g}_{i0} \equiv \zeta_i$ метрического тензора для статической системы, задаваемый уравнением (9.9.15), имеет вид

$$\zeta_i = -4G\left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right)\int \frac{\overset{1}{T}{}^{i0}(\mathbf{x}',\,t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,d^3x'. \tag{9.9.28}$$

Отсюда следует, что влияние вращения сферической массы на прецессию спина и перигелия в теории Бранса — Дикке (для $0 < \omega < \infty$) меньше, чем в общей теории относительности, в $(2\omega + 3)/(2\omega + 4)$ раз.

Наиболее критические проверки теории Бранса — Дикке — это те, которые связаны с проверкой «очень сильного» принципа эквивалентности. В любой точке P гравитационного поля можно выбрать локально-инерциальную систему координат, в которой в этой точке $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$. Однако поле Бранса — Дикке ξ — скаляр, а потому не исчезает в точке P, а будет задаваться уравнениями (9.9.6) и (9.9.13):

$$\xi \approx \overset{2}{\xi} = -(\omega + 2)^{-1}\phi,$$

где ϕ — ньютоновский гравитационный потенциал. Уравнение (9.9.4) показывает, что в этой системе координат гравитационное поле малой массы, введенной в точку P, можно вычислить, как обычно, но гравитационная константа G должна быть заменена следующей величиной:

$$G_{\text{эфф}} = G(1 + \xi)^{-1} \approx G[1 + (\omega + 2)^{-1}\phi]. \qquad (9.9.29)$$

Например, при $\omega = 6$ и ϕ, равном его значению на поверхности Земли, $-6{,}9 \cdot 10^{-10}$, эффективная гравитационная константа, измеряемая на поверхности Земли в эксперименте Кавендиша, будет меньше, чем «истинная» гравитационная константа, измеряемая на спутнике, летящем на высокой орбите, на $\sim (1 - 8) \cdot 10^{-11}$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Chandrasekhar S., The Post-Newtonian Equations of Hydrodynamics in General Relativity, The Post-Newtonian Effects on the Equilibrium of the Maclaurin Spheroids, The Stability of Gaseous Masses in the Post-Newtonian Approximation, в книге Relativity Theory and Astrophysics. 3. Stellar Structure, ed. J. Ehlers, Providence, R.I., 1967 (см. перевод: *Чандрасекар Ш.*, Введение в учение о строении звезд, ИЛ, 1950).

Goldberg J. N., The Equations of Motion, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. L. Witten, Wiley, 1962, p. 102.

Infeld L., Plebanski J., Motion and Relativity, Pergamon Press, 1960 (см. перевод: *Инфельд Л., Плебаньский Е.*, Движение и релятивизм. Движение тел в общей теории относительности. ИЛ, 1962).

Фок В., Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, 1961.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, 1962.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Einstein A., Infeld L., Hoffmann B.*, Ann. Math., 39, 65 (1938); *Einstein A., Infeld L.*, Ann. Math., 41, 455 (1940); *Einstein A., Infeld L.*, Canad. J. Math., 1, 209 (1949) (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1966, т. 2, стр. 450, 532, 674).

2. *Pugh G. E.*, WSEG Research Memo 11, U.S. Dept. of Defense, 1959.
3. *Schiff L. I.*, Proc. Nat. Acad. Sci., **46**, 871 (1960); Phys. Rev. Lett., **4**, 215 (1960).
4. *Papapetrou A.*, Proc. Roy. Soc., **A209**, 248 (1951).
5. *Corinaldesi E.*, *Papapetrou A.*, Proc. Roy. Soc., **A209**, 259 (1951).
6. *Fock V. A.*, J. Phys. (СССР), **1**, 81 (1939).
7. *De Sitter W.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **77**, 155, 481 (1920).
8. *Fokker A. D.*, Kon. Akad. Weten. Amsterdam, Proc., **23**, 729 (1920).
9. *Pirani F. A. E.*, Acta Physica Polonica, **15**, 389 (1956).
10. *Everitt C. W. F.*, *Fairbank W. M.*, Proceedings of the Tenth International Conference on Low Temperature Physics, Moscow, August 1969.
11. *Frisch D. H.*, *Kasper J. F., Jr.*, J. Appl. Phys., **40**, № 8, 3376 (1969).
12. *Shalloway D. I.*, *Frisch D. H.*, Astrophys. and Space Sci., **10**, 106 (1971).
13. *Thirring H.*, Phys. Zs., **19**, 33 (1918).
14. *Lense J.*, *Thirring H.*, Phys. Zs., **19**, 156 (1918).
15. *Kerr R.*, Phys. Rev. Lett., **11**, 237 (1963).
16. *Cohen J. M.*, в книге Relativity Theory and Astrophysics. 1. Relativity and Cosmology, ed. J. Ehlers, 1967, p. 200.
17. *Chandrasekhar S.*, Astrophys. J., **142**, 1488 (1965); **158**, 45 (1969).
18. *Chandrasekhar S.*, *Nutku Y.*, Astrophys. J., **158**, 55 (1969).
19. *Chandrasekhar S.*, Esposito F. P., Astrophys. J., **160**, 153 (1970).
20. *Frisch D. H.*, *Fairbank W. M.*, Доклад на 3-й конференции по теории относительности, Кембридж, июнь 1970.

Ничто великое по самой природе не может быть точным.

Эдмунд Бэрк,
Речь о системе американского налогообложения, 1774 г.

Глава 10
ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Как мы видели, есть много общих черт между явлениями гравитации и электродинамики. Поэтому не следует воспринимать как неожиданный тот факт, что уравнения Эйнштейна, подобно уравнениям Максвелла, имеют радиационные решения. Однако никто пока не сумел с достоверностью обнаружить гравитационное излучение, и причину этого не трудно отыскать: теория Эйнштейна предсказывает, что в обычных атомных процессах гравитационное излучение зарождается в крайне малых количествах. Например, вероятность того, что переход между двумя атомными состояниями, произойдет за счет гравитационного, а не электромагпитного излучения, имеет порядок GE^2/e^2, где E — выделяющаяся энергия, e — заряд электрона. Для $E \approx 1$ эВ вероятность перехода составляет около $3 \cdot 10^{-54}$.

Почему же тогда изучают гравитационное излучение? Одна из причин — это, конечно, надежда на то, что, может быть, удастся найти сильный источник гравитационного излучения. Такой источник, возможно, уже обнаружен (§ 7 гл. 10). Однако гравитационное излучение представляло бы интерес, даже если бы не было никаких надежд когда-либо его обнаружить, поскольку теория гравитационного излучения является естественным мостом между общей теорией относительности и современной микроскопической физикой.

В последние годы мы научились в микроскопических явлениях описывать фундаментальные наблюдаемые, пользуясь такими понятиями, как элементарные частицы и их столкновения. Пример из классической электродинамики: плоское решение волновых уравнений Максвелла интерпретируется наиболее естественным образом как частица — фотон. Аналогично, радиационные решения уравнений Эйнштейна приводят к понятию частицы гравитационного излучения — *гравитону*.

К сожалению, теория гравитационного излучения очень сложна из-за нелинейности уравнений Эйнштейна. В духе идей § 6 гл. 7 можно сказать, что любая гравитационная волна и сама является некоторым распределением энергии и импульса, вносящим вклад в гравитационное поле этой волны. Это усложнение не позволяет найти общие радиационные решения точных уравнений Эйнштейна.

Существуют два пути обхода этой трудности. Первый — изучать радиационные решения уравнений Эйнштейна только для слабых полей, которые описывают волны, переносящие не столь большие энергию и импульс, чтобы это влияло на их собственное распространение. Второй — длинный и сложный — это искать частные решения точных полевых уравнений Эйнштейна. Благодаря многим математическим ухищрениям во втором случае удалось получить довольно изящные результаты. Однако эту главу мы посвятим только первому подходу — рассмотрению слабых полей. Одна из причин этого состоит в том, что интенсивность любого гравитационного излучения, по-видимому, очень низка. Другая — более глубокая — связана с тем, что придать точный смысл понятию элементарная частица можно, только рассматривая ее вдали от всех других частиц, а для гравитонов это как раз и соответствует решению полевых уравнений в приближении слабого поля.

Читатель не должен отсюда делать вывод, что невозможность найти общие точные решения нелинейных полевых уравнений оставляет какой-то фундаментальный пробел в нашем понимании теории гравитации. Действительно, аналогичные проблемы возникают и в электродинамике, где точный расчет электромагнитного поля, создаваемого затухающим током электрического осциллятора, является сильно нелинейной задачей, поскольку поле само действует на ток, его создавший. Хотя эта проблема не была решена и много лет спустя после создания теории Максвелла, не оставалось сомнений, что электрические осцилляторы порождают электромагнитные волны, изучением которых занимался Максвелл. Гравитационные волны — более сложное явление, чем электромагнитные, так как они дают вклад в свой собственный источник и вне материальной гравитационной антенны. Однако если мы находимся далеко — в волновой зоне, где поля слабые, то как электромагнитные, так и гравитационные волны обладают простыми свойствами.

§ 1. Приближение слабого поля

Предположим, что метрика близка к метрике Минковского $\eta_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{10.1.1}$$

где $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. В первом порядке по h тензор Риччи имеет вид

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + O(h^2), \tag{10.1.2}$$

а аффинная связность

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}h_{\rho\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu}h_{\rho\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\rho}h_{\mu\nu}\right] + O(h^2). \tag{10.1.3}$$

Коль скоро мы ограничились первым порядком по h, то поднимать и опускать *все* индексы следует с помощью $\eta^{\mu\nu}$, а не $g^{\mu\nu}$, т. е.

$$\eta^{\lambda\rho}h_{\rho\nu} \equiv h^{\lambda}{}_{\nu}, \qquad \eta^{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} \text{ и т. д.}$$

При таком подходе уравнения (10.1.2) и (10.1.3) дают тензор Риччи в первом порядке:

$$R_{\mu\nu} \approx R^{(1)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\mu}}h^{\lambda}{}_{\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\nu}}h^{\lambda}{}_{\mu} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}h^{\lambda}{}_{\lambda}\right).$$

Следовательно, уравнения поля Эйнштейна запишутся следующим образом:

$$\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\mu}}h^{\lambda}{}_{\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\nu}}h^{\lambda}{}_{\mu} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}h^{\lambda}{}_{\lambda} = -16\pi G S_{\mu\nu}, \quad (10.1.4)$$

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}. \quad (10.1.5)$$

Здесь $T_{\mu\nu}$ берется в низшем порядке по $h_{\mu\nu}$, т. е. не зависит от $h_{\mu\nu}$, и удовлетворяет обычному закону сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}T^{\mu}{}_{\nu} = 0. \quad (10.1.6)$$

(Если гравитационные силы играют важную роль в структуре излучающей системы, то вместо $\tau^{\mu\nu}$ можно использовать $T^{\mu\nu}$; см. § 6 гл. 7.) Отметим, что закон сохранения (10.1.6), записанный в такой форме, обеспечивает согласованность уравнений (10.1.4), поскольку (10.1.6) предполагает справедливость соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}S^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}S^{\lambda}{}_{\lambda},$$

в то время как линеаризованный тензор Риччи удовлетворяет тождеству Бианки в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}R^{(1)\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\Box^2 h^{\lambda}{}_{\lambda} - \frac{\partial^2 h^{\lambda\nu}}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\nu}}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial R^{(1)\lambda}{}_{\lambda}}{\partial x^{\nu}}.$$

Как уже обсуждалось в § 4 гл. 7, нельзя ожидать, что такое уравнение поля, как (10.1.4), приведет к единственному решению, поскольку, задав любое решение, можно всегда заменой координат получить другие решения. Наиболее общее преобразование координат, оставляющее поле слабым, имеет вид

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x), \quad (10.1.7)$$

где $\partial\varepsilon^{\mu}/\partial x^{\nu}$ — самое большее того же порядка величины, что и $h_{\mu\nu}$. В новой системе координат метрика записывается в форме

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}g^{\lambda\rho}$$

или, так как $g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, можно записать

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \eta^{\lambda\nu} - \frac{\partial \varepsilon^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \eta^{\rho\mu}.$$

Таким образом, если $h_{\mu\nu}$ есть решение уравнения (10.1.4), то должно быть

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \varepsilon_{\nu}}{\partial x^{\mu}}, \tag{10.1.8}$$

где $\varepsilon_{\mu} \equiv \varepsilon^{\nu}\eta_{\mu\nu}$ есть четыре малые, а в остальном произвольные функции от x^{μ}. В том, что (10.1.8) тоже есть решение, можно убедиться непосредственно, подставляя его в уравнение (10.1.4); это свойство — следствие так называемой *калибровочной инвариантности* уравнения поля.

Калибровочная инвариантность уравнения поля (10.1.4) создает трудности, когда приходится явно решать уравнение. Однако эти трудности можно устранить, выбирая какую-нибудь частную калибровку, т. е. некоторую систему координат. Наиболее удобно работать в *системе гармонических координат*, для которых

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0.$$

Если использовать (10.1.3), то в первом порядке получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} h^{\mu}{}_{\mu}. \tag{10.1.9}$$

То, что такой выбор всегда возможен, следует из общих соображений, приведенных в § 4 гл. 7; из выражения (10.1.8) можно также видеть, что если $h_{\mu\nu}$ не удовлетворяет (10.1.9), то, совершая преобразования координат (10.1.7), при условии

$$\Box^2 \varepsilon_{\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} h^{\mu}{}_{\mu}$$

мы найдем некоторый тензор $h'_{\mu\nu}$, который уже удовлетворяет (10.1.9).

Поэтому будем считать, что $h_{\mu\nu}$ действительно решение уравнения (10.1.9).

Подставляя (10.1.9) в (10.1.4), можно записать уравнение поля в виде

$$\Box^2 h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu}. \tag{10.1.10}$$

Одно из решений представляет собой *запаздывающий потенциал*

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = 4G \int d^3\mathbf{x}' \, \frac{S_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \tag{10.1.11}$$

Мы уже отмечали, что закон сохранения (10.1.6) для $T^{\mu\nu}$ эквивалентен

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} S^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} S^{\mu}{}_{\mu} \tag{10.1.12}$$

и вследствие этого решение (10.1.11) для источника $S_{\mu\nu}$, заключенного в конечный объем, автоматически удовлетворяет условию гармонических координат (10.1.9). (Доказательство этого идентично тому, которое используется в электродинамике при вычислении векторного потенциала с калибровочным условием Лоренца.) К решению (10.1.11) можно добавить любое решение однородного уравнения:

$$\Box^2 h_{\mu\nu} = 0, \tag{10.1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\mu{}_\mu. \tag{10.1.14}$$

Выражение (10.1.11) мы интерпретируем как гравитационное излучение, создаваемое источником $S_{\mu\nu}$, в то время как любой дополнительный член, удовлетворяющий (10.1.13) и (10.1.14), представляет собой гравитационное излучение, приходящее из бесконечности. Появление в (10.1.11) временного аргумента $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ показывает, что гравитационные эффекты распространяются с единичной скоростью, т. е. со скоростью света.

§ 2. Плоские волны

Рассмотрим плоские волновые решения однородных уравнений (10.1.13) и (10.1.14), ибо они играют важную роль сами по себе и, кроме того, как мы увидим далее, запаздывающие волны переходят в плоские при $r \to \infty$. Общее решение уравнений (10.1.13) и (10.1.14) есть линейная суперпозиция решений, записанная в виде

$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) + e^*_{\mu\nu} \exp(-ik_\lambda x^\lambda). \tag{10.2.1}$$

Такое решение удовлетворяет уравнению (10.1.13), если

$$k_\mu k^\mu = 0, \tag{10.2.2}$$

и условию (10.1.14), если справедливо соотношение

$$k_\mu e^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} k_\nu e^\mu{}_\mu. \tag{10.2.3}$$

(Опускать и поднимать индексы мы будем по-прежнему с помощью $\eta_{\mu\nu}$, так что $k^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} k_\nu$.) Матрица $e_{\mu\nu}$ с очевидностью симметрична:

$$e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}. \tag{10.2.4}$$

Будем называть ее *тензором поляризации*.

Симметричная матрица (4×4) имеет в общем случае десять независимых компонент. Однако четыре соотношения (10.2.3) уменьшают число их до шести, а из этих шести только две компоненты имеют смысл физических степеней свободы. Совершая преобразование координат $x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$, мы заменяем метрику

$\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ новой метрикой $\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$, где $h'_{\mu\nu}$ задается выражением (10.1.8). Положим, что мы выбрали $\varepsilon^{\mu}(x)$ в виде

$$\varepsilon^{\mu}(x) = i\varepsilon^{\mu} \exp(ik_{\lambda}x^{\lambda}) - i\varepsilon^{\mu *} \exp(-ik_{\lambda}x^{\lambda}). \qquad (10.2.5)$$

Тогда (10.1.8) приводит к выражению

$$h'_{\mu\nu}(x) = e'_{\mu\nu} \exp(ik_{\lambda}x^{\lambda}) + e'^{*}_{\mu\nu} \exp(-ik_{\lambda}x^{\lambda}), \qquad (10.2.6)$$

где

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + k_{\mu}\varepsilon_{\nu} + k_{\nu}\varepsilon_{\mu}. \qquad (10.2.7)$$

[Заметим, что волны по-прежнему удовлетворяют условию гармоничности координат (10.2.3).] Можно сделать вывод, что для произвольных значений четырех параметров ε_{μ} тензоры поляризации $e'_{\mu\nu}$ и $e_{\mu\nu}$ соответствуют одной и той же физической картине. Именно поэтому из шести независимых компонент, удовлетворяющих (10.2.3) и (10.2.4), только $6 - 4 = 2$ имеют физическое значение. Например, рассмотрим волны с волновым вектором

$$k^1 = k^2 = 0, \qquad k^3 = k^0 \equiv k > 0, \qquad (10.2.8)$$

распространяющиеся вдоль оси z в сторону возрастающих значений z. В этом случае (10.2.3) приводит к условиям

$$e_{31} + e_{01} = e_{32} + e_{02} = 0,$$

$$e_{33} + e_{03} = -e_{03} - e_{00} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22} + e_{33} - e_{00}).$$

Эти четыре соотношения позволяют выразить e_{i0} и e_{22} через остальные шесть компонент $e_{\mu\nu}$

$$e_{01} = -e_{31}, \qquad e_{02} = -e_{32}, \qquad e_{03} = -\frac{1}{2}(e_{33} + e_{00}),$$

$$e_{22} = -e_{11}. \qquad (10.2.9)$$

Тогда в системе координат, преобразующейся согласно (10.1.7) и (10.2.5), эти шесть независимых компонент $e_{\mu\nu}$ заменяются компонентами $e'_{\mu\nu}$ в соответствии с уравнением (10.2.7) следующим образом:

$$e'_{11} = e_{11}, \qquad e'_{12} = e_{12},$$
$$e'_{13} = e_{13} + k\varepsilon_1, \qquad e'_{23} = e_{23} + k\varepsilon_2,$$
$$e'_{33} = e_{33} + 2k\varepsilon_1, \qquad e'_{00} = e_{00} - 2k\varepsilon_0.$$

Только компоненты e_{11} и e_{12} имеют абсолютный физический смысл. Действительно, всегда можно найти преобразование координат с

$$\varepsilon_1 = -\frac{e_{13}}{k}, \qquad \varepsilon_2 = -\frac{e_{23}}{k}, \qquad \varepsilon_3 = -\frac{e_{33}}{2k}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{e_{00}}{2k},$$

которое обратит в нуль все компоненты $e'_{\mu\nu}$, кроме e'_{11}, e'_{12} и $e'_{22} = -e'_{11}$.

Различие между отдельными компонентами тензора поляризации станет ясным, если понять, как меняется $e_{\mu\nu}$ при вращении системы координат вокруг оси z, т. е. при следующем преобразовании Лоренца:

$$R_1{}^1 = \cos\theta, \qquad R_1{}^2 = \sin\theta,$$
$$R_2{}^1 = -\sin\theta, \qquad R_2{}^2 = \cos\theta, \qquad (10.2.10)$$
$$R_3{}^3 = R_0{}^0 = 1, \qquad \text{все остальные } R_\mu{}^\nu = 0.$$

Поскольку такое преобразование оставляет инвариантным k_μ (т. е. $R_\mu{}^\nu k_\nu = k_\mu$), то преобразованию подвергается только тензор $e_{\mu\nu}$, переходящий в тензор

$$e'_{\mu\nu} = R_\mu{}^\rho R_\nu{}^\sigma e_{\rho\sigma}. \qquad (10.2.11)$$

Используя соотношение (10.2.9), найдем

$$e'_\pm = \exp(\pm 2i\theta)\, e_\pm, \qquad (10.2.12)$$
$$f'_\pm = \exp(\pm i\theta)\, f_\pm, \qquad (10.2.13)$$
$$e'_{33} = e_{33}, \qquad e'_{00} = e_{00}, \qquad (10.2.14)$$

где

$$e_\pm \equiv e_{11} \mp i e_{12} = -e_{22} \mp i e_{12}, \qquad (10.2.15)$$
$$f_\pm \equiv e_{31} \mp i e_{32} = -e_{01} \pm i e_{02}. \qquad (10.2.16)$$

Будем говорить, что любая плоская волна ψ, преобразующаяся при повороте на угол θ относительно направления распространения по правилу

$$\psi' = e^{ih\theta}\psi, \qquad (10.2.17)$$

имеет *спиральность* h. Итак, видно, что гравитационную плоскую волну можно разложить на следующие компоненты: $e_\pm$, обладающие спиральностью ± 2, $f_\pm$ со спиральностью ± 1, а также e_{00} и e_{33} с нулевой спиральностью. Однако нетрудно убедиться в том, что компоненты со спиральностью 0 и ± 1 можно обратить в нуль подходящим выбором системы координат, и поэтому *физический смысл имеют лишь компоненты со спиральностью* ± 2.

Обратимся еще раз к полезной аналогии с электродинамикой. Уравнения Максвелла в лоренцевой калибровке имеют вид (2.7.12) и (2.7.13); в пустом пространстве эти уравнения приобретают вид, аналогичный уравнениям (10.1.13) и (10.1.14):

$$\Box^2 A_\alpha = 0, \qquad \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

для метрики, записанной в гармонических координатах. (Сейчас мы имеем дело с инерциальной системой координат, а потому

$\Box^2 \equiv \eta^{\alpha\beta}\partial^2/\partial x^\alpha\,\partial x^\beta$.) Так же как для уравнений (10.2.1) — (10.2.3), решение данных уравнений можно записать в виде плоской волны:

$$A_\alpha = e_\alpha \exp(ik_\beta x^\beta) + e_\alpha^* \exp(-ik_\beta x^\beta),$$

где

$$k_\alpha k^\alpha = 0,$$
$$x_\alpha e^\alpha = 0.$$

Вообще говоря, e^α имел бы четыре независимые компоненты, но условие $k_\alpha e^\alpha$ понижает число независимых компонент до трех, так же как условие (10.2.3) сводит к шести число независимых компонент $e_{\mu\nu}$. Далее, не меняя физических полей **E** и **B** и не отказываясь от лоренцевой калибровки, можно аналогично (10.1.8) и (10.2.5) изменить A_α путем калибровочного преобразования:

$$A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha},$$

$$\Phi(x) = i\varepsilon \exp(ik_\beta x^\beta) - i\varepsilon^* \exp(-ik_\beta x^\beta).$$

По аналогии с (10.2.6) и (10.2.7) новый потенциал можно также записать в виде

$$A'_\alpha = e'_\alpha \exp(ik_\beta x^\beta) + e'^*_\alpha \exp(-ik_\beta x^\beta),$$
$$e'_\alpha = e_\alpha - \varepsilon k_\alpha.$$

Параметр ε — произвольный, так что из трех алгебраически независимых компонент e_α только две (3 — 1) имеют физический смысл, точно так же как общая ковариантность оставляет физический смысл только двум из шести независимых компонент. Чтобы выделить эти две компоненты e_α, рассмотрим распространяющуюся вдоль оси z волну с вектором k^α, задаваемым соотношениями (10.2.8). Тогда из условия $k_\alpha e^\alpha = 0$ следует равенство

$$e_0 = -e_3,$$

аналогично тому как условие (10.2.3) позволяет выразить e_{22} и e_{0i} через остальные шесть компонент $e_{\mu\nu}$. Далее, рассматриваемое калибровочное преобразование оставляет инвариантным и e_1 и e_2, но заменяет e_3 на

$$e'_3 = e_3 - \varepsilon k.$$

Следовательно, выбирая $\varepsilon = e_3/k$, можно обратить e'_3 в нуль, а потому только e_1 и e_2 обладают физическим смыслом. Точно так же, только e_{11} и e_{12} нельзя обратить в нуль никаким преобразованием координат. И наконец, физический смысл рассматриваемых двух компонент можно найти, подвергая вращению (10.2.10)

плоскую электромагнитную волну. Вектор поляризации при этом изменяется следующим образом:

$$e'_\alpha = R_\alpha{}^\beta e_\beta,$$

а потому

$$e'_\pm = \exp(\pm i\theta)\, e_\pm,$$
$$e'_3 = e_3,$$

где

$$e_\pm \equiv e_1 \mp i e_2.$$

Таким образом, электромагнитные волны можно разложить на составляющие со спиральностью ± 1 и 0. Однако физический смысл есть только у компонент со спиральностью ± 1, а не 0, так же как гравитационные волны могут иметь спиральность ± 2, но не ± 1 или 0. Все это и имеется в виду, когда мы, пользуясь классическим языком, говорим, что электромагнитные и гравитационные возмущения переносятся волнами со спином 1 и 2 соответственно.

§ 3. Энергия и импульс плоских волн

Физический смысл плоско-волнового решения (10.2.1) становится сразу ясным, если вычислить энергию и импульс, переносимые волной. Согласно выражению (7.6.4), гравитационный тензор энергии-импульса с точностью до членов порядка h^2 задается следующим образом:

$$t_{\mu\nu} \approx \frac{1}{8\pi G}\left[-\frac{1}{2} h_{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}R^{(1)}_{\lambda\rho} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\lambda\rho}R^{(1)}_{\lambda\rho} + R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}R^{(2)}_{\lambda\rho}\right],$$

где $R^{(N)}_{\mu\nu}$ — член разложения тензора Риччи порядка N по $h_{\mu\nu}$. Метрика $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям Эйнштейна первого порядка $R^{(1)}_{\mu\nu} = 0$, так что в $t_{\mu\nu}$ можно опустить эти члены и использовать следующую форму:

$$t_{\mu\nu} \approx \frac{1}{8\pi G}\left[R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}R^{(2)}_{\lambda\rho}\right]. \qquad (10.3.1)$$

[В случае реальной метрики в нуль обращается $R_{\mu\nu}$, а не $R^{(1)}_{\mu\nu}$, и $t_{\mu\nu}$ определяется только членами первого порядка в выражении (7.6.4). Здесь используется тем не менее $R^{(1)}_{\mu\nu}$, а не $R_{\mu\nu}$, который равен нулю, поскольку $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям Эйнштейна первого порядка, а не точным уравнениям. Различия возникают только в порядке h^3.] Чтобы вычислить $R^{(2)}_{\mu\nu}$, надо подставить выражение (10.2.1) в (7.6.15); результат оказывается очень громоздким, но его можно упростить, усредняя $t_{\mu\nu}$ по области пространства-времени, много большей чем $|\mathbf{k}|^{-1}$.

(Это обычный способ вычисления энергии и импульса любой волны.) Усреднение обращает в нуль все члены, пропорциональные $\exp(\pm 2ik_\lambda x^\lambda)$, оставляя только перекрестные члены, не зависящие от x^μ:

$$\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle = \mathrm{Re}\,\{e^{\lambda\rho *}\,[k_\mu k_\nu e_{\lambda\rho} - k_\mu k_\lambda e_{\nu\rho} - \\ - k_\nu k_\rho e_{\mu\lambda} + k_\lambda k_\rho e_{\mu\nu}] + \left[e^\lambda{}_\rho k_\lambda - \frac{1}{2}\,e_\lambda{}^\lambda k_\rho\right]^* \times \\ \times [k_\mu e^\rho{}_\nu + k_\nu e^\rho{}_\mu - k^\rho e_{\mu\nu}] - \\ - \frac{1}{2}\,[k_\lambda e_{\rho\nu} + k_\nu e_{\rho\lambda} - k_\rho e_{\lambda\nu}]^* \times \\ \times [k^\lambda e^\rho{}_\mu + k_\mu e^{\rho\lambda} - k^\rho e^\lambda{}_\mu]\}. \qquad (10.3.2)$$

Пока еще не использованы условия (10.2.2) и (10.2.3), отвечающие гармоническим координатам. Поэтому на какое-то время откажемся от системы гармонических координат и прибавим к $h_{\mu\nu}(x)$ следующий член:

$$i\,(q_\mu \varepsilon_\nu + q_\nu \varepsilon_\mu)\exp(iq_\lambda x^\lambda) - i\,(q_\mu \varepsilon^*_\nu + q_\nu \varepsilon^*_\nu)\exp(-iq_\lambda x^\lambda), \qquad (10.3.3)$$

где $q_\mu q^\mu \neq 0$. При усреднении по пространственно-временным интервалам, много большим чем $|\,q - k\,|^{-1}$, интерференция между (10.2.1) и (10.3.3) *пропадает* и $\langle R^{(2)}_{\mu\varkappa}\rangle$ оказывается состоящим из (10.3.2) и еще одного такого же члена, в котором заменены k на q, а $e_{\mu\nu}$ на $q_\mu \varepsilon_\nu + q_\nu \varepsilon_\mu$. Однако, проверяя (10.3.2), легко видеть, что этот второй *член исчезает* и поэтому $\langle R^{(2)}_{\mu\varkappa}\rangle$, а следовательно, и $\langle t_{\mu\varkappa}\rangle$ можно без потери общности вычислить в гармонических координатах.]

Если подставить теперь в (10.3.2) условия гармонических координат (10.2.2) и (10.2.3), получим

$$\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{2}\left(e^{\lambda\rho *} e_{\lambda\rho} - \frac{1}{2}\,|\,e^\lambda{}_\lambda\,|^2\right). \qquad (10.3.4)$$

Величина $\eta^{\lambda\rho}\,\langle R^{(2)}_{\lambda\rho}\rangle$ исчезает, поскольку $k^\rho k_\rho = 0$, и, следовательно, выражение (10.3.1) приводит к усредненному тензору энергии-импульса плоской волны:

$$\langle t_{\mu\nu}\rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{16\pi G}\left(e^{\lambda\rho *} e_{\lambda\rho} - \frac{1}{2}\,|\,e^\lambda{}_\lambda\,|^2\right). \qquad (10.3.5)$$

Заметим, что «калибровочное преобразование» (10.2.7) заменяет отдельные члены в $\langle t_{\mu\varkappa}\rangle$ на следующие:

$$e'^{\lambda\rho *} e'_{\lambda\rho} = e^{\lambda\rho *} e_{\lambda\rho} + 2\mathrm{Re}\,\varepsilon^*_\rho k^\rho e^\lambda{}_\lambda + 2\,|\,\varepsilon_\rho k^\rho\,|^2,$$

$$e'^\lambda{}_\lambda = e^\lambda{}_\lambda + 2k^\lambda \varepsilon_\lambda,$$

однако $\langle t_{\mu\varkappa}\rangle$ — величина калибровочно-инвариантная! Таким образом, коль скоро энергия и импульс связаны между собой, поляризации $e_{\mu\nu}$ и $e_{\mu\nu} + k_\mu \varepsilon_\nu + k_\nu \varepsilon_\mu$ соответствуют одной и той же

физической волне и, следовательно, существует не шесть, а только два физически оправданных значения поляризационных параметров. В частности, распространяющаяся вдоль оси z волна, волновой вектор и тензор поляризации которой задаются соотношениями (10.2.8) и (10.2.9), имеет следующий тензор энергии-импульса:

$$\langle t_{\mu\nu}\rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{8\pi G}\left(|e_{11}|^2+|e_{12}|^2\right), \tag{10.3.6}$$

который через спиральные амплитуды (10.2.15) записывается так:

$$\langle t_{\mu\nu}\rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{16\pi G}\left(|e_+|^2+|e_-|^2\right). \tag{10.3.7}$$

§ 4. Возбуждение гравитационных волн

Вычислим энергию, отдаваемую системой в виде гравитационного излучения. Представим тензор энергии-импульса системы в виде интеграла Фурье:

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty d\omega T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega)\, e^{i\omega t} + \text{к. с.}, \tag{10.4.1}$$

либо в виде суммы фурье-компонент:

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \sum_\omega e^{-i\omega t} T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega) + \text{к. с.} \tag{10.4.2}$$

(Здесь символ «+к. с.» означает «плюс комплексно-сопряженное выражение».) Произведем сперва вычисления для одной фурье-компоненты:

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega)\, e^{-i\omega t} + \text{к. с.}, \tag{10.4.3}$$

а затем вернемся к более общей системе, описываемой соотношениями (10.4.1) и (10.4.2).

Из (10.1.11) следует, что поле, излучаемое источником (10.4.3), имеет вид

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = 4G\int \frac{d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} S_{\mu\nu}(\mathbf{x}') \exp\{-i\omega t + i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\} + \text{к. с.}, \tag{10.4.4}$$

где

$$S_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega) \equiv T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda(\mathbf{x}, \omega). \tag{10.4.5}$$

Предположим, что мы исследуем излучение, находясь в волновой зоне, т. е. на расстоянии $r \equiv |\mathbf{x}|$ от источника, много большем, чем размер $R = |\mathbf{x}'|_{\text{макс}}$ источника, и, кроме того, величина r

намного больше, чем ωR^2 и $1/\omega$. Тогда знаменатель $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ в (10.4.4) можно заменить на r, а в экспоненте написать приближенно

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \approx r - \mathbf{x}'\cdot\hat{\mathbf{x}}, \qquad \hat{\mathbf{x}} \equiv \frac{\mathbf{x}}{r}.$$

Тогда поле примет вид

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \frac{4G}{r}\exp(i\omega r - i\omega t)\int d^3\mathbf{x}' S_{\mu\nu}(\mathbf{x}', \omega)\, e^{-i\omega\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}'} + \text{к. с.} \quad (10.4.6)$$

Поскольку по предположению $r\omega$ — величина большая, то выражение (10.4.6) выглядит как плоская волна:

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = e_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega)\exp(ik_\mu x^\mu) + \text{к. с.} \quad (10.4.7)$$

с «волновым вектором» и «тензором поляризации», задаваемыми в виде

$$\mathbf{k} = \omega\hat{\mathbf{x}}, \qquad k^0 \equiv \omega, \quad (10.4.8)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega) \equiv \frac{4G}{r}\int d^3\mathbf{x}' S_{\mu\nu}(\mathbf{x}', \omega)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}. \quad (10.4.9)$$

Удобнее выразить явно $e_{\mu\nu}$ через фурье-образ тензора $T_{\mu\nu}$:

$$e_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{4G}{r}\left[T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda(\mathbf{k}, \omega)\right], \quad (10.4.10)$$

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) \equiv \int d^3\mathbf{x}' T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', \omega)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}. \quad (10.4.11)$$

Закон сохранения для $T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Применяя его к (10.4.3), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^i}T^i{}_\nu(\mathbf{x}, \omega) - i\omega T^0{}_\nu(\mathbf{x}, \omega) = 0.$$

Умножая последнее выражение на $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ и интегрируя по $\mathbf{x}$, находим, что $T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)$ подчиняется следующему алгебраическому соотношению:

$$k_\mu T^\mu{}_\nu(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (10.4.12)$$

где вектор k^μ задается выражением (10.4.8). Отметим попутно, что (10.4.10) подчиняется условию гармоничности координат (10.2.3).

Вычислим приходящуюся на единицу телесного угла мощность излучения, испускаемого в направлении $\hat{x}$. Поскольку $r \gg 1/\omega$, то в качестве вектора потока энергии можно принять величину $\langle t^{i0}\rangle$, усредненную по области пространства-времени, много большей чем $1/\omega$. Тогда мощность излучения на единицу телесного угла

равна

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \hat{x}^i \langle t^{i0} \rangle.$$

Используя для $\langle t^{\mu\nu} \rangle$ выражение (10.3.5), получаем

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{r^2 (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}})\, k^0}{16\pi G} \left[e^{\lambda\nu *}(\mathbf{x}, \omega)\, e_{\lambda\nu}(\mathbf{x}, \omega) - \frac{1}{2} |\, e^{\lambda}{}_{\lambda}(\mathbf{x}, \omega) \,|^2 \right],$$

а подставляя сюда выражения (10.4.8) и (10.4.10) для k^μ и $e_{\lambda\nu}$ соответственно, видим, что множитель r^2 сокращается и окончательное выражение выглядит так:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^2}{\pi} \left[T^{\lambda\nu *}(\mathbf{k}, \omega)\, T_{\lambda\nu}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{1}{2} |\, T^{\lambda}{}_{\lambda}(\mathbf{k}, \omega) \,|^2 \right]. \quad (10.4.13)$$

Мы решили задачу, раз вычислили фурье-образ (10.4.11).

Удобно выразить (10.4.13) через чисто пространственно-подобные компоненты $T^{\lambda\nu}(\mathbf{k}, \omega)$. Из (10.4.12) следует

$$T_{0i}(\mathbf{k}, \omega) = -\hat{k}^j T_{ji}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$T_{00}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{k}^i \hat{k}^j T_{ji}(\mathbf{k}, \omega),$$

где $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/\omega \equiv \hat{\mathbf{x}}$. Подстановка этих выражений в (10.4.13) дает

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^2}{\pi} \Lambda_{ij,\, lm}(\hat{\mathbf{k}})\, T^{ij *}(\mathbf{k}, \omega)\, T^{lm}(\mathbf{k}, \omega), \quad (10.4.14)$$

где

$$\Lambda_{ij,\, lm}(\hat{\mathbf{k}}) \equiv \delta_{il}\delta_{jm} - 2\hat{k}_j\hat{k}_m\delta_{il} + \\ + \frac{1}{2}\hat{k}_i\hat{k}_j\hat{k}_l\hat{k}_m - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{lm} + \frac{1}{2}\delta_{ij}\hat{k}_l\hat{k}_m + \frac{1}{2}\delta_{lm}\hat{k}_i\hat{k}_j. \quad (10.4.15)$$

Если тензор энергии-импульса есть *сумма* типа (10.4.2) отдельных фурье-компонент, то поле $h_{\mu\nu}$ можно представить в волновой зоне как сумму плоских волн (10.4.7). Тогда гравитационный тензор энергии-импульса будет задаваться в виде двойной суммы по этим фурье-компонентам, однако при усреднении по временному интервалу, намного превосходящему наибольший период биений (т. е. обратную величину наименьшей разности частот), перекрестные члены исчезают. В этом случае энергия будет иметь вид суммы членов, подобных (10.4.14), по одному на каждую частоту источника.

Если же тензор энергии-импульса есть *интеграл* Фурье, то поле $h_{\mu\nu}$ представляется в волновой зоне в виде интеграла по ω от отдельных плоских волн (10.4.7), а гравитационный тензор энергии-импульса будет записываться тогда как двойной интеграл $\int\int d\omega\, d\omega'$ от произведения этих членов. Подынтегральное выражение содержит зависящую от времени экспоненту $\exp(-i(\omega - \omega')t)$, однако здесь уже нет никакого «наибольшего

периода биений», и поэтому мы не станем вычислять среднюю мощность, а подсчитаем полную излучаемую энергию. Эта величина определяется как интеграл от мощности по всему временному интервалу, и в результате множители $e^{-i\omega t}e^{i\omega' t}$ в двойном интеграле для мощности заменяются величиной

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i(\omega-\omega')t\right) dt = 2\pi\delta(\omega-\omega').$$

Таким образом, энергия, излучаемая в единичный телесный угол, ориентированный вдоль $\mathbf{k}$, выражается в виде однократного интеграла:

$$\frac{dE}{d\Omega} = 2G\int_0^{\infty} \omega^2 \left[T^{\lambda\nu *}(\mathbf{k},\omega)\,T_{\lambda\nu}(\mathbf{k},\omega) - \frac{1}{2}\,|\,T^{\lambda}{}_{\lambda}(\mathbf{k},\omega)\,|^2\right] d\omega, \quad (10.4.16)$$

который можно следующим образом записать через пространственно-пространственные компоненты:

$$\frac{dE}{d\Omega} = 2G\Lambda_{ij,\,lm}(\hat{\mathbf{k}})\int_0^{\infty} \omega^2 T^{ij*}(\mathbf{k},\omega)\,T^{lm}(\mathbf{k},\omega)\,d\omega.$$

В качестве примера рассмотрим систему n свободных частиц, которые, первоначально двигаясь с постоянной скоростью $\mathbf{v}_n$, сталкиваются в момент времени $t = 0$ в начале координат, а затем вновь разлетаются, теперь уже со скоростями $\tilde{\mathbf{v}}_n$. В этом случае тензор энергии-импульса задается следующим образом:

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x},t) = \sum_n \frac{P_n{}^{\mu}P_n{}^{\nu}}{E_n}\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{v}_n t)\,\theta(-t) + \\ + \sum_n \frac{\tilde{P}_n{}^{\mu}\tilde{P}_n{}^{\nu}}{\tilde{E}_n}\,\delta^3(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{v}}_n t)\,\theta(t), \quad (10.4.17)$$

где $P_n{}^0 = E_n = m_n(1-\mathbf{v}_n{}^2)^{-1/2}$ и $\mathbf{P}_n = E_n\mathbf{v}_n$ — энергия и импульс n-й налетающей частицы, $\tilde{P}_n{}^0 = \tilde{E}_n$ и $\tilde{\mathbf{P}}_n$ — аналогичные величины для рассеянных частиц, а θ — функция ступеньки:

$$\theta(s) = \begin{cases} +1, & s>0, \\ 0, & s<0. \end{cases} \quad (10.4.18)$$

Функции θ и δ^3 имеют, как известно, следующие интегральные представления:

$$\theta(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{+i\omega s}}{\omega - i\varepsilon}\,d\omega, \quad \varepsilon\to 0+, \quad (10.4.19)$$

$$\delta^3(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (10.4.20)$$

[Отметим, что для доказательства (10.4.19) контур интегрирования можно замкнуть большим полукругом в нижней или верхней полуплоскости в зависимости от того, будет ли $s < 0$ или $s > 0$. Чтобы доказать (10.4.20), необходимо просто взять фурье-образ от обеих частей.] Отсюда видно, что $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ (10.4.1) имеет следующий вид:

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\left[\sum_n \frac{P_n{}^\mu P_n{}^\nu}{E_n}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega - \mathbf{v}_n\cdot\mathbf{k} - i\varepsilon} - \right.$$
$$\left. - \sum_n \frac{\widetilde{P}_n{}^\mu \widetilde{P}_n{}^\nu}{\widetilde{E}_n}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega - \widetilde{\mathbf{v}}_n\cdot\mathbf{k} + i\varepsilon}\right],$$

а фурье-образ (10.4.11) выглядит так:

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_n \frac{P_n{}^\mu P_n{}^\nu}{E_n(\omega - \mathbf{v}_n\cdot\mathbf{k} - i\varepsilon)} - \sum_n \frac{\widetilde{P}_n{}^\mu \widetilde{P}_n{}^\nu}{\widetilde{E}_n(\omega - \widetilde{\mathbf{v}}_n\cdot\mathbf{k} + i\varepsilon}\right].$$

Если $\omega = |\mathbf{k}|$ и $|\mathbf{v}_n| < 1$, то величина $\omega - \mathbf{v}_n\cdot\mathbf{k}$ в знаменателе не может обратиться в нуль и член $\pm i\varepsilon$ можно опустить. (Случай частиц, движущихся со скоростью света, будет рассматриваться ниже.) Далее, учитывая, что $E_n(\mathbf{v}_n\cdot\mathbf{k} - \omega) = p_n{}^\lambda k_\lambda \equiv (P_n\cdot k)$, можно записать $T^{\mu\nu}$ в виде

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi i}\sum_N \frac{P_N{}^\mu P_N{}^\nu \eta_N}{(P_N\cdot k)}. \qquad (10.4.21)$$

Здесь N пробегает по всем номерам частиц как в начальном, так и в конечном состояниях, а знаковый множитель η_N определяется так:

$$\eta_N = \begin{cases} +1, & N \text{ в конечном состоянии,} \\ -1, & N \text{ в начальном состоянии.} \end{cases}$$

Отметим, что (10.4.12) будет выполняться, поскольку

$$k_\nu T^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi i}\sum_N P_N{}^\mu \eta_N,$$

а это обращается в нуль, так как $\sum_N P_N{}^\mu \eta_N$ есть просто разность начального и конечного полных импульсов.

Приходящаяся на единицу телесного угла и на единицу интервала частот гравитационная энергия, излучаемая в направлении $\hat{\mathbf{k}}$ на частоте ω, выражается с помощью соотношения (10.4.16) в следующем виде:

$$\left(\frac{dE}{d\Omega\, d\omega}\right) = \frac{G\omega^2}{2\pi^2}\sum_{N,M}\frac{\eta_N\eta_M}{(P_N\cdot k)(P_M\cdot k)}\times$$
$$\times\left[(P_N\cdot P_M)^2 - \frac{1}{2}m_N{}^2 m_M{}^2\right]. \qquad (10.4.22)$$

Попытка вычислить полную излучаемую энергию, интегрируя выражение (10.4.22) по ω от 0 до ∞, приведет к результату, расходящемуся как $\int^{\infty} d\omega$. Это обусловливается принятым приближением, согласно которому столкновения происходят мгновенно; в действительности же они происходят за время Δt, и поэтому интеграл по ω обрезается при значениях ω порядка $1/\Delta t$.

Заметим, что если при столкновениях ни один из импульсов $P_N{}^{\mu}$ не меняется, вклады от падающих и разлетающихся частиц в выражении (10.4.21) сокращаются и тензор $T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)$ обращается в нуль. Гравитационные волны излучаются только тогда, когда частицы действительно ускоряются.

Легко видеть, что выражение (10.4.22) становится бесконечным, если одна из частиц, участвующих в реакции (скажем, с $N = 1$), имеет нулевую массу и импульс, параллельный вектору $\mathbf{k}$, поскольку тогда $P_1 \cdot k = E_1\omega\,(\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}} - 1) \to 0$. Однако эта сингулярность только кажущаяся, поскольку, когда $\mathbf{P}_1$ становится параллельным $\mathbf{k}$, можно считать, что для всех $M \neq 1$ величина $(P_1 \cdot P_M)$ в (10.4.22) пропорциональна $(k \cdot P_M)$, и поэтому сингулярная часть принимает вид

$$\frac{G\omega^2}{\pi^2}\frac{\eta_1}{(P_1\cdot k)}\sum_{M\neq 1}\frac{\eta_M}{(P_M\cdot k)}(P_1\cdot P_M)^2 \sim \sum_{M\neq 1}\eta_M (P_1\cdot P_M).$$

Мы уже отмечали, что величина $\sum_M \eta_M P_M{}^{\mu}$ обращается в нуль, если суммировать по всем частицам; поэтому правая часть есть просто $-\eta_1 P_1{}^2$, а эта величина в свою очередь равна нулю, так как по предположению частица 1 имеет нулевую массу. Таким образом, применение выражения (10.4.22) к столкновению фотонов, нейтронов или даже, забегая немного вперед, гравитонов не встречает затруднений.

Полную излучаемую при столкновениях гравитационную энергию, приходящуюся на единицу частоты, можно получить, интегрируя выражение (10.4.22) по направлению вектора $\hat{\mathbf{k}}$. Получаем следующий результат:

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{G}{2\pi}\sum_{NM}\eta_N\eta_M m_N m_M \frac{1+\beta_{NM}^2}{\beta_{NM}(1-\beta_{NM}^2)^{1/2}}\ln\left(\frac{1+\beta_{NM}}{1-\beta_{NM}}\right), \quad (10.4.23)$$

где β_{NM} — относительная скорость частиц N и M — записывается так:

$$\beta_{NM} \equiv \left[1 - \frac{m_N^2 m_M^2}{(P_N\cdot P_M)^2}\right]^{1/2}.$$

Для нерелятивистского двухчастичного упругого рассеяния формула (10.4.23) принимает следующий вид:

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{8G}{5\pi}\mu^2 v^4 \sin^2\theta, \quad (10.4.24)$$

где μ — приведенная масса, v — относительная скорость, θ — угол рассеяния в системе центра масс.

Гравитационное излучение, порожденное столкновениями, происходящими в газе, можно вычислить, суммируя радиационную энергию отдельных столкновений, задаваемую уравнениями (10.4.23) или (10.4.24), если столкновения достаточно разделены во времени, чтобы не было интерференции между отдельными актами. Условие отсутствия интерференции можно записать так:

$$\omega \gg \omega_c, \tag{10.4.25}$$

где ω_c есть частота тепловых столкновений частиц газа. (Если $\omega \ll \omega_c$, то газ ведет себя как жидкость, а не как совокупность независимых частиц.) Если выполняется (10.4.25), мощность, приходящаяся на единицу объема и частоты, равна

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{8G}{5\pi} \sum_{(a,\,b)} \mu_{ab}^2 n_a n_b \left\langle v_{ab}^5 \int \frac{d\sigma_{ab}}{d\Omega} \sin^2\theta \, d\Omega \right\rangle, \tag{10.4.26}$$

где n_a есть плотность числа частиц типа a в газе, $d\sigma_{ab}/d\Omega$ — дифференциальное сечение рассеяния в системе центра масс; суммирование идет по всем типам пар частиц, а усреднение $\langle \ldots. \rangle$ проводится по всем столкновениям.

Для примера вычислим гравитационное излучение, возникающее при кулоновских столкновениях в плазме. Резерфордовское сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma_{ab}}{d\Omega} = \frac{e_a^2 e_b^2}{4 v_{ab}^4 \mu_{ab}^2 \sin^4(\theta/2)}. \tag{10.4.27}$$

Интеграл по θ должен быть обрезан снизу минимальным значением угла $1/\Lambda$, где $\Lambda \gg 1$ определяется дебаевской экранировкой кулоновских сил при больших параметрах столкновений. В этом случае имеем

$$\int \frac{d\sigma_{ab}}{d\Omega} \sin^2\theta \, d\Omega \approx \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 \ln \Lambda}{\mu_{ab}^2 v_{ab}^4}. \tag{10.4.28}$$

Вышло среднее значение v_{ab}, которое для распределения Максвелла — Больцмана равно

$$\langle v_{ab} \rangle = 2 \left(\frac{2kT}{\pi \mu_{ab}} \right)^{1/2}. \tag{10.4.29}$$

Подставив (10.4.28) и (10.4.29) в (10.4.26), получим (в системе СГС) мощность излучения на единицу объема и частоты:

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{64G}{5c^5} \left(\frac{2kT}{\pi} \right)^{1/2} \ln \Lambda \sum_{(a,\,b)} \frac{n_a n_b e_a^2 e_b^2}{\sqrt{\mu_{ab}}}. \tag{10.4.30}$$

Обычно $\ln \Lambda$ есть величина порядка 10. Для полностью ионизированной плазмы водорода необходимо учесть электрон-электрон-

ные и электрон-протонные столкновения, и тогда (10.4.30) дает

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{64Gn_e^2e^4}{5c^5}\left(\frac{2kT}{\pi m_e}\right)^{1/2}(1+\sqrt{2})\ln\Lambda. \qquad (10.4.31)$$

Частоту электронных столкновений можно в этом случае оценить следующим образом:

$$\omega_c \approx \frac{e^4 n_e \langle v\rangle}{(kT)^2} \approx \frac{e^4 n_e}{(kT)^{3/2}\sqrt{m_e}}. \qquad (10.4.32)$$

Уравнения (10.4.30) и (10.4.31) справедливы, если $\omega \gg \omega_c$ и и $\hbar\omega \ll kT$.

Эти результаты можно применить к водородной плазме в ядре Солнца. Внутри объема $2\cdot10^{31}$ см^3 эта плазма характеризуется следующими параметрами: $T \approx 10^7$ К, $n_e \approx 3\cdot10^{25}$ см$^{-3}$ и $\Lambda \approx$ ≈ 4. Частота столкновений, определяемая (10.4.32), равна 10^{15} с$^{-1}$, что на три порядка меньше, чем тепловая частота $kT/\hbar \approx$ $\approx 10^{18}$ с$^{-1}$. Поэтому полную энергию гравитационного излучения можно оценить, умножая (10.4.31) на $VkT/\hbar$. Поступая таким образом, найдем, что тепловые столкновения в ядре Солнца порождают гравитационное излучение мощностью около 10^8 Вт.

§ 5. Квадрупольное излучение

До сих пор мы не делали никаких приближений, кроме того, основного, что поля слабые. (Использованные нами приближения волновой зоны $r \gg R$, $r \gg 1/\omega$, $r \gg \omega R^2$ существенными не были, поскольку мы всегда выбирали достаточно большие r и эти ограничения выполнялись автоматически. Далее, так как энергия сохраняется, то интенсивность излучения, пронизывающего сферу большого радиуса r, равна интенсивности излучения через любую замкнутую поверхность, ограничивающую излучающую систему.) Теперь сделаем еще одно приближение, предположив, что радиус источника R много меньше, чем длина волны $1/\omega$:

$$\omega R \ll 1. \qquad (10.5.1)$$

Большая часть радиации излучается на частотах порядка $\bar{v}/R$, где $\bar{v}$ — некоторая характерная скорость внутри системы, так что в действительности мы ввели приближение того же типа, что и приближение $\bar{v} \ll 1$, сделанное в предыдущей главе.

Если справедливо условие (10.5.1), то фурье-образы, содержащиеся в соотношениях (10.4.14) и (10.4.16), можно приближенно представить в виде не зависящего от $\mathbf{k}$ интеграла:

$$T_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \approx \int d^3x T_{ij}(\mathbf{x}, \omega). \qquad (10.5.2)$$

Использовав законы сохранения, перепишем это выражение в форме

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}\,T^{ij}(\mathbf{x},\ \omega) = -\omega^2 T^{00}(\mathbf{x},\ \omega).$$

Умножив последнее на $x^i x^j$ и интегрируя по $\mathbf{x}$, находим

$$T_{ij}(\mathbf{k},\ \omega) \approx -\frac{\omega^2}{2}\,D_{ij}(\omega), \tag{10.5.3}$$

$$D_{ij}(\omega) \equiv \int d^3x x^i x^j T^{00}(x,\ \omega). \tag{10.5.4}$$

Следовательно, мощность излучения в единичный телесный угол равна

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^6}{4\pi}\,\Lambda_{ij,\,lm}(\hat{k})\,D^*_{ij}(\omega)\,D_{lm}(\omega). \tag{10.5.5}$$

Если источник можно описать суммой фурье-компонент, то мощность излучения есть сумма членов типа (10.5.5). Если же источник представляется интегралом Фурье вида (10.4.1), то энергия, излучаемая в единицу телесного угла, равна

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{1}{2}\,G\Lambda_{ij,\,lm}(\hat{k})\int\limits_0^\infty \omega^6 D^*_{ij}(\omega)\,D_{lm}(\omega)\,d\omega. \tag{10.5.6}$$

Коэффициенты $D_{ij}(\omega)$ в (10.5.5) и (10.5.6) не зависят от направления излучения $\hat{k}$, поэтому можно раз и навсегда проинтегрировать по телесному углу. Используем следующие формулы:

$$\int d\Omega \hat{k}_i \hat{k}_j = \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij},$$

$$\int d\Omega \hat{k}_i \hat{k}_j \hat{k}_l \hat{k}_m = \frac{4\pi}{15}\,(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}).$$

(Вид правой части обусловлен симметрией и инвариантностью относительно вращения; численные коэффициенты можно вычислить, сворачивая i с j, а l с m.) Тогда находим

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,\,lm}(\hat{k}) = \frac{2\pi}{15}\,[11\delta_{il}\delta_{jm} - 4\delta_{ij}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}],$$

и мощность излучения с некоторой дискретной частотой ω равна

$$P = \frac{2G\omega^6}{5}\left[D^*_{ij}(\omega)\,D_{ij}(\omega) - \frac{1}{3}\,|D_{ii}(\omega)|^2\right], \tag{10.5.7}$$

а при непрерывном распределении частот полная излучаемая энергия запишется в виде

$$E = \frac{4\pi G}{5}\int\limits_0^\infty \omega^6\left[D^*_{ij}(\omega)\,D_{ij}(\omega) - \frac{1}{3}\,|D_{ii}(\omega)|^2\right]d\omega. \tag{10.5.8}$$

Прежде чем перейти к вычислению квадрупольного излучения, рождающегося в некоторых особых случаях, необходимо сделать несколько замечаний о методе вычислений.

А. Квадрупольное приближение применяют обычно к нерелятивистским системам, а для таких систем плотность энергии $T^{00}(\mathbf{x}, \omega)$ приближенно равна плотности массы покоя этой системы. Возможно, покажется неожиданным, что нет никакой необходимости явно учитывать в полном тензоре $T^{\mu\nu}$ члены с потенциальной и кинетической энергией, хотя если считать тензор $T^{\mu\nu}$ сохраняющимся, то эти члены необходимо включить. Действительно, для системы частиц, связанных гравитационными силами, необходимо в принципе выбирать $T^{\mu\nu}$ как полный «тензор» $\tau^{\mu\nu}$, построенный в § 6 гл. 7 и содержащий члены, нелинейные по полю. Однако, поскольку мы уже использовали при выводе уравнений (10.5.3) — (10.5.6) условия сохранения энергии и импульса и это дало результат, содержащий только T^{00}, можно аппроксимировать T^{00} плотностью массы покоя.

Б. Для произвольных систем колеблющихся и (или) вращающихся твердых тел часто очень трудно вычислить фурье-образ тензора $T^{00}(\mathbf{x}, \omega)$, определяемый соотношениями (10.4.1) или (10.4.2). Намного легче вычислить сначала моменты

$$D_{ij}(t) \equiv \int d^3x x^i x^j T^{00}(\mathbf{x}, t), \tag{10.5.9}$$

а затем $D_{ij}(\omega)$, записывая $D_{ij}(t)$ в виде интеграла Фурье

$$D_{ij}(t) = \int_0^\infty d\omega\, D_{ij}(\omega)\, e^{-i\omega t} + \text{к. с.} \tag{10.5.10}$$

или в виде суммы компонент Фурье

$$D_{ij}(t) = \sum_\omega e^{-i\omega t} D_{ij}(\omega) + \text{к. с.} \tag{10.5.11}$$

В. Может возникнуть вопрос: что принять за начало координат x^i в интеграле (10.5.4) для D_{ij}? В принципе это не существенно. При смещении начала координат на величину a_i, мы заменяем тензор D_{ij} следующим тензором:

$$\int (x^i - a^i)(x_j - a_j)\, T^{00}(\mathbf{x}, t)\, d^3x =$$

$$= \int x^i x^j T^{00}(\mathbf{x}, t)\, d^3x - a^i \int x^j T^{00}(\mathbf{x}, t)\, d^3x -$$

$$- a^j \int x^i T^{00}(\mathbf{x}, t)\, d^3x + a^i a^j \int T^{00}(\mathbf{x}, t)\, d^3x.$$

Но законы сохранения энергии и импульса требуют, чтобы последние три члена этого выражения были самое большее линейными

функциями времени, потому что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}(x,\ t)\,d^3x = -\int \frac{\partial}{\partial x^i} T^{i0}(x,\ t)\,d^3x = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int x^i T^{00}(x,\ t)\,d^3x = \int x^i \frac{\partial^2}{\partial x^j\,\partial x^k} T^{jk}(x,\ t)\,d^3x =$$

$$= -\int \frac{\partial}{\partial x^j} T^{ij}(x,\ t)\,d^3x = 0.$$

Таким образом, смещение начала координат не приводит к изменению фурье-компонент с $\omega \neq 0$, т. е.

$$D_{ij}(\omega) \equiv \int x^i x^j T^{00}(\mathbf{x},\ \omega)\,d^3x =$$

$$= \int (x^i - a^i)(x^j - a^j)\,T^{00}(\mathbf{x},\ \omega)\,d^3x. \qquad (10.5.12)$$

Однако только тогда, когда T^{00} — плотность энергии всей системы, при вычислении $D_{ij}(\omega)$ можно свободно смещать начало координат.

Вычислим в качестве первого примера гравитационное излучение, порождаемое звуковыми волнами, распространяющимися в трубе, вытянутой вдоль оси z. Плотность колеблющегося вещества запишем так:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1.$$

Здесь ρ_0 — постоянная невозмущенная величина, а ρ_1 — малое возмущение. Скорость вещества v (в направлении z) будем рассматривать также как малое возмущение и, кроме того, пренебрежем диссипативными эффектами. Тогда уравнения движения примут вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + v_s^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = 0,$$

где v_s — скорость звука. Труба не поддерживается на концах (иначе нам необходимо было бы учитывать и гравитационное излучение от опоры!), поэтому давление $v_s^2\rho_1$ на концах трубы обращается в нуль. При таких граничных условиях общее решение уравнений для трубы, занимающей вдоль оси z отрезок от $z = 0$ до $z = L$, есть суперпозиция нормальных колебаний

$$v = -\varepsilon v_s \cos kz \sin(\omega t + \varphi), \qquad (10.5.13)$$

$$\rho_1 = \varepsilon \rho_0 \sin kz \cos(\omega t + \varphi), \qquad (10.5.14)$$

где ε — малое безразмерное число, ϕ — произвольная фаза, а k и ω равны

$$k = N\frac{\pi}{L}, \qquad \omega = N\pi\frac{v_s}{L}, \tag{10.5.15}$$

где N — любое положительное целое число. Так как на концах трубы v не обязательно обращается в нуль, то концы могут в общем случае смещаться на величины $\delta(0, t)$ и $\delta(L, t)$, определяемые формулой

$$\delta(z, t) \equiv \int v(z, t)\,dt = \varepsilon v_s \omega^{-1} \cos kz \cos(\omega t + \phi).$$

Зависящая от времени часть второго момента плотности массы задается в виде

$$D_{ij}(t) = n_i n_j A\left(\int_0^L \rho_1(z\ \ t)\, z^2\, dz + L^2\rho_0\delta(L, t)\right),$$

где A — площадь поперечного сечения трубы, а $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ — единичный вектор в направлении z. Для четных N величина $D_{ij}(t)$ равна нулю, а для нечетных N она равняется

$$D_{ij}(t) = -\left(\frac{4n_i n_j ML^2\varepsilon}{N^3\pi^3}\right)\cos(\omega t + \phi),$$

где $M \equiv \rho_0 AL$ — масса трубы [легко убедиться, что второй момент от распределения массы $D_{ij}(t)$ останется тем же, если при его вычислении начало координат выбрать не в точке $z = 0$]. Сравнивая это выражение с (10.5.11), видим, что $D_{ij}(t)$ имеет фурье-компоненту, равную

$$D_{ij}\left(N\pi\frac{v_s}{L}\right) = -\frac{2n_i n_j ML^2\varepsilon}{N^3\pi^3}. \tag{10.5.16}$$

Таким образом, вычисленная по формуле (10.5.7) излучаемая мощность для любого нечетного N (в единицах СГС) равна

$$P = \frac{16GM^2 v_s^6 \varepsilon^2}{15L^2c^5}. \tag{10.5.17}$$

В моменты времени, когда ρ_1 исчезает, т. е. когда v принимает наибольшие значения, этот результат можно сравнить с полной энергией осцилляций, которая в этом случае есть просто кинетическая энергия

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 A\int_0^L v^2_{\text{макс}}(z)\,dz = \frac{1}{4}Mv_s^2\varepsilon^2.$$

Очевидно, что из-за излучения гравитационных волн осциллятор теряет энергию со скоростью

$$\Gamma_{\text{грав}} \equiv \frac{P}{E} = \frac{64GMv_s^4}{15L^2c^5}. \tag{10.5.18}$$

Вычислим, например, интенсивность гравитационного излучения из-за акустических осцилляций в большом алюминиевом цилиндре, использованном как антенна в эксперименте Вебера по детектированию гравитационного излучения [1, 26, 27]. (Как мы увидим ниже, эффективное поперечное сечение такой антенны определяется величиной $\Gamma_{\text{грав}}$.) Цилиндр Вебера имел параметры:

$$L = 153 \text{ см}, \qquad v_s = 5{,}1 \cdot 10^5 \text{ см/с}, \qquad M = 1{,}4 \cdot 10^6 \text{ г}.$$

Следовательно, если единственный механизм потерь есть гравитационное излучение, то при нечетном N осцилляции (10.5.13) и (10.5.14) приведут к следующей скорости потери энергии:

$$\Gamma_{\text{грав}} = 4{,}7 \cdot 10^{-35} \text{ с}^{-1}. \tag{10.5.19}$$

В действительности реальная скорость распада моды с $N = 1$ в этом цилиндре составляет около 0,15 с^{-1} и в основном обусловливается вязкой диссипацией, происходящей в алюминии. Следовательно, относительная вероятность гравитационного излучения имеет следующий порядок:

$$\eta \equiv \frac{\Gamma_{\text{грав}}}{\Gamma} \approx 3 \cdot 10^{-34} \qquad N = 1 \tag{10.5.20}$$

Таким образом, любой обычный механизм осцилляций всегда будет приводить к гораздо большему количеству энергии, выделяемой в виде теплоты, чем в виде гравитационного излучения.

Рассмотрим другой пример. Вычислим мощность излучения, испускаемого вращающимся телом. Если тело жестко вращается вокруг 3-оси с угловой частотой T, то плотность массы T^{00} имеет вид

$$T^{00}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}')$$

где $\rho(\mathbf{x}')$ — плотность массы, зависящая от координат $\mathbf{x}'$ системы, связанной с телом:

$$x_1 \equiv x_1' \cos \Omega t - x_2' \sin \Omega t,$$
$$x_2 \equiv x_1' \sin \Omega t + x_2' \cos \Omega t,$$
$$x_3 \equiv x_3'.$$

Следовательно, заменяя в (10.5.9) координаты, можно выразить $D_{ij}(t)$ через тензор момента инерции, записанный в координатах $\mathbf{x}'$, связанных с телом:

$$I_{ij} \equiv \int d^3x' x_i' x_j' \rho(\mathbf{x}'). \tag{10.5.21}$$

Для простоты рассмотрим вращение вокруг одной из главных осей эллипсоида инерции, так что $I_{13} = I_{23} = 0$, а оси x_1' и x_2' выберем вдоль других главных осей, так чтобы $I_{12} = 0$. Поскольку

I_{ij} диагонален, имеем

$$D_{11}(t) = \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22}) + \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22})\cos 2\Omega t,$$

$$D_{12}(t) = \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22})\sin 2\Omega t,$$

$$D_{22}(t) = \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22}) - \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22})\cos 2\Omega t,$$

$$D_{13}(t) = D_{23}(t) = 0,$$

$$D_{33}(t) = I_{33}.$$

Тогда в выражении (10.5.11) неисчезающие коэффициенты Фурье для $\omega = 2\Omega$ имеют вид

$$D_{11}(2\Omega) = -D_{22}(2\Omega) = iD_{12}(2\Omega) = \frac{1}{4}(I_{11} - I_{22}).$$

Согласно формуле (10.5.7), при удвоенной частоте вращения полная излучаемая мощность (в единицах СГС) равна

$$P(2\Omega) = \frac{32G\Omega^6 I^2 e^2}{5c^5}, \tag{10.5.22}$$

где I — момент инерции и e — сплюснутость:

$$I \equiv I_{11} + I_{22}, \tag{10.5.23}$$

$$e \equiv \frac{I_{11} - I_{22}}{I}. \tag{10.5.24}$$

Для тел, обладающих круговой симметрией относительно оси вращения, $e = 0$ и, следовательно, гравитационное излучение отсутствует. (В действительности этот вывод не связан с квадрупольным приближением, так как хотя рассматриваемое тело и вращается, оно имеет не зависящий от времени тензор энергии-импульса.) Для точечной массы m, фиксированной в точке $x_1' = r$, $x_2' = x_3' = 0$ во *вращающейся* системе координат, единственным отличным от нуля элементом I_{ij} будет $I_{11} = mr^2$; поэтому $I = mr^2$, $e = 1$ и соотношение (10.5.23) приводит к следующей формуле для мощности излучения:

$$P(2\Omega) = \frac{32G\Omega^6 m^2 r^4}{5c^5}. \tag{10.5.25}$$

Приведем пример. Орбитальное движение планеты Юпитер характеризуется параметрами

$$\Omega = 1{,}68 \cdot 10^{-8}\ \text{с}^{-1}, \qquad m = 1{,}9 \cdot 10^{30}\ \text{г}, \qquad r = 7{,}78 \cdot 10^{13}\ \text{см},$$

и уравнение (10.5.25) дает для мощности гравитационного излучения значение 5,3 кВт, т. е. даже меньшее, чем значение мощности гравитационного излучения, создаваемого тепловыми колебаниями в ядре Солнца, вычисленное в предыдущем параграфе.

Для того, чтобы заметить хоть какой-нибудь эффект изменения орбиты Юпитера из-за такой потери энергии, нужно наблюдать Юпитер значительно дольше, чем все время существования Солнечной системы.

Можно показать из более общих соображений, что эффектами гравитационного излучения в небесной механике можно пренебречь. Мощность излучения системы, состоящей из частиц со средней массой $\bar{M}$, средними размерами $\bar{r}$ и со средней скоростью $\bar{v}$, имеет на частоте $\omega \sim \bar{v}/\bar{r}$ следующий порядок [ср. с выражением (10.5.7)]:

$$P \sim G\left(\frac{\bar{v}}{\bar{r}}\right)^6 \bar{M}^2\bar{r}^4,$$

или, поскольку $G\bar{M}/\bar{r}$ есть величина порядка $\bar{v}^2$, получаем

$$P \sim \bar{M}\frac{\bar{v}^8}{\bar{r}}.$$

В такой системе средняя величина замедления частиц $\bar{a}_{\text{рад}}$ из-за потерь энергии определяется значением мощности P, деленной на импульс $\bar{M}\bar{v}$, т. е.

$$\bar{a}_{\text{рад}} \sim \frac{\bar{v}^7}{\bar{r}}.$$

Этот результат можно сравнить с ускорением порядка $\bar{v}^2/\bar{r}$, вычисленным в ньютоновской механике, и с постньютоновскими поправками, обсужденными в предыдущей главе, порядок которых $\bar{v}^4/\bar{r}$. [Величины, описывающие эффекты излучения, содержат *нечетные* степени $\bar{v}$, поскольку они представляют необратимые процессы, что было видно из использованного нами решения для рассеянной волны в формуле (10.4.4).] Поскольку реакция излучения слабее, чем постньютоновские поправки из-за умножения на $\bar{v}^3 < 10^{-12}$, то пренебрежение в предыдущей главе реакцией излучения совершенно оправдано. Действительно, если набраться терпения, мы могли бы (не сталкиваясь с эффектами гравитационного излучения!) вычислить пост-постньютоновские ускорения [2] [1]), порядок которых $\bar{v}^6/\bar{r}$.

Открытие пульсаров дало нам более перспективный источник гравитационного излучения. В § 4 гл. 11 читатель найдет обсуждение возможности того, что пульсары являются нейтронными звездами [4], масса которых порядка массы Солнца, радиус $\sim$10 км и, следовательно, момент инерции I имеет порядок 10^{45} г·см^2. Родившийся от сверхновой пульсар может вращаться с частотой Ω порядка 10^4 с$^{-1}$ и поэтому, согласно формуле (10.5.22),

[1]) Обратное действие излучения рассмотрено в [3].

должен излучать гравитационные волны с интенсивностью $10^{55}e^2$ эрг/с. Для сравнения заметим, что полная энергия вращения пульсара составляла бы около 10^{53} эрг, и поэтому бо́льшая часть кинетической энергии пульсара излучалась бы в течение нескольких лет в виде гравитационных волн [1]) при том условии, что экваториальный эксцентриситет e был бы не менее 10^{-4}. В действительности это слишком большое значе́ние для статического эксцентриситета, чтобы он мог сохраняться в огромном гравитационном поле нейтронной звезды, но это значение, вероятно, возникает за счет динамических эффектов. В частности, это может осуществляться в ранний период, до того как пульсар приобретает устойчивую равновесную конфигурацию. В конце концов пульсар замедлится настолько, что другие механизмы потерь, такие, как магнитное дипольное излучение (для которого $P \sim \Omega^4$), станут более важными, чем гравитационное излучение.

§ 6. Рассеяние и поглощение гравитационного излучения

Рассмотрим плоскую гравитационную волну с поляризацией $e_{\mu\nu}$ и волновым вектором k^μ, которая падает на мишень, находящуюся в начале координат. На большом расстоянии от мишени гравитационная волна будет в общем случае состоять из плоской волны и расходящейся волны (см., например, [7]):

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \xrightarrow[r\to\infty]{} \left[e_{\mu\nu}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f_{\mu\nu}(\hat{\mathbf{x}})\frac{e^{i\omega r}}{r}\right]e^{-i\omega t}, \qquad (10.6.1)$$

где $r \equiv |\mathbf{x}|$, $\hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}/r$, $\omega \equiv |\mathbf{k}|$ и $f_{\mu\nu}$ — *амплитуда рассеяния*, которая может зависеть от $\hat{\mathbf{x}}$ и ω, но не от r или t.

Чтобы исследовать энергетический баланс между гравитационной волной и мишенью, необходимо разложить волну (10.6.1) на сходящуюся и расходящуюся волны. Плоскую волну в (10.6.1) можно разложить по полиномам Лежандра [8]:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}})\,i^l j_l(\omega r).$$

Здесь j_l — сферические функции Бесселя порядка l (см. [8]). Поскольку существует асимптотическое соотношение (см. [8])

$$i^l j_l(\omega r) \to \frac{1}{2i\omega r}[e^{i\omega r} - (-1)^l e^{-i\omega r}],$$

[1]) Постепенное замедление пульсаров за счет обратного действия гравитационного излучения рассматривалось в работах [5, 6].

суммы по l можно рассматривать как разложения дельта-функций по полиномам Лежандра [1]):

$$\sum_l (2l+1)\, P_l(\mu) = 2\delta(1-\mu),$$

$$\sum_l (2l+1)\,(-1)^l\, P_l(\mu) = 2\delta(1+\mu).$$

Следовательно, на асимптотически больших расстояниях плоская волна представляется в виде расходящейся и сходящейся волн

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{e^{i\omega r}}{i\omega r}\,\delta(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}}) - \frac{e^{-i\omega r}}{i\omega r}\,\delta(1+\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}}).$$

Тогда гравитационная волна (10.6.1) имеет следующее представление:

$$h_{\mu\nu} \xrightarrow[r\to\infty]{} [e^{\text{расх}}_{\mu\nu} e^{i\omega r} + e^{\text{вход}}_{\mu\nu} e^{-i\omega r}]\, e^{-i\omega t} + \text{к. с.} \qquad (10.6.2)$$

где

$$e^{\text{расх}}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\omega r}\,[e_{\mu\nu}\delta(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}}) + i\omega f_{\mu\nu}(\hat{\mathbf{x}})], \qquad (10.6.3)$$

$$e^{\text{вход}}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{i\omega r}\,e_{\mu\nu}\delta(1+\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}}). \qquad (10.6.4)$$

Следуя тем же соображениям, что и в § 4 этой главы, можно вычислить полную мощность, *уносимую* расходящейся волной из сферы большого радиуса r, с помощью формулы

$$P_{\text{расх}} = \int d\Omega\, \langle t^{0i}_{\text{расх}} \rangle\, \hat{\mathbf{x}}_i r^2, \qquad (10.6.5)$$

где $\langle t^{0i}_{\text{расх}} \rangle$ — средний поток энергии, записанный в виде (10.3.5), но с заменой $e_{\mu\nu}$ на $e^{\text{расх}}_{\mu\nu}$. Усреднение проводится по пространственно-временным областям, размеры которых велики по сравнению с $1/\omega$ и малы по сравнению с r. Из выражения (10.6.3) следует, что $P_{\text{расх}}$ должно состоять из трех слагаемых:

$$P_{\text{расх}} = P_{\text{расс}} + P_{\text{интерф}} + P_{\text{пл. в}}, \qquad (10.6.6)$$

которые возникают от собственно $f_{\mu\nu}$, интерференции между $f_{\mu\nu}$ и $e_{\mu\nu}$ и от самого $e_{\mu\nu}$ соответственно. Первый член, представляющий полную мощность, отклоненную от первоначального направления, можно вычислить, подставляя (10.3.5) в (10.6.5) и заменяя $e_{\mu\nu}$ на $f_{\mu\nu}/r$:

$$P_{\text{расс}} = \frac{\omega^2}{16\pi G}\int d\Omega \left[f^{\lambda\nu *}(\hat{\mathbf{x}})\, f_{\lambda\nu}(\hat{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2}\,|f^{\lambda}{}_{\lambda}(\hat{\mathbf{x}})|^2 \right]. \qquad (10.6.7)$$

[1]) Эти формулы можно проверить, умножая их на $P_l(\mu)$ и интегрируя по μ. Нужные для этого формулы интегрирования приведены, например, в § 14 книги Л. Шиффа [7].

Интерференционный член вычисляется аналогичным образом:

$$P_{\text{интерф}} = \frac{\omega^2}{8\pi G}\,\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{i\omega}\int d\Omega\delta\,(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}})\times\right.$$
$$\left.\times\left[e^{\lambda\nu *}f_{\lambda\nu}\,(\hat{\mathbf{x}})-\frac{1}{2}e^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{*}f^{\nu}{}_{\nu}\,(\hat{\mathbf{x}})\right]\right\}.$$

Проинтегрировав по аргументу дельта-функции, получим $P_{\text{интерф}}$ в виде

$$P_{\text{интерф}} = -\frac{\omega}{4G}\,\mathrm{Im}\left\{e^{\lambda\nu *}f_{\lambda\nu}\,(\hat{\mathbf{k}})-\frac{1}{2}e^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{*}f^{\nu}{}_{\nu}\,(\hat{\mathbf{k}})\right\}. \qquad (10.6.8)$$

Последний член в (10.6.6), представляющий собой мощность, уносимую из сферы плоской волной, формально становится бесконечным при $r\to\infty$. Однако плоская волна уносит из любого объема столько же энергии, сколько и вносит в него, и поэтому энергия, приносимая в сферу радиусом r падающей волной (10.6.4), в точности равна третьему слагаемому в (10.6.6)

$$P_{\text{вход}} = P_{\text{пл. в}}. \qquad (10.6.9)$$

Таким образом, величина $P_{\text{пл. в}}$ исключается из уравнения сохранения энергии, и выражение для мощности, поглощенной мишенью, выглядит так:

$$P_{\text{погл}} = P_{\text{вход}} - P_{\text{расх}} = -P_{\text{расс}} - P_{\text{интерф}}. \qquad (10.6.10)$$

Поток энергии падающей волны записывается с помощью выражения (10.3.5), а именно

$$\Phi \equiv \langle t^{0i}\rangle\,\hat{\mathbf{k}}_i = \frac{\omega}{16\pi G}\left(e^{\lambda\nu *}e_{\lambda\nu}-\frac{1}{2}\,|\,e^{\nu}{}_{\nu}\,|^2\right). \qquad (10.6.11)$$

Поэтому эффективное сечение упругого рассеяния гравитационной волны имеет вид

$$\sigma_{\text{расс}} \equiv \frac{P_{\text{расс}}}{\Phi} = \frac{\int d\Omega\left[f^{\lambda\nu *}\,(\hat{\mathbf{x}})\,f_{\lambda\nu}\,(\hat{\mathbf{x}})-\frac{1}{2}\,|\,f^{\lambda}{}_{\lambda}\,(\hat{\mathbf{x}})\,|^2\right]}{\left[e^{\lambda\nu *}e_{\lambda\nu}-\frac{1}{2}\,|\,e^{\nu}{}_{\nu}\,|^2\right]}. \qquad (10.6.12)$$

Эту величину нужно отличать от *полного сечения рассеяния* или поглощения волны

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{P_{\text{расс}}+P_{\text{погл}}}{\Phi}. \qquad (10.6.13)$$

Согласно (10.6.10), полное сечение можно найти, вычисляя интерференцию между падающей и рассеянной волнами:

$$\sigma_{\text{полн}} = -\frac{P_{\text{интерф.}}}{\Phi}. \qquad (10.6.14)$$

С помощью (10.6.8) и (10.6.11) получаем

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{4\pi \operatorname{Im}\left\{ e^{\lambda\nu *} f_{\lambda\nu}(\hat{\mathbf{k}}) - \frac{1}{2} e^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{*} f^{\nu}{}_{\nu}(\hat{\mathbf{k}}) \right\}}{\omega\left(e^{\lambda\nu *} e_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} | e^{\lambda}{}_{\lambda} |^2 \right)}. \qquad (10.6.15)$$

Этот результат, утверждающий, что полное сечение рассеяния равно мнимой части амплитуды рассеяния *вперед*, умноженной на $4\pi/\omega$, был впервые получен в классической электродинамике [9, 10] и известен как *оптическая теорема*. Как здесь, так и в электродинамике этот результат есть следствие сохранения энергии, в то время как в квантовой механике аналогичная теорема следует из условия сохранения вероятности [11, 12].

Поскольку падающая волна слабая, то амплитуда рассеяния $f_{\lambda\nu}$ есть линейная комбинация из компонент первоначального поляризационного тензора $e_{\rho\sigma}$. Отсюда следует, что сечения (10.6.12) и (10.6.15) не зависят от *нормировки* $e_{\mu\nu}$, хотя они могут зависеть от $\mathbf{k}$ и от *вида* тензора поляризации. Цель теории гравитационного рассеяния — вычислить $f_{\lambda\nu}$; далее по формулам (10.6.12) и (10.6.15) можно уже определять всевозможные сечения.

§ 7. Детектирование гравитационного излучения

Эксперименты, целью которых было обнаружение гравитационного излучения, были проведены Вебером в шестидесятых годах [1, 26, 27], а в настоящее время такие эксперименты ставятся в лабораториях всего мира. В большинстве экспериментов используется *резонансная квадрупольная антенна*, роль которой может играть любая «малая» механическая или гидродинамическая система с естественной модой свободных колебаний. Оказывается так, что эффективное сечение такой антенны можно оценить, используя только оптическую теорему, выведенную нами в предыдущем параграфе, не вникая во взаимодействие между гравитационной волной и антенной.

Предположим прежде всего, что антенна много меньше длины волны $2\pi/\omega$ и потому рассеянная гравитационная волна есть чисто квадрупольное излучение. Исходя из тех же соображений, которые привели нас ранее к формулам (10.4.10), (10.4.12), (10.5.3) и (10.5.4), можно заключить, что амплитуда рассеяния в выражении (10.6.1) имеет вид

$$f_{\mu\nu}(\hat{\mathbf{x}}) = t_{\mu\nu}(\hat{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} t^{\lambda}{}_{\lambda}(\hat{\mathbf{x}}), \qquad (10.7.1)$$

где $t_{\mu\nu}$ — тензор, пропорциональный фурье-образу вызываемого волной возмущения в $T_{\mu\nu}$. Сохранение энергии-импульса приводит, как и раньше, к соотношениям

$$t_{0i}(\hat{\mathbf{x}}) = -\hat{x}_j t_{jk}, \qquad t_{00}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{x}_i \hat{x}_j t_{ij}, \qquad (10.7.2)$$

где t_{ij} не зависит от $\mathbf{x}$, но, конечно, зависит от ω, $e_{\mu\nu}$ и от детального механизма взаимодействия антенны и падающей волны. В системе координат, в которой начальный вектор распространения $\mathbf{k}$ направлен, по третьей оси, а калибровка такова, что единственными неисчезающими элементами тензора поляризации являются $e_{11} = -e_{22}$ и $e_{12} = e_{21}$, полное сечение (10.6.15) принимает вид

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{2\pi \operatorname{Im}\{e_{11}^*(t_{11}-t_{22}) + 2e_{12}^* t_{12}\}}{\omega[|e_{11}|^2 + |e_{12}|^2]} \tag{10.7.3}$$

Далее, тем же методом, что и в § 5 этой главы, можно вычислить интеграл по углам в (10.6.12) и получить следующую формулу для сечения упругого рассеяния:

$$\sigma_{\text{расс}} = \frac{4\pi\left[t_{ij}^* t_{ij} - \frac{1}{3}|t_{ii}|^2\right]}{5[|e_{11}|^2 + |e_{12}|^2]}. \tag{10.7.4}$$

Предположим теперь, что рассеяние резонансное, т. е. что частота ω падающей волны близка к собственной частоте ω_0 свободных колебаний системы, образующей антенну. Можно считать, что падающая волна служит просто возбудителем этих свободных колебаний, которые теряют затем энергию, излучая гравитационные волны или другими путями, что отвечает упругому рассеянию и поглощению соответственно.

Отсюда, в частности, следует, что отношение сечения упругого рассеяния к полному сечению равно просто доле энергии η свободных колебаний, рассеивающейся в виде гравитационного излучения (т. е. энергии, которая не превращается в теплоту, в свет и т. п.)

$$\sigma_{\text{расс}} = \eta\sigma_{\text{полн}}, \tag{10.7.5}$$

где

$$\eta \equiv \frac{\Gamma_{\text{грав}}}{\Gamma}.$$

Здесь Γ — полная скорость затухания свободных колебаний, а $\Gamma_{\text{грав}}$ — скорость затухания вследствие гравитационного излучения. Поскольку η есть параметр, характеризующий свободные колебания антенны и не связанный с тем, каким образом эти колебания возбуждаются, то он не зависит от $e_{\mu\nu}$.

Другое следствие предположения о резонансном механизме рассеяния — это то, что *вид* матрицы t_{ij} определяется некоторой постоянной матрицей n_{ij}, зависящей только от геометрических свойств возбуждаемых колебаний, т. е. t_{ij} должно быть равно n_{ij}, умноженной на некоторую функцию от компонент тензора поляризации e_{11} и e_{12}. Так как поле падающей волны по предположению слабое, эта функция должна быть линейной и, следовательно,

должна иметь вид

$$t_{ij} = n_{ij}\,(\alpha e_{11} + \beta e_{12}), \tag{10.7.6}$$

где n_{ij}, α и β не зависят от e_{11} и e_{12}. Например, если антенна обладает аксиальной симметрией относительно некоторого направления $\mathbf{n}$, то n_{ij} есть линейная комбинация δ_{ij} и $n_i n_j$. Член, пропорциональный δ_{ij}, не дает вклада в (10.7.3) или в (10.7.4), а потому в данном случае имеем

$$n_{ij} = n_i n_j. \tag{10.7.7}$$

Два требования, (10.7.5) и (10.7.6), налагают сильные ограничения на амплитуду рассеяния. Подставив (10.7.3), (10.7.4) и (10.7.6) в (10.7.5), находим

$$\frac{\eta}{\omega}\,\mathrm{Im}\,\{[e_{11}^*\,(n_{11}-n_{22})+2e_{12}^* n_{12}]\,[\alpha e_{11}+\beta e_{12}]\} =$$

$$= \frac{2}{5}\,|\,\alpha e_{11}+\beta e_{12}\,|^2\left[n_{ij}^* n_{ij} - \frac{1}{3}\,|\,n_{ii}\,|^2\right].$$

Это соотношение должно выполняться при любых $e_{\mu\nu}$; поэтому, приравняв коэффициенты при $|\,e_{11}\,|^2$, $e_{11}^* e_{12}$ и $|\,e_{12}\,|^2$, получим

$$\frac{1}{|\,\alpha\,|^2}\,\mathrm{Im}\,\{(n_{11}-n_{22})\,\alpha\} = \frac{1}{2i\alpha^*\beta}\,\{(n_{11}-n_{22})\,\beta - 2n_{12}^*\alpha^*\} =$$

$$= \frac{2}{|\,\beta\,|^2}\,\mathrm{Im}\,\{n_{12}\beta\} = \frac{2\omega}{5\eta}\left[n_{ij}^* n_{ij} - \frac{1}{3}\,|\,n_{ii}\,|^2\right].$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\alpha = \frac{5\eta g\,(n_{11}^* - n_{22}^*)}{2\omega\left[n_{ij}^* n_{ij} - \frac{1}{3}\,|\,n_{ii}\,|^2\right]},$$

$$\beta = \frac{5\eta g n_{12}^*}{\omega\left[n_{ij}^* n_{ij} - \frac{1}{3}\,|\,n_{ii}\,|^2\right]},$$

где g — комплексное число с мнимой частью, равной

$$\mathrm{Im}\;g = |\,g\,|^2. \tag{10.7.8}$$

Тогда амплитуда рассеяния (10.7.6) запишется так:

$$t_{ij} = \frac{5g\eta n_{ij}\,[(n_{11}^* - n_{22}^*)\,e_{11} + 2n_{12}^* e_{12}]}{2\omega\left[n_{lm}^* n_{lm} - \frac{1}{3}\,|\,n_{ll}\,|^2\right]}. \tag{10.7.9}$$

Отметим, что t_{ij} здесь зависит только от вида матрицы n_{ij}, но не от ее нормировки.

И наконец, последнее следствие предположения о резонансном рассеянии состоит в том, что частотная зависимость амплитуды рассеяния t_{ij} задается фурье-образом функции, временная зависи-

мость которой определяется экспонентой

$$e^{-i\omega_0 t}e^{-\Gamma t/2},$$

причем функция осциллирует с частотой ω_0, а затухание амплитуды и убывание энергии происходят соответственно с декрементами $\Gamma/2$ и Γ, т. е. t_{ij} должна иметь следующую зависимость от частоты:

$$t_{ij} \sim \left[\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2}\right]^{-1}. \tag{10.7.10}$$

Поскольку η и n_{ij} определяются свойствами свободных колебаний вне зависимости от того, как они возникают, такая частотная зависимость может проявиться только благодаря множителю g. Чтобы удовлетворить условию «унитарности» (10.7.8) для всех ω, надо положить

$$g = \frac{-\Gamma/2}{\omega - \omega_0 + i\Gamma/2}. \tag{10.7.11}$$

Полное сечение рассеяния или поглощения антенной гравитационных волн (10.7.3) запишется тогда в единицах СГС в виде

$$\sigma_{\text{полн}} = \left(\frac{5\pi\eta c^2}{\omega^2}\right)\left(\frac{\Gamma^2/4}{(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2/4}\right)\times$$
$$\times \frac{|(n_{11}^*-n_{22}^*)e_{11}+2n_{12}^*e_{12}|^2}{\left[n_{ij}^*n_{ij}-\frac{1}{3}|n_{ii}|^2\right]\left[|e_{11}|^2+|e_{12}|^2\right]}. \tag{10.7.12}$$

Весьма замечательным обстоятельством является то, что это сечение полностью определяется как функция величин $e_{\mu\nu}$ и ω параметрами ω_0, Γ, η и формой матрицы n_{ij} независимо от того, будут ли резонансные колебания механическими, акустическими, электрическими или какими-нибудь еще.

В частном случае, когда антенна обладает круговой симметрией относительно направления $\mathbf{n}$, матрица n_{ij} имеет простую форму (10.7.7). Если ось симметрии располагается в плоскости 1—3 под углом θ к 3-оси, вдоль которой распространяется волна, то неравные нулю элементы такой матрицы выглядят так:

$$n_{11} = \sin^2\theta, \qquad n_{13} = \cos\theta\sin\theta, \qquad n_{33} = \cos^2\theta.$$

Тогда полное сечение (10.7.12) имеет вид

$$\sigma_{\text{полн}} = \left(\frac{15\pi\eta c^2}{2\omega^2}\right)\left(\frac{\Gamma^2/4}{(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2/4)}\right)\sin^4\theta\left(\frac{|e_{11}|^2}{|e_{11}|^2+|e_{12}|^2}\right). \tag{10.7.13}$$

Из-за множителя $\sin^4\theta$ сечение будет наибольшим тогда, когда ось антенны располагается под прямым углом к направлению распространения волны, т. е. при $\theta = \pi/2$. Это отражает просто тот факт, что гравитационные волны, подобно электромагнитным, *поперечны*.

Когда поляризация гравитационных волн не измеряется, величина, представляющая интерес,— это сечение (10.7.12), усредненное по спиральностям ± 2, т. е. по тензорам поляризации с $e_{11} = \mp i e_{12}$. Такое сечение имеет вид

$$\bar{\sigma}_{\text{полн}} = \left(\frac{5\pi\eta c^2}{2\omega^2}\right)\left(\frac{\Gamma^2/4}{(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2/4}\right)\left(\frac{|n_{11}-n_{22}|^2+4|n_{12}|^2}{n_{ij}^* n_{ij} - \frac{1}{3}|n_{ii}|^2}\right). \qquad (10.7.14)$$

Если антенна обладает аксиальной симметрией, то процедура усреднения по спиральностям сведется просто к замене последнего сомножителя в уравнении (10.7.13) на $^1/_2$.

Проведенный выше анализ, строго говоря, применим только тогда, когда имеется единственное невырожденное резонансное колебание. Если же существует несколько вырожденных колебаний, то данная линейная комбинация, возбуждаемая гравитационной волной, может зависеть от поляризации волны, а потому t_{ij} не обязательно пропорциональна постоянной матрице n_{ij}. Например, если антенна есть упругая сфера, то любое квадрупольное колебание состоит из пяти независимых мод. В этом случае t_{ij} должна быть линейной комбинацией δ_{ij} и e_{ij}, но, как и раньше, член, пропорциональный δ_{ij}, не дает вклада в (10.7.3) или (10.7.4), так что можно принять

$$t_{ij} = \gamma e_{ij}.$$

Тогда уравнения (10.7.3) — (10.7.5) дадут

$$\operatorname{Im}\gamma = \frac{2\omega}{5\eta}|\gamma|^2,$$

и, поскольку γ должен иметь зависимость от частоты (10.7.10), имеем

$$\gamma = \left(\frac{5\eta}{2\omega}\right)\left(\frac{-\Gamma/2}{\omega-\omega_0+i\Gamma/2}\right).$$

Тогда для любой исходной поляризации полное сечение (10.7.3) имеет вид

$$\sigma_{\text{полн}} = \left(\frac{10\pi\eta c^2}{\omega^2}\right)\left(\frac{\Gamma^2/4}{(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2/4}\right). \qquad (10.7.15)$$

Во всех случаях эффективное сечение имеет максимум, когда антенна *настроена* так, что резонансная частота ω_0 равна частоте падающей волны ω. Исследование выражений (10.7.12) — (10.7.15) показывает, что это максимальное значение сечения имеет порядок

$$\sigma_{\text{макс}} \approx \eta\lambda^2, \qquad (10.7.16)$$

где λ — длина волны, равная $2\pi c/\omega$. Если бы в идеальном случае колебания затухали только за счет испускания гравитационных

волн, то $\eta = 1$ и $\sigma_{макс}$ имело бы очень большое значение λ^2. В действительности мы, конечно, никогда даже не приближаемся к этому идеальному случаю; например, в § 5 этой главы мы показали, что большой алюминиевый цилиндр Вебера имеет $\eta \approx \approx 3 \cdot 10^{-34}$! В общем случае интенсивность $\Gamma_{грав}$, с которой резонансный осциллятор излучает гравитационные волны, зависит от размеров антенны, которые трудно увеличить; следовательно, для того чтобы сделать $\sigma_{макс}$ как можно бóльшим, необходимо максимально уменьшить Γ в отношении $\eta \equiv \Gamma_{грав}/\Gamma$, используя, возможно, для этого некоторый вид осцилляций в сверхтекучей жидкости.

Однако настройка нашей антенны не даст ничего, если у нас не будет сильного источника гравитационного излучения с хорошо известной частотой, на которую можно настраиваться. Вероятно, наиболее перспективный источник [13] — это пульсар NP 0532 в Крабовидной туманности. Этот объект мы наблюдаем по излучению им электромагнитных импульсов в диапазоне оптических, рентгеновских и радиочастот с периодом $2\pi/\Omega = 0{,}03309$ с. Как мы упоминали в параграфе 5, пульсары считаются вращающимися нейтронными звездами [4] с моментом инерции порядка 10^{45} г·см^2 и неизвестной величиной сплюснутости. Следовательно, пульсар в Крабовидной туманности излучает, по-видимому, гравитационные волны с $\omega = 2\Omega = 379{,}8$ Гц при интенсивности около $10^{45} \cdot e^2$ эрг/с. Поскольку Крабовидная туманность находится от Земли на расстоянии 6500 световых лет, или $6{,}2 \cdot 10^{21}$ см, поток гравитационного излучения, пронизывающий Землю, составляет около $\Phi \approx e^2$ эрг/(с·см^2). Резонансная линейная квадрупольная антенна, «направленная» и настроенная на пульсар в Крабовидной туманности, должна иметь, согласно формуле (10.7.13), сечение $\bar{\sigma}_{полн} \sim 7{,}4 \cdot 10^{16} \eta$ см^2.

Мощность, поглощаемая антенной, составит тогда около $10^{16} \eta e^2$ эрг/с. Если, например, $\eta = 10^{-32}$, а $e \sim 10^{-4}$, то мощность будет порядка 10^{-24} эрг/с и, вероятно, она может быть детектирована. К сожалению, для того чтобы можно было использовать в качестве антенны, настраиваемой на Крабовидную туманность, алюминиевый цилиндр типа рассмотренного в § 5 этой главы, цилиндр должен быть довольно громоздким: $\pi v_s/\omega \sim 42$ м. Чтобы обойти эту трудность, можно использовать антенны в виде кольца, вилки и т. п., которые при заданных размерах имели бы более низкую собственную частоту, чем стержень или цилиндр. Группа исследователей из Рочестера [14] проектирует сейчас кольцевую антенну, которую можно будет настроить на Крабовидную туманность.

Во всех экспериментах, проведенных Вебером, использовалась резонансная квадрупольная антенна, которая не настраивалась ни на какой определенный источник. Ясно, что было бы нелепо

ожидать, чтобы излучение, например, такого монохроматичного источника, как пульсар, попадало бы как раз в полосу приема частот антенны. Поэтому целью подобных экспериментов в действительности может быть детектирование широкополосного гравитационного излучения с потоком энергии $\Phi(\omega)\,d\omega$ в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$. Если детектируется такое излучение, то мощность, поглощенная резонансной антенной, будет равна

$$P = \sigma_{\text{макс}} \int \left[\frac{\Gamma^2/4}{(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2/4}\right] \Phi(\omega)\,d\omega,$$

где $\sigma_{\text{макс}}$ — эффективное сечение антенны в резонансе, определяемое формулами (10.7.12) — (10.7.14) или (10.7.15) при $\omega = \omega_0$. Если $\Phi(\omega)$ приблизительно одно и то же в интервале частот от $(\omega_0 - \Gamma)$ до $(\omega_0 + \Gamma)$, то величину $\Phi(\omega)$ можно вынести из-под знака интеграла и получить

$$P = \pi\sigma_{\text{макс}}\Phi(\omega_0)\frac{\Gamma}{2}. \qquad (10.7.17)$$

Если источник излучает в течение времени, большего, чем время релаксации антенны $1/\Gamma$, то может быть достигнуто квазистационарное состояние, в котором среднее значение энергии E в резонансной моде таково, что энергетические потери $E\Gamma$ компенсируются поглощаемой мощностью P:

$$E = \frac{P}{\Gamma} = \pi\sigma_{\text{макс}}\frac{\Phi(\omega_0)}{2}. \qquad (10.7.18)$$

В этом случае измерение энергии возбуждения резонансной моды служит для измерения или по крайней мере для оценки верхнего предела потока мощности при резонансной частоте. Например, Земля имеет основную сфероидальную моду колебаний (описание нормальных мод колебаний Земли и Луны приведено в [15]) ${}_0S_2$ с периодом $2\pi/\omega$, равным 54 мин, и скоростью затухания порядка $5\cdot10^{-6}$ с$^{-1}$. При данном характере колебаний возмущение плотности массы имеет вид $\rho_1(r)\,Y_2^m(\theta, \varphi)$. В такой моде скорость гравитационного затухания $\Gamma_{\text{грав}}$ должна приблизительно иметь порядок $GM_\oplus R_\oplus{}^2\omega^4/c^5$ [ср. с выражением (10.5.18)], т. е. около 10^{-25} с$^{-1}$, поэтому относительная вероятность η имеет порядок 10^{-20}. В резонансе сечение (10.7.15) равно $7{,}5\cdot10^{27}\eta$ см^2, или 10^7—10^8 см^2. Из сейсмических измерений можно извлечь среднее значение напряжения в земной коре в спокойный период. Форвард с сотр. [16—19] получил в 1961 г. верхний предел величины $\Phi(\omega_0)$ порядка 20 Вт/см^2·Гц. Можно надеяться, что, помещая гравиметр на Луне [20], которая сейсмически значительно менее активна, чем Земля, можно улучшить оценку верхнего предела Φ.

Если «вспыхнувший» источник излучает в течение времени τ, меньшего, чем время релаксации антенны $1/\Gamma$, то полная энергия,

получаемая антенной, равна

$$\Delta E = P\tau = \pi\sigma_{\text{макс}}\Phi(\omega_0)\,\tau\,\frac{\Gamma}{2}.$$

Таким образом, при вспышке энергию, достигающую антенны и приходящуюся на единицу площади *внутри ширины* полосы частот Г, можно определить следующим образом:

$$\mathscr{E} \equiv \Phi(\omega_0)\,\Gamma\tau = \frac{2\Delta E}{\pi\sigma_{\text{макс}}}. \qquad (10.7.19)$$

Однако, если источник излучает в течение времени $\tau < 1/\Gamma$, его полоса частот должна быть шире чем $1/\tau$; поэтому при вспышке *полная* энергия на единицу площади будет больше чем $\mathscr{E}$ более чем в $(\tau\Gamma)^{-1}$ раз.

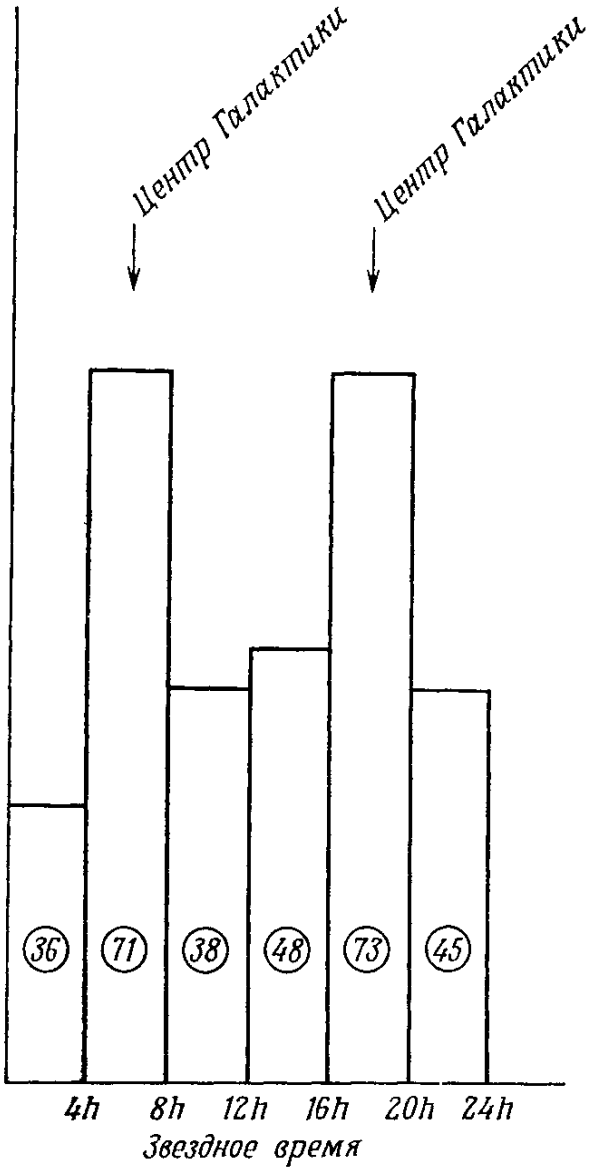
Пока что единственным положительным указанием на существование гравитационного излучения во Вселенной служат эксперименты Вебера [1, 21, 23] с алюминиевыми цилиндрами, описанные в § 5 гл. 10. Эти антенны имели следующие значения частоты и «коэффициента ветвления»: $\omega_0/2\pi = 1660$ Гц, $\eta = 3\cdot10^{-34}$ [см. выражение (10.5.20)]. Отсюда, полагая $\omega = \omega_0$ и усредняя выражение (10.7.13) по спиральностям, получаем следующее значение резонансного сечения:

$$\bar{\sigma}_{\text{макс}} = 2{,}9\cdot10^{-20}\sin^4\theta\ \text{см}^2.$$

Если при комнатной температуре минимальный прирост энергии ΔE, который можно отличить от тепловых флуктуаций, равен kT или $4\cdot10^{-14}$ эрг, то, согласно соотношению (10.7.19), гравитационное излучение вспышки можно детектировать, если энергия на единицу площади внутри ширины луча удовлетворяет условию

$$\mathscr{E} \gtrsim 9\cdot10^{5}\ \text{эрг/см}^2 \quad \text{для} \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

(В действительности, пользуясь точнее обработанными данными, эту оценку можно несколько улучшить.) Простой подсчет числа импульсов, возникающих в одном цилиндре, оставлял бы возможность утверждать, что эти импульсы не имеют отношения к тепловому шуму, а связаны с сейсмическими возмущениями, электрическими бурями или космическими лучами. Поэтому Вебер отбирал совпадающие во времени импульсы в алюминиевых цилиндрах, находящихся на расстоянии 1000 км друг от друга: в Колледж-Парке штата Мэриленд и в Аргоннской Национальной лаборатории, штат Иллинойс. В 1969 г. Вебер сообщил о примерно 100 совпадающих импульсах, следующих с такой скоростью, которая приводит к значению потока гравитационного излучения примерно 0,1 эрг·см$^{-2}$·с$^{-1}$ (при ширине полосы частот $\Gamma \sim$ $\sim$ 0,1 Гц) [21].



Фиг. 10.1. Данные по гравитационному излучению, приходящему из центра Галактики [22].

На фигуре показана регистрируемая Вебером интенсивность (в произвольных единицах) как функция звездного времени. Стрелками отмечены те значения звездного времени, когда антенна была расположена почти перпендикулярно лучу зрения на центр Галактики. Числа в кружочках показывают число совпадений в каждом временном интервале.

Вскоре после этого Вебер [22—24] обнаружил, что скорость совпадений так коррелирует со звездным временем, как будто бы излучение приходит из центра Галактики и дает обычное для антенны распределение $\sin^4\theta$ (фиг. 10.1). Центр Галактики удален от Земли на расстояние $2{,}5\cdot10^{22}$ см, поэтому наблюдаемый поток 0,1 эрг·см$^{-2}$·с$^{-1}$ указывает на источник с мощностью около $8\cdot10^{44}$ эрг/с, или $0{,}013\,M_\odot c^2$/год. Само по себе это не было бы таким уж удивительным, но поскольку антенны Вебера не были настроены ни на какую определенную частоту, то мощность $0{,}01M_\odot c^2$ в полосе частот 0,1 Гц при 1660 Гц, по-видимому, соответствует полной мощности, в 10^3—10^5 раз большей, т. е. около 10—$10^3 M_\odot c^2$/год. При такой интенсивности излучения вся масса Галактики была бы исчерпана за 10^8—10^{10} лет! Если Вебер в действительности наблюдал гравитационное излучение из центра Галактики, то либо он случайно наскочил на точную частоту, на которой испускается бóльшая часть этого излучения, либо он открыл новый невероятно мощный источник энергии.

Вебер искал также скалярное излучение, используя диск с монопольной модой колебаний, имеющий ту же частоту 1660 Гц, что и цилиндр. Наблюдаемая скорость совпадений была много меньше, чем у пары цилиндров; явная корреляция совпадений со звездным временем соответствует чисто тензорной теории [25].

Сейчас готовятся повторения экспериментов Вебера с большой чувствительностью. Одно из важнейших усовершенствований, планируемых сейчас в Стэнфорде [26],— охлаждение цилиндри-

ческих антенн до очень низких температур, порядка миллиградусов по Кельвину. Если работа антенны ограничена тепловым шумом, то понижение температуры в 10^{+5} раз увеличит точность в 10^5 раз. Группа московских ученых [27] пытается обнаружить гравитационное излучение с помощью улучшенного оборудования и проектирует новые типы гравитационных волновых антенн [28]. Вебер продолжает свои исследования, используя новые антенны и другое оборудование. Лучшее, что может делать сейчас теоретик,— это ждать, когда экспериментаторы достигнут какого-то согласия в вопросе о том, действительно ли гравитационное излучение наблюдалось.

§ 8. Квантовая теория гравитации *

В настоящее время не существует сколько-нибудь полной и самосогласованной квантовой теории гравитации, и, чтобы подробно описать попытки создания такой теории, пришлось бы выйти за рамки этой книги. Однако представляется возможным и, наверное, даже полезным дать читателю понятие о том, как такая квантовая теория могла бы выглядеть.

Для начала на простейшем уровне будем считать элементарно, что гравитационная плоская волна с волновым вектором k_μ и спиральностью ± 2 состоит из *гравитонов* — квантов с вектором энергии-импульса $p^\mu = \hbar k^\mu$ и проекциями спина на направление движения, равными $\pm 2\hbar$. (Здесь $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-27}$ эрг/с.) Поскольку $k_\mu k^\mu = 0$, то, подобно фотону и нейтрино, гравитон — это частица с нулевой массой. Согласно выражению (2.8.4), тензор энергии-импульса ансамбля гравитонов, каждый из которых имеет 4-импульс $p_i^\mu = \hbar k^\mu$, равен

$$T_{\mu\nu} = \frac{\hbar k_\mu k_\nu}{\omega} \mathcal{N}, \tag{10.8.1}$$

где $\mathcal{N}$ — число гравитонов на единицу объема. Сравнивая (10.8.1) с выражением, найденным нами для плоской гравитационной волны,

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{16\pi G} (|e_+|^2 + |e_-|^2), \tag{10.8.2}$$

можно сделать вывод, что в плоской волне плотность числа гравитонов со спиральностью ± 2 равна

$$\mathcal{N}_\pm = \frac{\omega}{16\pi\hbar G} |e_\pm|^2. \tag{10.8.3}$$

*) Этот и следующий параграфы лежат несколько в стороне от основной линии книги и могут быть опущены при первом чтении.

Плотность полного числа гравитонов имеет вид

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N}_+ + \mathcal{N}_- = \frac{\omega}{16\pi\hbar G}\left(e^{\lambda\nu *}e_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\,|\,e^{\lambda}{}_{\lambda}\,|^2\right). \qquad (10.8.4)$$

Аналогичным образом, можно рассматривать в (10.4.13) мощность, теряемую произвольной системой в виде гравитационного излучения, как интенсивность излучения $d\Gamma$ гравитонов с энергией $\hbar\omega$ в телесный угол $d\Omega$:

$$d\Gamma = \frac{dP}{\hbar\omega} = \frac{G\omega\, d\Omega}{\hbar\pi}\left[T^{\lambda\nu *}(k,\omega)\,T_{\lambda\nu}(k,\omega) - \frac{1}{2}\,|\,T^{\lambda}{}_{\lambda}(k,\omega)\,|^2\right]. \qquad (10.8.5)$$

Однако здесь под тензором энергии-импульса $T^{\lambda\nu}(k,\omega)$ необходимо понимать уже матричный элемент оператора тензора энергии-импульса между начальным и конечным состояниями. В частности, ширина перехода атома из состояния a в состояние b путем гравитационного излучения в квадрупольном приближении записывается так:

$$\Gamma(a\to b) = \frac{2G\omega^5}{5\hbar}\left[D^*_{ij}(a\to b)\,D_{ij}(a\to b) - \frac{1}{3}\,|\,D_{ij}(a\to b)\,|^2\right], \qquad (10.8.6)$$

где

$$D_{ij}(a\to b) \equiv m_e\int \psi^*_b(\mathbf{x})\,x_i x_j \psi_a(\mathbf{x})\,d^3\mathbf{x}, \qquad (10.8.7)$$

а ψ_a, ψ_b — волновые функции начального и конечного состояний. Например, ширина перехода с излучением одного гравитона атомом водорода из состояния $3d$ ($m = 2$) в состояние $1s$ равна

$$\Gamma(3d\to 1s) = \frac{2^{23}Gm_e{}^3c}{3^7 5^{15}(137)^6\hbar^2} = 2{,}5\cdot 10^{-44}\ \text{с}^{-1}.$$

Совершенно ясно, что нет никакой возможности наблюдать такой переход.

Приведенные выше оценки относятся к процессам, в которых переходы возникают именно из-за излучения гравитона, а потому гравитон имеет определенную частоту $\omega = (E_a - E_b)/\hbar$. Можно рассмотреть также процесс, протекающий любым другим образом, например за счет столкновения частиц, и поставить вопрос: какова вероятность излучения гравитона в таком процессе? В этом случае частоты гравитонов образуют непрерывный спектр, поэтому используем формулу (10.4.22) для излучаемой энергии, разделив ее на $\hbar\omega$. Тогда вероятность излучения в телесный угол $d\Omega$ гравитона с частотой в $d\omega$ равна

$$dP = \frac{G\omega^2\, d\omega\, d\Omega P_c}{2\pi^2\hbar\omega}\sum_{N,\,M}\frac{\eta_N\eta_M}{(P_N\cdot k)\,(P_M\cdot k)}\times$$

$$\times\left[(P_N\cdot P_M)^2 - \frac{1}{2}m_N{}^2 m_M{}^2\right], \qquad (10.8.8)$$

где P_c — вероятность столкновения без излучения гравитона; суммирование по N и M, как и раньше, производится по всем частицам в начальном ($\eta = -1$) и конечном ($\eta = +1$) состояниях. Эту формулу можно вывести чисто квантовомеханическими методами [29].

Следует заметить, что вероятность излучения dP пропорциональна $d\omega/\omega$ [множитель $(P \cdot k)$ в знаменателе пропорционален ω], поэтому полная вероятность излучения гравитационных волн при столкновении расходится логарифмически как при $\omega \to \infty$, так и при $\omega \to 0$. С расходимостью при $\omega \to \infty$, т. е. с «ультрафиолетовой» расходимостью, мы столкнулись еще в классике. Этот вид расходимости возникает из-за предположения, что столкновения происходят мгновенно; эту расходимость можно исключить, обрезав интеграл по ω при значении $\omega \sim 1/\Delta t \sim \bar{E}/\hbar$, где Δt — длительность столкновения, а $\bar{E}$, согласно принципу неопределенности, есть некая типичная энергия столкновений. Второй вид расходимости — «инфракрасная» расходимость, возникающая при $\omega = 0$, — есть чисто квантовомеханический эффект, здесь он появился исключительно из-за того, что при вычислении вероятности излучения мы разделили значение излучаемой энергии dE на величину $\hbar\omega$. Эту расходимость можно устранить, учитывая то, что P_c — вероятность столкновений без излучения гравитонов — сама по себе расходится логарифмически из-за испускания и поглощения источником виртуальных гравитонов и что эти расходимости взаимно уничтожаются [30]. Таким образом, приняв простейшие представления о квантовой природе гравитационного излучения, мы неизбежно обнаруживаем связи реальных и виртуальных гравитонов.

Квантовая интерпретация гравитационного излучения приводит к простому выводу соотношений между вероятностями поглощения и излучения гравитонов. Представим себе, что имеется абсолютно черная полость с температурой T в теле, настолько большом и плотном, что оно непроницаемо для гравитационного излучения. Пусть полость будет заполнена электромагнитным и гравитационным излучением, находящимся в равновесии с содержащей их оболочкой. Используя те же статистические соображения, которые для электромагнитного излучения приводят к распределению Планка (см., например, [31]), получаем, что приходящееся на единицу объема число состояний гравитона с частотой, лежащей между ω и $\omega + d\omega$, равно

$$n(\omega)\, d\omega = \frac{\omega^2\, d\omega}{\pi^2}\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right]^{-1}, \qquad (10.8.9)$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К — постоянная Больцмана. (При выводе этого выражения был учтен тот факт, что гравитон, подобно фотону, имеет два независимых состояния поляризации.) Для того

чтобы поддерживалось состояние равновесия, интенсивность поглощения $A(\omega)$ единичного гравитона стенками полости должна быть следующим образом связана с приходящейся на единичный объем интенсивностью излучения $E(\omega)\,d\omega$ гравитона с частотой между ω и $\omega + d\omega$:

$$A(\omega)\, n(\omega)\, d\omega = E(\omega)\, d\omega. \tag{10.8.10}$$

Это соотношение можно записать также в виде [34]

$$E(\omega) = I(\omega) + S(\omega), \tag{10.8.11}$$

где

$$S(\omega) = \left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right) \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) A(\omega), \tag{10.8.12}$$

$$I(\omega) = n(\omega) \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) A(\omega). \tag{10.8.13}$$

Величину $S(\omega)$ мы рассматриваем, как скорость *спонтанного* гравитационного излучения, приходящуюся на единичный объем и единичный интервал частот.

[(10.8.12) можно вывести также и из «кроссинг-симметрии» между излучением и поглощением; ω^2/π^2 — множитель, учитывающий «фазовое пространство», а $\exp(-\hbar\omega/kT)$ — множитель Больцмана, представляющий собой относительную вероятность того, что атом находится на верхнем уровне и способен излучить гравитон или находится на нижнем уровне и способен поглотить гравитон.] Оставшийся член $I(\omega)$, пропорциональный $n(\omega)$, можно рассматривать как приходящуюся на единицу объема и частот скорость *индуцированного* излучения гравитационных волн — эффект, связанный с бозе-статистикой газа, состоящего из гравитонов (см. [7], стр. 449).

Полезно заметить, что выражения (10.8.12) и (10.8.13) остаются справедливыми даже в том случае, когда гравитационное излучение не находится в равновесии с веществом и формула (10.8.9) для $n(\omega)$ не выполняется. Необходимо только, чтобы при температуре T вещество находилось в состоянии теплового равновесия. Например, разделив выражение (10.4.26) на $\hbar\omega$, можно вычислить приходящуюся на единицу объема и частоты интенсивность $S(\omega)$ спонтанного излучения гравитонов в нерелятивистском газе при условии, что частота гравитона ω лежит в интервале $\omega_c \ll \omega \ll kT/\hbar$. Выражение (10.8.12) приводит тогда к следующей формуле для скорости поглощения таких гравитонов:

$$A(\omega) = \frac{8\pi G}{5\hbar\omega^3} \sum_{a,\,b} \mu_{ab}^2 n_a n_b \left\langle v_{ab}^5 \int \frac{d\sigma_{ab}}{d\Omega} \sin^2\theta\, d\Omega \right\rangle$$

Поведение $A(\omega)$ как ω^{-3} может при высокой температуре эту величину сделать неожиданно большой для низкочастотных гравито-

нов в газе. Однако индуцированное излучение эффективно уменьшает интенсивность поглощения в $kT/\hbar\omega$ раз. В сегодняшней Вселенной, по-видимому, не возникает ситуации, когда поглощение гравитационного излучения играло бы важную роль.

То, что мы здесь изложили, можно назвать *полуклассической* теорией гравитации. Развитие действительно квантовой теории гравитации, к сожалению, намного сложнее. Один из подходов к такой задаче — это построение гамильтониана взаимодействия, который мог бы описывать рождение и уничтожение гравитонов, и затем вычисление вероятностей переходов в виде степенного ряда по этому взаимодействию. Обычно гамильтониан строится из квантованных *полей* вида

$$h_{\rho\nu}(x) = \sum_{\mu} \int d^3k \{a(\mathbf{k}, \mu)\, e_{\rho\nu}(\mathbf{k}, \mu) \times$$

$$\times \exp(ik_\lambda x^\lambda) + a^\dagger(\mathbf{k}, \mu)\, e^*_{\rho\nu}(\mathbf{k}, \mu) \exp(-ik_\lambda x^\lambda)\}, \qquad (10.8.14)$$

где $e_{\rho\nu}(\mathbf{k}, \mu)$ — тензор поляризации гравитона с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и спиральностью μ, а $a(\mathbf{k}, \mu)$ и $a^\dagger(\mathbf{k}, \mu)$ — *операторы рождения и уничтожения*, удовлетворяющие следующим коммутационным соотношениям:

$$[a(\mathbf{k}, \mu), a^\dagger(\mathbf{k}', \mu')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\, \delta_{\mu\mu'}, \qquad (10.8.15)$$

$$[a(\mathbf{k}, \mu), a(\mathbf{k}', \mu')] = [a^\dagger(\mathbf{k}, \mu), a^\dagger(\mathbf{k}', \mu')] = 0. \qquad (10.8.16)$$

Трудности такого подхода возникают из-за того, что оператор (10.8.15) не может быть лоренцевым тензором, поскольку суммирование по спиральностям ограничено физическими значениями $\mu = \pm 2$; как мы видели в § 2 этой главы, истинный тензор имел бы спиральности 0, ± 1, ± 2. Мы можем, правда, исходить из истинного тензора, а затем подвергнуть $e_{\mu\nu}$ градиентному преобразованию, чтобы исключить нефизические значения спиральности 0 и ± 1. Однако если мы выбираем калибровку таким образом, то $h_{\mu\nu}$ не будет уже тензором. Если, действуя по-другому, считать, что e_{13}, e_{23}, e_{10}, e_{20}, e_{00}, e_{03} и e_{33} исчезают, когда $\mathbf{k}$ направлено по 3-оси, то калибровочное условие не является лоренц-инвариантным. Действительно, если сделать эти компоненты равными нулю, то при лоренц-преобразовании Λ_ν^μ величина $h_{\mu\nu}$ не перейдет просто в $\Lambda_\mu{}^\rho\, \Lambda_\nu{}^\sigma h_{\rho\sigma}$, а подвергнется дополнительному градиентному преобразованию [33]:

$$h_{\mu\nu} \to \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma h_{\rho\sigma} + \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu}.$$

Итак, построение гамильтониана из данных объектов и получение таким образом лоренц-инвариантных вероятностей переходов является нелегкой задачей.

Существуют два возможных пути ее решения. Один из них – это допустить нетензорный характер $h_{\mu\nu}$ и использовать для вывода лоренц-инвариантных правил вычисления амплитуд переходов нековариантный гамильтонов формализм [34—36]. Эта программа достаточно легко реализуется в электродинамике, однако в общей теории относительности ее пока что не удается завершить из-за самодействия гравитационного поля. В другом подходе, предложенном впервые Фейнманом [37], исходят из явно лоренц-инвариантного формализма, а затем каким-нибудь способом пытаются исключить появление среди физических состояний нефизических частиц со спиральностями 0 и ± 1. Эта программа успешно завершена в работах Фадеева и Попова [38], Мандельстама [39] и Де Витта [40].

К сожалению, в квантовой теории гравитации формулировка общих правил вычисления вероятностей переходов вскрыла лишь наличие другой трудности. Оказалось, что теория содержит бесконечности, возникающие при интегрировании по большим виртуальным импульсам. В квантовой электродинамике возникают аналогичные бесконечности, но только в трех или четырех специальных случаях, где они связаны с перенормировкой массы заряда и волновых функций [41]. В отличие от этого квантовая теория гравитации содержит неограниченное множество бесконечностей, в чем можно убедиться, исходя из элементарных соображений размерности. Действительно, гравитационная константа имеет размерность $\hbar/m^2$, а потому безразмерная амплитуда вероятности порядка G^n будет расходиться как интеграл $\int p^{2n-1}\,dp$ по импульсному пространству. В связи с этим теория гравитации более похожа на неперенормируемые теории, например на фермиевскую теорию бета-распада, чем на квантовую электродинамику.

Несмотря на эти трудности, из квантовой теории гравитации можно сделать один очень важный вывод: невозможно построить лоренц-инвариантную квантовую теорию частиц с нулевой массой и спиральностью ± 2 без введения в теорию калибровочной инвариантности некоторого вида [29, 30], ибо только в этом случае взаимодействие нетензорного поля $h_{\mu\nu}$ может приводить к лоренц-инвариантным амплитудам переходов. Однако в § 2 мы видели, что теория гравитационного излучения калибровочно-инвариантна, так как общая теория относительности общековариантна, а, как следует из обсуждения, приведенного в § 1 гл. 4, общая ковариантность есть лишь математическое выражение принципа эквивалентности. Таким образом, оказывается, что принцип эквивалентности, на котором основана вся классическая общая теория относительности, есть сам по себе следствие требования, чтобы квантовая теория гравитации была лоренц-инвариантна.

§ 9. Гравитационные возмущения в гравитационных полях

В предыдущих параграфах была описана лоренц-инвариантная теория слабых гравитационных волн в пространстве-времени Минковского. В дальнейшем, в гл. 15, посвященной космологии, нам понадобится общая ковариантная теория распространения слабых гравитационных возмущений в гравитационном поле $g_{\mu\nu}$.

Согласно уравнению (6.1.5), если при некотором возмущении величина $g_{\mu\nu}$ изменяется на $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ при малом $\delta g_{\mu\nu}$, то в первом порядке по $\delta g_{\mu\nu}$ имеем

$$\delta R_{\mu\varkappa} = \frac{\partial \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} + \delta\Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\eta} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\nu}\Gamma^{\eta}_{\mu\lambda} - \delta\Gamma^{\eta}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} - \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta}\Gamma^{\eta}_{\mu\varkappa},$$

где $\delta\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\eta}$ есть изменение аффинной связности:

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -g^{\lambda\rho}\delta g_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[\frac{\partial \delta g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \delta g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \delta g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right].$$

Отметим, что $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ можно выразить в виде тензора

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[(\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\rho\nu})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho}\right]. \qquad (10.9.1)$$

Ковариантные производные здесь, естественно, построены с помощью невозмущенной аффинной связности $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Так как $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ есть тензор, то изменение тензора Риччи можно также записать через ковариантные производные следующим образом:

$$\delta R_{\mu\varkappa} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\varkappa} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa})_{;\lambda}. \qquad (10.9.2)$$

Это соотношение известно как *тождество Палатини*. Выраженное через $\delta g_{\mu\nu}$, оно имеет вид

$$\delta R_{\mu\varkappa} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[(\delta g_{\lambda\rho})_{;\mu;\varkappa} - (\delta g_{\rho\mu})_{;\varkappa;\lambda} - (\delta g_{\rho\varkappa})_{;\mu;\lambda} + (\delta g_{\mu\varkappa})_{;\rho;\lambda}\right]. \qquad (10.9.3)$$

Предполагается, что невозмущенное гравитационное поле $g_{\mu\nu}$ и тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ удовлетворяют уравнениям поля Эйнштейна. Условием того, что этим же уравнениям удовлетворяют и $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}$, является

$$\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[(\delta g_{\lambda\rho})_{;\mu;\varkappa} - (\delta g_{\rho\mu})_{;\varkappa;\lambda} - (\delta g_{\rho\varkappa})_{;\mu;\lambda} + (\delta g_{\mu\varkappa})_{;\rho;\lambda}\right] =$$

$$= -8\pi G\left[\delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\delta T_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\eta}T^{\lambda\eta} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}\right]. \qquad (10.9.4)$$

Изменение источника поля $\delta T_{\mu\nu}$ подчиняется следующему закону сохранения:

$$(\delta T^{\nu\mu})_{;\mu} + T^{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} + T^{\lambda\mu}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = 0. \qquad (10.9.5)$$

Общая ковариантность этих уравнений очевидна.

Так же как и для гравитационных полей, заданных в пространстве-времени Минковского, здесь важно отличать физическое возмущение от простого изменения системы координат. С этой целью рассмотрим произвольное бесконечно малое преобразование координат

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu(x), \tag{10.9.6}$$

где $\varepsilon^\mu(x)$ — некое инфинитезимальное векторное поле. Частные производные, возникающие в правилах преобразования тензора, имеют здесь вид

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \varepsilon^\mu(x)}{\partial x^\nu},$$

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu_\mu + \frac{\partial \varepsilon^\nu(x)}{\partial x^\mu} + 0(\varepsilon^2).$$

Поскольку уравнения Эйнштейна общековариантны, а $g_{\mu\nu}(x)$ является решением уравнения для тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}(x)$, то решением уравнения для $T'_{\mu\nu}(x)$ служит $g'_{\mu\nu}(x)$, определяемое следующим образом:

$$g'_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x') + \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}\varepsilon^\lambda(x) + 0(\varepsilon^2) =$$

$$= g_{\mu\nu}(x) + g_{\lambda\nu}(x)\frac{\partial \varepsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} + g_{\lambda\mu}(x)\frac{\partial \varepsilon^\lambda(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}\varepsilon^\lambda(x)$$

и аналогичным образом определяется $T'_{\mu\nu}(x)$. Записывая это выражение в ковариантной форме, мы можем сделать вывод, что тензор

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \Delta_\varepsilon g_{\mu\nu}(x) \tag{10.9.7}$$

является решением уравнений Эйнштейна для тензора энергии-импульса, имеющего вид

$$T'_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x) + \Delta_\varepsilon T_{\mu\nu}(x), \tag{10.9.8}$$

где

$$\Delta_\varepsilon g_{\mu\nu} \equiv \varepsilon_{\mu;\nu} + \varepsilon_{\nu;\mu}, \tag{10.9.9}$$

$$\Delta_\varepsilon T_{\mu\nu} \equiv T^\lambda{}_\mu \varepsilon_{\lambda;\nu} + T^\lambda{}_\nu \varepsilon_{\lambda;\mu} + T_{\mu\nu;\lambda}\varepsilon^\lambda. \tag{10.9.10}$$

(Заметим, что $\Delta_\varepsilon g_{\mu\nu}$ имеет ту же форму, что и $\Delta_\varepsilon T_{\mu\nu}$, за исключением того, что ковариантные производные от $g_{\mu\nu}$ равны нулю, в то время как у $T_{\mu\nu}$ они существуют.) Отсюда с помощью прямого вычисления можно показать, что $\delta g_{\mu\nu} = \Delta_\varepsilon g_{\mu\nu}$ есть решение уравнения поля (10.9.4) для возмущения источника $\delta T_{\mu\nu} = \Delta_\varepsilon T_{\mu\nu}$. Но так как уравнение (10.9.4) является *линейным* дифференциальным уравнением, то, задавая любое решение $\delta g_{\mu\nu}$, можно всегда найти другие решения вида $\delta g_{\mu\nu} + \Delta_\varepsilon g_{\mu\nu}$ с тем же

самым физическим содержанием. Свобода прибавлять к произвольным функциям $\varepsilon^\mu(x)$ члены $\Delta_\varepsilon g_{\mu\nu}$ соответствует «калибровочной инвариантности», обсужденной в § 1 этой главы.

Оператор Δ_ε, введенный в уравнениях (10.9.9) и (10.9.10), можно обобщить на произвольные тензоры, считая, что члены, содержащие свертку тензора с ковариантной производной ε, входят со знаком «+» для каждого ковариантного индекса, и со знаком «—» для каждого контравариантного индекса, т. е. для скаляров, векторов, а также для контравариантных и смешанных тензоров второго ранга эту операцию можно определить так:

$$\Delta_\varepsilon S \equiv S_{;\lambda}\varepsilon^\lambda,$$

$$\Delta_\varepsilon V_\mu = V^\lambda \varepsilon_{\lambda;\mu} + V_{\mu;\lambda}\varepsilon^\lambda,$$

$$\Delta_\varepsilon U^\mu \equiv -U^\lambda \varepsilon^\mu{}_{;\lambda} + U^\mu{}_{;\lambda}\varepsilon^\lambda,$$

$$\Delta_\varepsilon T^{\mu\nu} \equiv -T^{\lambda\nu}\varepsilon^\mu{}_{;\lambda} - T^{\mu\lambda}\varepsilon^\nu{}_{;\lambda} + T^{\mu\nu}{}_{;\lambda}\varepsilon^\lambda,$$

$$\Delta_\varepsilon T^\mu{}_\nu \equiv -T^\lambda{}_\nu \varepsilon^\mu{}_{;\lambda} + T^\mu{}_\lambda \varepsilon^\lambda{}_{;\nu} + T^\mu{}_{\nu;\lambda}\varepsilon^\lambda$$

и т. д. Оператор Δ_ε, определенный таким путем, известен как *производная Ли*. В общем случае бесконечно малое координатное преобразование любого тензора T приводит к новому тензору, равному прежнему тензору *в той же самой координатной точке* плюс производная Ли $\Delta_\varepsilon T$. Легко показать, что оператор Δ_ε имеет те же самые общие свойства, как и обычные или ковариантные производные, а именно он линеен:

$\Delta_\varepsilon [aA^\mu{}_\nu + bB^\mu{}_\nu] = a\Delta_\varepsilon A^\mu{}_\nu + b\Delta_\varepsilon B^\mu{}_\nu$, a, b — постоянные скаляры,

подчиняется правилу Лейбница

$$\Delta_\varepsilon (A^\mu{}_\nu B^\lambda) = B^\lambda \Delta_\varepsilon A^\mu{}_\nu + A^\mu{}_\nu \Delta_\varepsilon B^\lambda$$

и коммутирует с оператором свертки

$$\delta^\lambda_\nu \Delta_\varepsilon T^{\mu\nu}{}_\lambda = \Delta_\varepsilon T^{\mu\lambda}{}_\lambda \equiv -T^{\nu\lambda}{}_\lambda \varepsilon^\mu{}_{;\nu} + T^{\mu\lambda}{}_{\lambda;\nu}\varepsilon^\nu.$$

В частности, производная Ли тензора энергии-импульса идеальной несжимаемой жидкости равна

$$\Delta_\varepsilon T_{\mu\nu} = p\Delta_\varepsilon g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Delta_\varepsilon p + (p+\rho)[U_\mu \Delta_\varepsilon U_\nu + U_\nu \Delta_\varepsilon U_\mu] + \\ + U_\mu U_\nu [\Delta_\varepsilon p + \Delta_\varepsilon \rho].$$

Поэтому $\Delta_\varepsilon g_{\mu\nu}$ есть решение уравнений Эйнштейна для жидкости, скорость, давление и плотность которой возмущаются величинами $\Delta_\varepsilon U_\mu$, $\Delta_\varepsilon p$ и $\Delta_\varepsilon \rho$ соответственно.

Решение уравнений поля (10.9.4), вообще говоря, очень сложно, за исключением простого случая однородной и изотропной невозмущенной метрики $g_{\mu\nu}$. Этот случай будет рассмотрен в § 10 гл. 15.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Гравитационное излучение в ОТО

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, 1962.
Weber J., General Relativity and Gravitational Waves, Interscience Publishers, 1961, Ch. 7, 8 (см. перевод: *Вебер Дж.*, Общая теория относительности и гравитационные волны, ИЛ, 1962).

Точные решения уравнений Эйнштейна

Bondi H., Some Special Solutions of the Einstein Equations, в книге Lectures on General Relativity, Prentice-Hall, 1965, p. 375.
Brill D. R., General Relativity: Selected Topics of Current Interest, Nuovo Cimento, Suppl., 2, № 1 (1964).
Ehlers J., Kundt W., Exact Solutions of the Gravitational Field Equations, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. L. Witten, Wiley, 1962, p. 49.
Петров А. З., Пространства Эйнштейна, Физматгиз, 1961.
Pirani F. A. E., Gravitational Radiation, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research (см. выше), p. 199.
Pirani F. A. E., Introduction to Gravitational Radiation Theory, в книге Lectures on General Relativity (см. выше), p. 249.
Pirani F. A. E., Survey of Gravitational Radiation Theory, в книге Recent Developments in General Relativity, Pergamon Press, 1962, p. 89.
Sachs R. K., Gravitational Radiation, в книге Relativity, Groups, and Topology, ed. C. DeWitt and B. DeWitt, New York, 1964, p. 523.
Sachs R. K., Gravitational Waves, в книге Relativity Theory and Astrophysics. 1. Relativity and Cosmology, ed. J. Ehlers, American Mathematical Society, 1967, p. 129.

Квантовая теория гравитации

DeWitt B. S., Dynamical Theory of Groups and Fields, в книге Relativity, Groups, and Topology (см. выше), p. 587.
DeWitt B. S., The Quantization of Geometry, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research (см. выше), p. 266.
Dirac P. A. M., The Quantization of the Gravitational Field, в книге Contemporary Physics — Trieste Symposium 1968, ed. A. Salam, Vol. 1, International Atomic Energy Agency, 1969, p. 539.
Komar A., The Quantization Program for General Relativity, в книге Relativity — Proceedings of the Relativity Conference in the Midwest, ed. M. Carmeli, S. I. Fickler and L. Witten Plenum Press, 1970.
Weinberg S., The Quantum Theory of Massless Particles, в книге Lectures on Particles and Field Theory, Prentice-Hall, 1965.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Weber J.*, Phys. Rev., **117**, 306 (1960); Phys. Rev. Lett., **17**, 1228 (1966); Phys. Rev. Lett., **20**, 1307 (1968); Phys. Today, **21**, 34 (1968); статья в книге Relativity — Proceedings of the Relativity Conference in the Midwest, Plenum Press, 1970, p. 133; Nuovo Cimento Lett., Ser. I, **4**, 653 (1970).
2. *Chandrasekhar S., Nutku Y.*, Astrophys. J., **158**, 55 (1969).
3. *Chandrasekhar S., Esposito F. P.*, Astrophys. J., **160**, 153 (1970).
4. *Gold T.*, Nature, **218**, 731 (1968); **221**, 25 (1968).

5. *Gunn J. E., Ostriker J. P.*, Nature, **221**, 454 (1969); Phys. Rev. Lett., **22**, 728 (1969).
6. *Ostriker J. P., Gunn J. E.*, Astrophys. J., **157**, 1395 (1969).
7. *Schiff L. I.*, Quantum Mechanics 3rd ed., McGraw-Hill, 1968 (см. перевод: *Шифф Л.*, Квантовая механика, ИЛ, 1959).
8. *Watson G. N.*, Theory of Bessel Functions, rev. ed., Macmillan, 1944, p. 128 (см. перевод: *Ватсон Д. Н.*, Теория бесселевых функций, М., 1949).
9. *Kramers H. A.*, Atti. Congr. Intern. Fisici, Como (1927).
10. *Kramers H. A.*, Collected Scientific Papers, North-Holland, 1956.
11. *Feenberg E.*, Phys. Rev., **40**, 40 (1932).
12. *Bohr N., Peierls R. E., Placzek G.*, Nature, **144**, 200 (1939).
13. *Weber J.*, Phys. Rev. Lett., **21**, 395 (1968).
14. *Douglass D. H., Tyson J. A.*, Доклад на 3-й конференции по теории относительности, Кембридж, июнь 1970 (не опубликовано).
15. *Bolt B. A.*, в книге Physics and Chemistry of the Earth, ed. L. A. Ahrens, F. Press, and S. K. Runcorn, Pergamon Press, 1964, p. 55.
16. *Forward R. L., Zipoy D., Weber J., Smith S., Benioff H.*, Nature, **189**, 473 (1961).
17. *Weber J., Larson J. V.*, J. Geophys. Res., **71**, 6005 (1966).
18. *Wiggins R. A., Press F.*, J. Geophys. Res., **74**, 5351 (1969).
19. *Dyson F. J.*, Astrophys. J., **156**, 529 (1969).
20. *Weber J.*, в книге Physics of the Moon, ed S. F. Singer American Astronautical Society, 1967, p. 199.
21. *Weber J.*, Phys. Rev. Lett., **22**, 1320 (1969); **24**, 276 (1970).
22. *Weber J.*, Phys. Rev. Lett., **25**, 180 (1970).
23. *Weber J.*, Proceedings of the Midwest Conference on Theoretical Physics, Notre Dame, Indiana, April 1970, p. 118 (не опубликовано).
24. *Field G. B., Rees M. J., Sciama D. W.*, Comments on Astrophys. and Space Phys., **1**, 187 (1969). (О значении потерь масс галактиками за счет гравитационного излучения.)
25. *Weber J.*, Доклад на 3-й конференции по теории относительности, Кембридж, июнь 1970 (не опубликовано).
26. *Fairbank W. M.*, Доклад на 3-й конференции по теории относительности, Кембридж, июнь 1970 (не опубликовано).
27. *Брагинский В. Б.*, Доклад на 3-й конференции по теории относительности, Кембридж, июнь 1970 (не опубликовано).
28. *Брагинский В. Б., Зельдович Я. Б., Руденко В. Н.*, Письма ЖЭТФ, **10**, 280 (1969).
29. *Weinberg S.*, Phys. Lett., 9, 357 (1964); Phys. Rev., **135**, B1049 (1964).
30. *Weinberg S.*, Phys. Rev., **140**, B516 (1965).
31. *Huang K.*, Statistical Mechanics, Wiley, 1963 (см. перевод: *Хуанг К.*, Статистическая механика, «Мир», 1966, § 12.1).
32. *Einstein A.*, Phys. Zs., 18, 121 (1917) (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1965, т. 1, стр. 530).
33. *Weinberg S.*, Phys. Rev., **138**, B988 (1965).
34. *Arnowitt R. L., Deser S.*, Phys. Rev., **113**, 745 (1959).
35. *Arnowitt R. L., Deser S., Misner C. W.*, Phys. Rev., **116**, 1322 (1959); **117**, 1595 (1960); J. Math. Phys., **1**, 434 (1960); Phys. Rev., **118**, 1100 (1960); Nuovo Cimento, 19, 668 (1961); Phys. Rev., **120**, 313, 321 (1960); **121**, 1556 (1961); **122**, 997 (1961); Ann. Phys. (N.Y.), **11**, 116 (1960).
36. *Dirac P. A. M.*, Phys. Rev., **114**, 924 (1959).
37. *Feynman R. P.*, Acta Phys. Polon., **24**, 697 (1963).
38. *Fadeev L. D., Popov V. N.*, Phys. Lett., **25B**, 29 (1967).
39. *Mandelstam S.*, Phys. Rev., **175**, 1604 (1968).
40. *DeWitt B. S.*, Phys. Rev., **162**, 1195, 1239 (1967); erratum, Phys. Rev., **171**, 1834 (1968).
41. *Bjorken J. D., Drell S. D.*, Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, 1965, Ch. 19.

Все разрушается,
Нет места для покоя,
И лишь анархия заполнила миры.

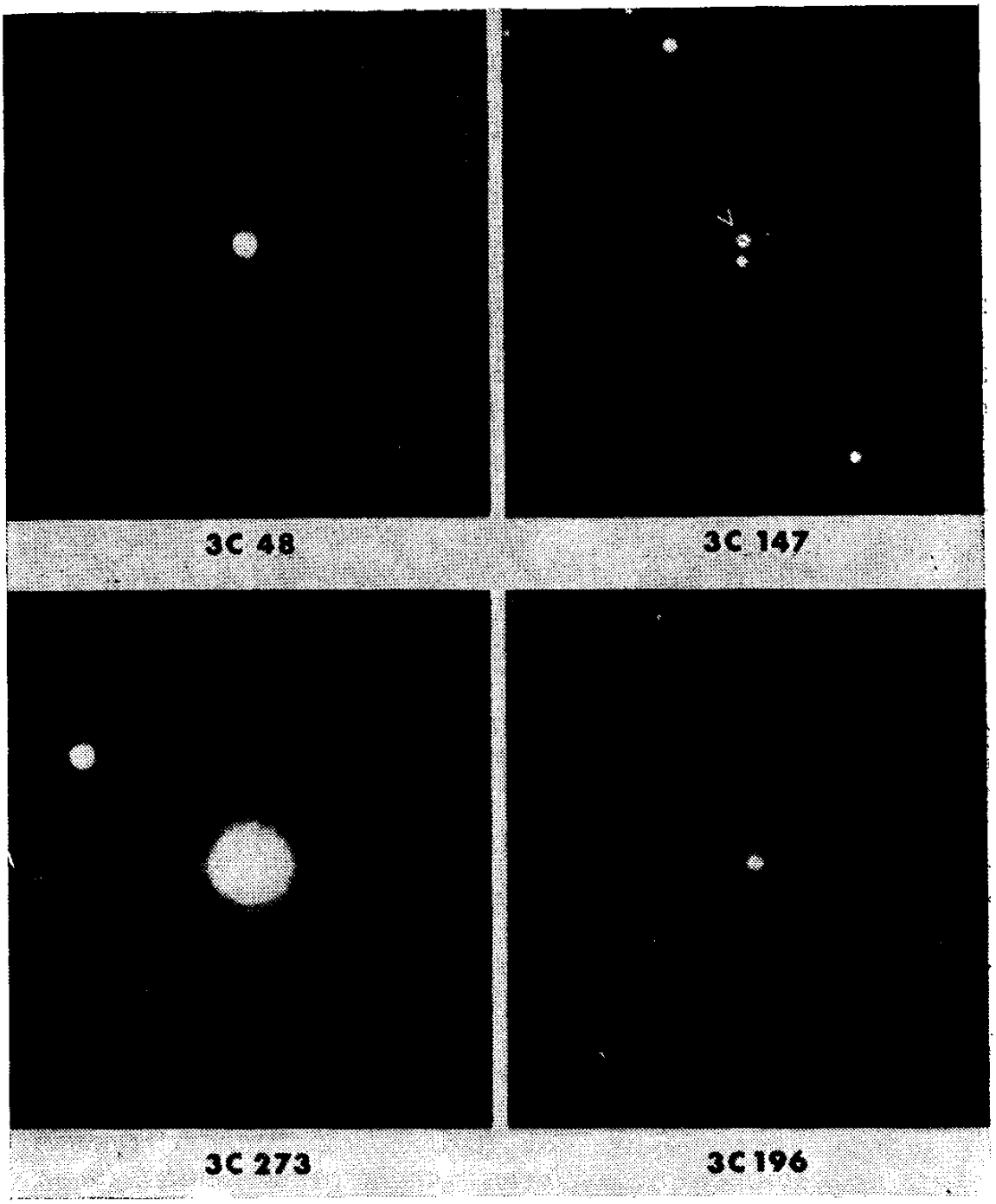
В. Ейтс, Второе пришествие

Глава 11
РАВНОВЕСИЕ В ЗВЕЗДАХ И КОЛЛАПС

Гравитационные поля настолько слабы, что обычно в своей деятельности астрофизик пренебрегает эффектами общей теории относительности. В этой главе мы рассмотрим различные объекты, для которых релятивистские эффекты играют важную, а в некоторых случаях даже доминирующую роль. Одним из таких объектов является нейтронная звезда —«холодная» звезда, состоящая в основном из нейтронов и удерживающаяся от коллапса за счет давления вырожденного нейтронного газа. В качестве другого примера можно назвать сверхтяжелую звезду, т. е. существующее за счет радиационного давления гигантское тело, в котором гравитационные эффекты могут обеспечивать баланс между устойчивостью и неустойчивостью. Самым впечатляющим из всех объектов является черная дыра — тело, ввергнутое в безысходный гравитационный коллапс.

Существование нейтронных звезд и черных дыр было предсказано на чисто теоретической основе в 1930 г. главным образом в работах Дж. Роберта Оппенгеймера и его сотрудников. Однако эти экзотические объекты приводились лишь в виде курьезов в учебниках, пока начиная с 1960 г. в результате наблюдений в радиочастотном и оптическом диапазонах не стало известно большое число новых странных объектов.

Первыми были обнаружены квазизвездные объекты (КЗО, или квазар), похожие на звезды по своим оптическим изображениям, содержащие часто мощные компактные радиоисточники и дающие красное смещение $\Delta\lambda/\lambda$ в пределах от 0,131 до 3 и больше (фиг. 11.1). Можно выдвинуть три разных объяснения этого красного смещения, а именно: оно может возникать из-за эффекта Доплера, вызванного либо локальным взрывом, либо общим космологическим удалением очень отдаленных объектов (см. гл. 14), или же оно может появляться из-за мощных гравитационных полей внутри самих объектов. В любом случае, вероятно, гравитационные эффекты будут играть важную роль в объяснении существования квазаров. Если эти объекты расположены относительно близко, но движутся с релятивистскими скоростями, то должен быть найден некоторый источник энергии, который мог бы с эффективностью, близкой к 100%, превращать массу в кинети-



Фиг. 11.1. Четыре квазара.

Фотографии были получены на 200-дюймовом телескопе, расположенном на горе Паломар. Положения квазаров определены радиоастрономическими методами.

ческую энергию. Если квазары находятся на космологических расстояниях, то их видимая оптическая светимость указывает на то, что их абсолютная светимость намного выше, чем у самых больших галактик, а для этого опять-таки им необходимо иметь новый мощный источник энергии. Только гравитационное тяготение, по-видимому, способно создавать источники таких энергий, и в связи с этим открытие квазаров пробудило вновь интерес

к явлению гравитационного коллапса. И наконец, если красное смещение у квазаров вызвано гравитацией, то эти объекты должны быть настолько сильно сжаты, что их структура может быть описана только с помощью общей теории относительности, а не ньютоновской механики.

Квазары являются только наиболее эффектными образцами в ряду плохо изученных объектов, обнаруженных в недавние годы, таких, как галактики Сейферта, гигантские эллиптические галактики с мощными компактными радиоисточниками, источники рентгеновского излучения, ядра галактик, которые иногда видны в состоянии взрыва, и т. д. Совершенно не ясно, сможет ли общая теория относительности хоть как-нибудь справиться с этими объектами.

В последние несколько лет были обнаружены еще одни представители астрономической кунсткамеры. Это пульсары — радиоисточники, пульсирующие с частотой от нескольких десятых герца до 30 Гц. Пульсары часто связаны с оптическими и даже с рентгеновскими источниками, пульсирующими с той же частотой. В настоящее время складывается общее мнение, что пульсары — это нейтронные звезды, теоретически открытые еще в 1930 г., но обладающие огромной скоростью вращения, в результате чего тем или иным образом возникают наблюдаемые пульсации.

Профессиональное обсуждение квазаров, ядер галактик, пульсаров и других подобных объектов потребовало бы от нас рассмотрения эффектов переноса энергии излучения фотонов и нейтрино, турбулентности, ядерных сил, магнитных полей, и прежде всего эффекта вращения. Кроме того, подобный подход потребовал бы обсуждения результатов огромной вычислительной работы с применением вычислительной техники. Работая над данной главой, я старался ограничиться простейшими вычислениями, которые можно провести аналитически без особых затруднений. Эти простые вычисления не очень помогают в понимании детальной картины астрономических наблюдений, однако позволяют оценить ту роль, которую общая теория относительности может играть в изучении астрофизических явлений.

§ 1. Дифференциальные уравнения для звездных структур

Рассмотрим прежде всего общерелятивистский механизм вычисления давления, плотности и гравитационных полей внутри сферически симметричных статических звезд.

Метрика должна быть выбрана в «стандартной» форме (§ 1 гл. 8):

$$g_{rr} = A(r), \qquad g_{\theta\theta} = r^2, \qquad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta,$$
$$g_{tt} = -B(r), \qquad g_{\mu\nu} = 0 \text{ для } \mu \neq \nu. \tag{11.1.1}$$

Предположим, что тензор энергии-импульса здесь тот же, что и у идеальной жидкости (§ 4 гл. 5):

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)\, U_\mu U_\nu, \tag{11.1.2}$$

где p — собственное давление, ρ — плотность собственной полной энергии, а U_μ — 4-вектор скорости, определенный так, что

$$g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = -1. \tag{11.1.3}$$

Поскольку жидкость находится в покое, имеем

$$U_r = U_\theta = U_\varphi = 0, \quad U_t = -(-g^{tt})^{-1/2} = -\sqrt{B(r)}. \tag{11.1.4}$$

Наше предположение о временно́й независимости и сферической симметрии приводит к тому, что p и ρ являются функциями только радиальной координаты r.

Используя соотношения (11.1.1) — (11.1.4) и компоненты тензора Риччи, заданные выражением (8.1.13), находим, что уравнения Эйнштейна (7.1.15) имеют вид

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rA} = -4\pi G(\rho - p)A, \tag{11.1.5}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A}\left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{A} = -4\pi G(\rho - p)r^2, \tag{11.1.6}$$

$$R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rA} = -4\pi G(\rho + 3p)B. \tag{11.1.7}$$

Штрих означает d/dr. (Мы не станем ниже выписывать уравнение для $R_{\varphi\varphi}$, поскольку оно идентично уравнению для $R_{\theta\theta}$ или уравнениям для недиагональных элементов $R_{\mu\nu}$, утверждающим просто, что нуль равен нулю.) Напомним, кроме того, уравнения гидростатического равновесия (5.4.5)

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2p'}{p+\rho}. \tag{11.1.8}$$

Первым шагом в решении этих уравнений будет построение уравнения только для $A(r)$. Для этого запишем прежде всего

$$\frac{R_{rr}}{2A} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{R_{tt}}{2B} = -\frac{A'}{rA^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{Ar^2} = -8\pi G\rho \tag{11.1.9}$$

и перепишем это уравнение следующим образом:

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = 1 - 8\pi G\rho r^2. \tag{11.1.10}$$

Решение этого уравнения при $A(0)$ конечном имеет вид

$$A(r) = \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1}, \tag{11.1.11}$$

где

$$\mathscr{M}(r) \equiv \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\, dr' \qquad (11.1.12)$$

Используем выражения (11.1.11) и (11.1.8), чтобы исключить из уравнения (11.1.6) гравитационные поля $A(r)$, $B(r)$:

$$-1+\left[1-\frac{2G\mathscr{M}}{r}\right]\left[1-\frac{rp'}{p+\rho}\right]+\frac{G\mathscr{M}}{r}-4\pi G\rho r^2=-4\pi G(\rho-p)r^2.$$

Перепишем последнее уравнение следующим образом:

$$-r^2p'(r)=G\mathscr{M}(r)\rho(r)\left[1+\frac{p(r)}{\rho(r)}\right]\left[1+\frac{4\pi r^3p(r)}{\mathscr{M}(r)}\right]\times$$
$$\times\left[1-\frac{2G\mathscr{M}(r)}{r}\right]^{-1}. \qquad (11.1.13)$$

Это — основное уравнение ньютоновской астрофизики (см. § 3 гл. 11), в которое введены общерелятивистские поправки в виде трех последних множителей.

Эту главу мы посвятим прежде всего изоэнтропическим звездам, т. е. таким звездам, в которых величина энтропии s, приходящаяся на один нуклон, не меняется по всей звезде. Это бывает в случае двух совершенно разных типов звезд.

А. Звезды при абсолютном нуле. Когда звезда полностью исчерпала свое термоядерное топливо, она может стать белым карликом (§ 3 гл. 11) или нейтронной звездой (§ 4 гл. 11), в которых температура практически равна абсолютному нулю. Тогда, согласно теореме Нернста, энтропия, приходящаяся на один нуклон, будет равна нулю во всей звезде.

Б. Звезды в состоянии конвективного равновесия. Если наиболее действенным механизмом передачи энергии внутри звезды является конвекция, то в равновесии энтропия, приходящаяся на один нуклон, должна быть почти постоянной во всей звезде, ибо в противном случае малый элемент среды, содержащий A нуклонов, будет приобретать или терять энергию $A\Delta s/T$ при переходе от одной части звезды к другой, и конвекция будет нарушать распределение энергии. Сверхтяжелые звезды, обсуждаемые в § 5 гл. 11, обычно считаются находящимися в конвективном равновесии.

Будем считать также, что звезды, которые мы рассматриваем, имеют постоянный химический состав повсюду внутри звезды.

Важность принятых предположений состоит в том, что в общем случае давление p можно выразить как функцию плотности ρ,

энтропии на один нуклон s и химического состава. Следовательно, если s и химический состав постоянны повсюду в звезде, то $p(r)$ можно считать функцией только от $\rho(r)$ без *явной* зависимости от r.

Задавая $p(r)$ как функцию $p(\rho(r))$, рассмотрим два дифференциальных уравнения первого порядка для $p(r)$ и $\mathscr{M}(r)$. Одно из них — это уравнение (11.1.13), а другое получается дифференцированием уравнения (11.1.12):

$$\mathscr{M}'(r) = 4\pi r^2 \rho(r). \tag{11.1.14}$$

Кроме того, из (11.1.12) следует начальное условие

$$\mathscr{M}(0) = 0. \tag{11.1.15}$$

Уравнения (11.1.13) — (11.1.15) вместе с уравнением состояния, задающим $p(\rho)$, смогут служить для определения $\rho(r)$, $\mathscr{M}(r)$, $p(r)$ и т. д. повсюду в звезде, как только будет задано *второе* начальное условие, т. е. величина $\rho(0)$. Дифференциальные уравнения (11.1.13) и (11.1.14) необходимо проинтегрировать от центра звезды до некоторого радиуса $r = R$ внутри звезды, в которой $p(\rho(r))$ становится равным нулю. Расстояние от центра звезды до R мы будем рассматривать как радиус звезды с центральной плотностью $\rho(0)$.

Вернемся к вычислению метрики. Определив $\rho(r)$, $\mathscr{M}(r)$ и и $p(r)$, можно с помощью (11.1.11) немедленно получить $A(r)$; чтобы найти $B(r)$, используем уравнение (11.1.13), позволяющее переписать (11.1.8) в виде

$$\frac{B'}{B} = \frac{2G}{r^2}[\mathscr{M} + 4\pi r^3 p]\left[1 - \frac{2G\mathscr{M}}{r}\right]^{-1}.$$

Решение этого уравнения при условии, что $B(\infty) = 1$, имеет вид

$$B(r) = \exp\left\{-\int_r^\infty \frac{2G}{r^2}[\mathscr{M}(r') + 4\pi r'^3 p(r')]\left[1 - \frac{2G\mathscr{M}(r')}{r'}\right]^{-1} dr'\right\} \tag{11.1.16}$$

Таким образом, решение найдено. [Кстати, у нас нет необходимости использовать отдельно уравнения (11.1.5) и (11.1.7) для R_{rr} и R_{tt}, поскольку эти уравнения следуют из уравнений (11.1.6), (11.1.8) и (11.1.9), которые *уже применялись* в наших вычислениях. Это не является неожиданным, поскольку уравнение (11.1.8) как раз и является уравнением сохранения импульса, которое выводится *с помощью* тождеств Бианки из уравнений Эйнштейна (11.1.5) — (11.1.7).]

Вне звезды $p(r)$ и $\rho(r)$ обращаются в нуль, а $\mathscr{M}(r)$ становится постоянным, $\mathscr{M}(R)$; поэтому из соотношений (11.1.11) и (11.1.16) следует

$$B(r) = A^{-1}(r) = 1 - \frac{2G\mathscr{M}(R)}{r} \quad \text{для } r \geqslant R. \tag{11.1.17}$$

Из обсуждения, проведенного в § 2 гл. 8, следует, что постоянная $\mathscr{M}(R)$, появляющаяся в асимптотическом гравитационном поле (11.1.17), должна быть равна массе звезды M, определяемой как полная энергия звезды и ее гравитационного поля, т. е.

$$M = \mathscr{M}(R) \equiv \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r)\, dr. \qquad (11.1.18)$$

Таким образом, (11.1.17) является просто внешним решением Шварцшильда.

Может показаться парадоксальным, что M, которое должно содержать энергию гравитационного поля, задается выражением (11.1.18) в виде интеграла от плотности энергии только вещества (включая излучение). Выход состоит в том, что (11.1.18) *не* утверждает, что M есть полная энергия вещества. Полная энергия вещества отнюдь не является вполне определенной величиной, но ее все же можно вычислить, разбивая звезду на имеющие малый объем элементы, энергия которых измеряется в локально-инерциальной системе отсчета; это дает энергию вещества в виде

$$M_{\text{вещества}} \equiv \int \sqrt{g}\, \rho\, dr\, d\theta\, d\phi = \int_0^R 4\pi r^2 \sqrt{A(r)\, B(r)}\, \rho(r)\, dr. \qquad (11.1.19)$$

Разность между (11.1.18) и (11.1.19) можно считать энергией гравитационного поля. Однако такое разбиение не является особенно полезным и не будет использоваться ниже.

Гораздо большую информацию можно извлечь, сравнивая выражение (11.1.18) с энергией M_0, которую вещество звезды имело бы, будучи «измельченным до бесконечности». Эта величина есть просто

$$M_0 = m_{\text{н}} N, \qquad (11.1.20)$$

где $m_{\text{н}} = 1{,}66 \cdot 10^{-24}$ г — масса покоя нуклона, а N — число нуклонов в звезде. Число нуклонов определяется как

$$N = \int \sqrt{g} J_{\text{н}}{}^0\, dr\, d\theta\, d\psi = \int_0^R 4\pi r^2 \sqrt{A(r)\, B(r)}\, J_{\text{н}}{}^0(r)\, dr, \qquad (11.1.21)$$

где $J_{\text{н}}{}^{\mu}$ — сохраняющийся ток числа нуклонов. Удобно выразить $J_{\text{н}}{}^0$ через *собственную* плотность числа нуклонов n, т. е. плотность числа нуклонов, измеренную в локально-инерциальной системе, связанной со звездой. Величина n определяется так:

$$n = -U_{\mu} J_{\text{н}}{}^{\mu} = \sqrt{B}\, J_{\text{н}}{}^0. \qquad (11.1.22)$$

[См. соотношения (11.1.4). Напомним, что в локально-инерциальной системе координат $U_0 = -1$.] Тогда выражение (11.1.21)

принимает вид

$$N = \int_0^R 4\pi r^2 \sqrt{A(r)}\, n(r)\, dr = \int_0^R 4\pi r^2 \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1/2} n(r)\, dr. \quad (11.1.23)$$

Собственная плотность числа нуклонов $n(r)$ является функцией собственной плотности $\rho(r)$, химического состава и энтропии s на один нуклон, поэтому, раз мы задали $\rho(0)$, величины $n(r)$ и N фиксированы для звезды с заданными постоянными s и химическим составом.

Внутренняя энергия звезды задается в виде

$$E \equiv M - m_{\text{н}} N. \quad (11.1.24)$$

Определим следующим образом плотность собственной внутренней энергии вещества:

$$e(r) \equiv \rho(r) - m_{\text{н}} n(r) \quad (11.1.25)$$

и запишем (11.1.24) в виде

$$E = T + V, \quad (11.1.26)$$

где T и V — соответственно тепловая и гравитационная энергии звезды:

$$T \equiv \int_0^R 4\pi r^2 \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1/2} e(r)\, dr. \quad (11.1.27)$$

$$V \equiv \int_0^R 4\pi r^2 \left\{1 - \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1/2}\right\} \rho(r)\, dr. \quad (11.1.28)$$

Разлагая квадратные корни, получаем

$$T = \int_0^R 4\pi r^2 \left\{1 + \frac{G\mathcal{M}(r)}{r} + \ldots\right\} e(r)\, dr. \quad (11.1.29)$$

$$V = -\int_0^R 4\pi r^2 \left\{\frac{G\mathcal{M}(r)}{r} + \frac{3G^2\mathcal{M}^2(r)}{2r^2} + \ldots\right\} \rho(r)\, dr. \quad (11.1.30)$$

Первые члены в T и V нам знакомы — это есть ньютоновские величины тепловой и гравитационной энергий звезды; заметим,

в частности, что первый член в V можно переписать так:

$$-G\int_0^R 4\pi r\mathscr{M}(r)\,\rho(r)\,dr = -\frac{G}{2}\int_0^R \frac{1}{r}\,d\left(\mathscr{M}^2(r)\right) =$$

$$= -\frac{GM^2}{2R} - \frac{G}{2}\int_0^R \frac{\mathscr{M}^2(r)}{r^2}\,dr = \frac{\phi(R)\,\mathscr{M}(R)}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^R \mathscr{M}(r)\,d\phi(r) = \frac{1}{2}\int_0^R \phi(r)\,d\mathscr{M}(r), \qquad (11.1.31)$$

где ϕ — ньютоновский потенциал, задаваемый внутри звезды следующим образом:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{R} - G\int_r^R \frac{\mathscr{M}(r')}{r'^2}\,dr'.$$

Высшие члены, входящие в выражения для T и V, мы обсудим в § 5 гл. 11.

Повторим основной вывод: приняв, что звезда имеет вполне определенные, постоянные по всему объему энтропию на нуклон и химический состав, можно определить все свойства звезды, включая $\rho(r)$, $p(r)$, $n(r)$, $e(r)$, M, N и E, как функции центральной плотности $\rho(0)$. Все это *не* относится к обычным звездам типа Солнца, в которых распределение энтропии не постоянно в объеме, а должно быть определено из уравнения радиационного равновесия. Однако материал, рассмотренный в данном параграфе, создает достаточную основу для изучения экзотических структур, о которых шла речь в начале этой главы.

§ 2. Устойчивость

Получив решение фундаментальных уравнений (11.1.13) и (11.1.14), мы еще не завершили работу. Такое решение описывает равновесное состояние звезды, однако равновесие может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В большинстве задач астрофизиков интересуют только устойчивые решения.

Для того чтобы сказать, будет ли некоторая частная конфигурация неустойчивой, необходимо в общем случае вычислить частоты ω_n всех нормальных мод конфигурации и проверить, будет ли хотя бы какая-нибудь из частот ω_n иметь положительную мнимую часть. В этом случае фактор $\exp(-i\omega_n t)$, определяющий временну́ю зависимость моды, будет расти экспоненциально и система станет неустойчивой. Однако часто, исходя только из равновесно-

го решения, можно судить о том, будет ли соответствующая конфигурация устойчивой.

Для этого необходимо воспользоваться следующей теоремой [1—3].

Теорема 1. Звезда, состоящая из идеальной жидкости и имеющая постоянные химический состав и энтропию на нуклон, может перейти из устойчивого состояния в неустойчивое относительно некоторой частной радиальной нормальной моды, только если величина центральной плотности $\rho(0)$ такова, что равновесная энергия E и число нуклонов N стационарны, т. е.

$$\frac{\partial E(\rho(0);\ s, \ldots)}{\partial \rho(0)} = 0,$$

$$\frac{\partial N(\rho(0);\ s, \ldots)}{\partial \rho(0)} = 0.$$

Под «радиальной» нормальной модой подразумевается такая мода осцилляции, в которой плотность возмущений $\delta\rho$ есть функция только r и t и в которой ядерные реакции, вязкость, теплопроводность и передача лучистой энергии не играют роли.

Доказательство теоремы начнем с замечания о том, что диссипативные силы здесь отсутствуют, поэтому динамические уравнения инвариантны относительно обращения времени и задают квадраты частот ω_n^2 разных нормальных колебаний в виде *действительных* функций от $\rho(0)$, как в случае колебаний, которые возникают в электрической цепи без омического сопротивления. Для каждой частоты $\omega_n^2 > 0$ существуют две устойчивые моды. Для каждого $\omega_n^2 < 0$ существуют две моды, из которых одна экспоненциально спадает, а другая экспоненциально растет соответственно как $\exp(-|\omega_n|t)$ и $\exp(+|\omega_n|t)$. Таким образом, переход от стабильности к нестабильности происходит только при значении $\rho(0)$, для которого ω_n^2 *равно нулю*.

Рассмотрим значение $\rho(0)$, для которого одна из частот ω_n почти равна нулю. Пройдет много времени, пока осцилляции или экспоненциальное возрастание не переведут равновесную конфигурацию в некоторую близкую конфигурацию $\rho(r) + \delta\rho(r)$. Этот процесс происходит очень медленно, а потому $\rho(r) + \delta\rho(r)$ должна быть также почти равновесной конфигурацией. В отсутствие ядерных реакций новая конфигурация будет иметь тот же постоянный в объеме химический состав, что и старая. Если отсутствует вязкость, теплопроводность или передача лучистой энергии, то новая конфигурация будет иметь то же количество энтропии на нуклон, что и прежняя конфигурация. Более того, законы сохранения энергии и числа частиц требуют, чтобы новая конфигурация имела ту же энергию E и барионное число N, что и раньше. Однако $\delta\rho(0)$ не может обращаться в нуль, поскольку

равновесная конфигурация полностью определена (для данного химического состава и заданного s) величиной $\rho(0)$; если же $\delta\rho(0)$ равно нулю, то $\delta\rho(r)$ обращается в нуль для всех r и нормальная мода отсутствует. Таким образом, в точке перехода от устойчивости к неустойчивости существует близкая равновесная конфигурация с отличным от прежнего значением $\rho(0)$, но с теми же однородными распределениями энтропии на нуклон и химического состава и с теми же E и N. Именно это и требовалось доказать.

Эта теорема особенно полезна, поскольку часто только на основании качественных аргументов можно показать, что равновесная конфигурация является устойчивой для достаточно малых (или больших) $\rho(0)$ или неустойчивой для достаточно больших (или малых) $\rho(0)$; теорема указывает точно, где возникает переход от устойчивости к неустойчивости. В качестве примера такого качественного рассмотрения полезно переформулировать основные уравнения, описывающие строение звезды, на основе вариационного принципа (см. книгу [1], гл. 3).

Теорема 2. Данная звездная конфигурация с однородными распределениями энтропии на нуклон и химического состава будет удовлетворять уравнениям (11.1.12), (11.1.13), выведенным при условии равновесия, в том и только в том случае, если величина M, определяемая формулой

$$M \equiv \int 4\pi r^2 \rho(r)\, dr,$$

устойчива по отношению ко всем вариациям $\rho(r)$, оставляющим неизменной величину

$$N \equiv \int 4\pi r^2 n(r) \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1/2} dr$$

и не меняющим энтропию на нуклон и однородность химического состава. [Совершенно ясно, что если энтропия на нуклон и химический состав фиксированы, то из уравнения состояния можно определить как $p(r)$, так и $n(r)$ в виде функций от $\rho(r)$. Равновесие устойчиво по отношению к радиальным колебаниям тогда и только тогда, когда величина M, или, что то же, E, имеет *минимум* по отношению ко всем таким вариациям.

Чтобы доказать эту теорему, используем метод множителей Лагранжа (см., например, [4]): M будет стационарным по отношению ко всем вариациям, оставляющим N фиксированным, в том и только в том случае, если существует константа λ, для которой $M - \lambda N$ стационарно по отношению ко всем вариациям. В общем случае для заданной вариации $\delta\rho(r)$ изменение $M - \lambda N$ запишется в виде

$$\delta M - \lambda \delta N = \int_0^\infty 4\pi r^2 \delta\rho\,(r)\,dr =$$

$$= \lambda \int_0^\infty 4\pi r^2 \left[1 - \frac{2G\mathscr{M}\,(r)}{r}\right]^{-1/2} \delta n\,(r)\,dr -$$

$$- \lambda G \int_0^\infty 4\pi r \left[1 - \frac{2G\mathscr{M}\,(r)}{r}\right]^{-3/2} n\,(r)\,\delta\mathscr{M}\,(r)\,dr.$$

(Интегрирование проводится до бесконечности только из соображений удобства записи; в действительности же подынтегральные выражения исчезают вне радиуса $R + \delta R$.) По предположению, эти вариации не меняют энтропию на нуклон. Поэтому имеем

$$\delta\left(\frac{\rho}{n}\right) + p\delta\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

и, следовательно,

$$\delta n\,(r) = \frac{n\,(r)}{p\,(r) + \rho\,(r)}\,\delta\rho\,(r).$$

Также справедлива формула

$$\delta\mathscr{M}\,(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \delta\rho\,(r')\,dr'.$$

Изменяя порядок интегрирования в последнем члене, получаем

$$\delta M - \lambda \delta N = \int_0^\infty 4\pi r^2 \left\{1 - \frac{\lambda n\,(r)}{p\,(r) + \rho\,(r)}\left[1 - \frac{2G\mathscr{M}\,(r)}{r}\right]^{-1/2} -\right.$$

$$\left. - \lambda G \int_r^\infty 4\pi r' n\,(r')\left[1 - \frac{2G\mathscr{M}\,(r')}{r'}\right]^{-3/2} dr'\right\} \delta\rho\,(r)\,dr.$$

Таким образом, $\delta M - \lambda\delta N$ будет обращаться в нуль для всех $\delta\rho\,(r)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{n\,(r)}{p\,(r) + \rho\,(r)}\left[1 - \frac{2G\mathscr{M}\,(r)}{r}\right]^{-1/2} +$$

$$+ G \int_r^\infty 4\pi r' n\,(r')\left[1 - \frac{2G\mathscr{M}\,(r')}{r'}\right]^{-3/2} dr'.$$

Это будет справедливо для некоторого значения множителя Лагранжа λ в том и только в том случае, если правая часть послед-

него соотношения не будет зависеть от r, т. е. если

$$\left\{\frac{n'}{p+\rho}-\frac{n(p'+\rho')}{(p+\rho)^2}\right\}\left[1-\frac{2G\mathscr{M}}{r}\right]^{-1/2}+$$
$$+\frac{Gn}{p+\rho}\left\{4\pi r\rho-\frac{\mathscr{M}}{r^2}\right\}\left[1-\frac{2G\mathscr{M}}{r}\right]^{-3/2}-$$
$$-4\pi Grn\left[1-\frac{2GM}{r}\right]^{-3/2}=0.$$

Условие однородности распределения энтропии, приходящейся на один нуклон, приводит к равенству

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho}{n}\right)+p\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{n}\right)=0.$$

и, следовательно,

$$n'(r)=\frac{n(r)\,\rho'(r)}{p(r)+\rho(r)}.$$

Таким образом, δM обращается в нуль для всех $\delta\rho(r)$, которые дают $\delta N=0$, тогда и только тогда, когда верно соотношение

$$-r^2p'=G\left[1-\frac{2G\mathscr{M}}{k}\right]^{-1}[p+\rho]\,[\mathscr{M}+4\pi r^3p],$$

что и требовалось доказать.

Если член в δM, имеющий *второй* порядок по $\delta\rho(r)$, положительно определен для всех возмущений, то, для того чтобы породить какое-либо возмущение, необходимо подводить энергию, т. е. звезда будет устойчивой. Если же для некоторого возмущения $\delta\rho(r)$ величина δM может во втором порядке быть отрицательной, то с увеличением кинетической энергии это возмущение будет расти и звезда станет неустойчивой.

§ 3. Ньютоновские звезды: политропы и белые карлики

Большинство звезд правильно описываются ньютоновской физикой без учета эффектов общей теории относительности. Такие ньютоновские звезды заслуживают нашего внимания, во-первых, потому, что они представляют собой предельные случаи более экзотических объектов, интересных с точки зрения общей теории относительности, и, во-вторых, их изучение позволяет нам понять качественные свойства указанных объектов.

В ньютоновской астрофизике внутренняя энергия и давление много меньше плотности массы покоя, т. е.

$$e\ll m_{\text{н}}n,\qquad p\ll m_{\text{н}}n,\tag{11.3.1}$$

поэтому полная плотность в основном определяется плотностью массы покоя, а именно

$$\rho \approx m_{\text{н}} n. \tag{11.3.2}$$

Кроме того, выполняются соотношения

$$p \ll \rho, \qquad 4\pi r^3 \eta \ll \mathscr{M}.$$

Далее, гравитационный потенциал мал везде, т. е.

$$\frac{2G\mathscr{M}}{r} \ll 1. \tag{11.3.3}$$

При этих условиях фундаментальное уравнение (11.1.13) принимает вид

$$-r^2 p'(r) = G\mathscr{M}(r)\,\rho(r), \tag{11.3.4}$$

где $\mathscr{M}(r)$ определяется следующим образом:

$$\mathscr{M}(r) \equiv \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\,dr'. \tag{11.3.5}$$

Разделив уравнение (11.3.4) на $\rho(r)$ и продифференцировав его по r, объединим уравнения (11.3.4) и (11.3.5) в единственное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dr}\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dp(r)}{dr} = -4\pi G r^2 \rho(r). \tag{11.3.6}$$

Для того чтобы $\rho(0)$ было конечным, необходимо, чтобы $p'(0)$ обращалось в нуль. Следовательно, задавая уравнение состояния $p = p(\rho)$ (при условии $dp/d\rho \neq 0$), мы можем найти $\rho(r)$, если решим уравнение (11.3.6) со следующими начальными условиями: $\rho(0)$ равно некоторой заданной величине, а

$$\rho'(0) = 0. \tag{11.3.7}$$

[Уравнение (11.3.7) вытекает также из требования, чтобы $\rho(r)$ была аналитической функцией от x, y и z при $x = y = z = 0$.]

Далее, нам необходимо получить уравнение состояния. Обычно плотность внутренней энергии пропорциональна давлению, т. е.

$$e \equiv \rho - m_{\text{н}} n = (\gamma - 1)^{-1} p. \tag{11.3.8}$$

[Здесь $(\gamma - 1)^{-1}$ — константа пропорциональности; величина γ не будет отношением удельных теплоемкостей, если только e и p не будут пропорциональны температуре.] Тогда условие однородности энтропии, приходящейся на один нуклон, запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho}{n}\right) + p\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{e}{n}\right) + p\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1}\left\{\gamma p \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)\frac{dp}{dr}\right\} = 0,$$

и, следовательно,

$$p \sim n^{\gamma},$$

или, поскольку $\rho \approx m_{\text{н}} n$, последнее выражение примет вид

$$p = K\rho^{\gamma}. \tag{11.3.9}$$

Константа пропорциональности K зависит от величины энтропии, приходящейся на нуклон, и от химического состава, но не зависит от r или $\rho\,(0)$. Любая звезда, для которой уравнение состояния имеет вид (11.3.9), называется *политропой*.

В случае политропы фундаментальное уравнение (11.3.6) можно преобразовать к безразмерному виду. Введем новую независимую переменную ξ с помощью соотношения

$$r = \left(\frac{k\gamma}{4\pi G\,(\gamma-1)}\right)^{1/2} \rho\,(0)^{(\gamma-2)/2}\xi \tag{11.3.10}$$

и зависящую от нее новую переменную θ следующим образом:

$$\rho = \rho\,(0)\,\theta^{1/(\gamma-1)}, \qquad p = K\rho\,(0)^{\gamma}\,\theta^{\gamma/(\gamma-1)}. \tag{11.3.11}$$

Тогда уравнение (11.3.6) примет вид

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\,\xi^2\,\frac{d\theta}{d\xi} + \theta^{1/(\gamma-1)} = 0. \tag{11.3.12}$$

Граничные условия для функции $\theta\,(\xi)$ запишутся так:

$$\theta\,(0) = 1, \qquad \theta'\,(0) = 0 \tag{11.3.13}$$

[см. уравнение (11.3.7)]. Функция $\theta\,(\xi)$, определяемая соотношениями (11.3.12) и (11.3.13), называется *функцией Лейна — Эмдена* с индексом $(\gamma - 1)^{-1}$ (эти функции широко обсуждаются в книге [5]). Если ξ близко к нулю, уравнение (11.3.12) приводит к следующему разложению:

$$\theta\,(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^4}{120\,(\gamma-1)} - \ldots. \tag{11.3.14}$$

Можно также показать, что для $\gamma > {}^{6}/_{5}$ функция $\theta\,(\xi)$ обращается в нуль при некотором конечном значении $\xi = \xi_1$, т. е.

$$\theta\,(\xi_1) = 0. \tag{11.3.15}$$

С помощью выражения (11.3.10) можно, таким образом, задать радиус звезды

$$R = \left(\frac{K\gamma}{4\pi G\,(\gamma-1)}\right)^{1/2} \rho\,(0)^{(\gamma-2)/2}\,\xi_1, \tag{11.3.16}$$

Применим решение Лейна — Эмдена также для вычисления массы звезды:

$$M \equiv \int_0^R 4\pi r^2 \rho\,(r)\,dr =$$

$$= 4\pi\rho\,(0)^{(3\gamma-4)/2}\left(\frac{K\gamma}{4\pi G\,(\gamma-1)}\right)^{3/2}\int_0^{\xi_1}\xi^2\theta^{1/(\gamma-1)}\,(\xi)\,d\xi =$$

$$= 4\pi\rho\,(0)^{(3\gamma-4)/2}\left(\frac{K\gamma}{4\pi G\,(\gamma-1)}\right)^{3/2}\xi_1^2\,|\,\theta'\,(\xi_1)\,|.$$

Исключая из (11.3.16) и (11.3.17) величину $\rho\,(0)$, получаем соотношение между M и R:

$$M = 4\pi R^{(3\gamma-4)/(\gamma-2)}\left(\frac{K\gamma}{4\pi G\,(\gamma-1)}\right)^{-1/(\gamma-2)}\xi_1^{-(3\gamma-4)/(\gamma-2)}\xi_1^2\,|\,\theta'\,(\xi_1)\,|. \tag{11.3.18}$$

Численные значения констант ξ_1 и $\xi_1^2\,|\,\theta'\,(\xi_1)\,|$ сведены в табл. 11.1 (см. в [5] табл. 4).

Таблица 11.1

Численные значения параметров ξ_1 и $-\xi_1^2\theta'\,(\xi_1)$ для разнообразных ньютоновских политроп [5]

γ	ξ_1	$-\xi_1^2\theta'\,(\xi_1)$	Примеры
$^6/_5$	∞	1,73205	
$^{11}/_9$	31,83646	1,73780	
$^5/_4$	14,97155	1,79723	
$^9/_7$	9,53581	1,89056	
$^4/_3$	6,89685	2,01824	Белые карлики с наибольшей массой
$^7/_5$	5,35528	2,18720	
$^3/_2$	4,35287	2,41105	
$^5/_3$	3,65375	2,71406	Белые карлики с малой массой
2	π	π	
3	2,7528	3,7871	
∞	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$	Несжимаемые звезды

Для ньютоновских звезд основной вклад в M дает полная масса покоя $Nm_н$, поэтому число нуклонов в звезде с хорошим приближением равно

$$N \approx \frac{M}{m_n}. \tag{11.3.19}$$

Мы хотим также знать внутреннюю энергию $E \equiv M - Nm_n$. В общем случае для ньютоновских звезд величина E задается

с помощью уравнений (11.1.26), (11.1.29) и (11.1.30) следующим образом:

$$E = T + V, \tag{11.3.20}$$

а тепловая и гравитационная энергия T и V записываются так:

$$T = \int_0^R 4\pi r^2 e(r)\, dr, \tag{11.3.21}$$

$$V = -\int_0^R 4\pi r G\mathcal{M}(r)\,\rho(r)\, dr. \tag{11.3.22}$$

Сейчас мы покажем, что для политроп величины T и V задаются удивительно простыми формулами [6, 7]:

$$T = \frac{1}{(5\gamma-6)}\frac{GM^2}{R}, \tag{11.3.23}$$

$$V = -\frac{3(\gamma-1)}{(5\gamma-6)}\frac{GM^2}{R}, \tag{11.3.24}$$

и поэтому полная внутренняя энергия

$$E = -\frac{(3\gamma-4)}{(5\gamma-6)}\frac{GM^2}{R}. \tag{11.3.25}$$

Чтобы доказать формулу (11.3.24), используем уравнение (11.3.4) и перепишем интеграл (11.3.22) в виде

$$V = 4\pi\int_0^R r^3\frac{dp(r)}{dr}\,dr = -12\pi\int_0^R r^2 p(r)\, dr. \tag{11.3.26}$$

Умножив и разделив подынтегральное выражение на $\rho(r)$, получим

$$V = -3\int_0^R \frac{p(r)}{\rho(r)}\, d\mathcal{M}(r) = 3\int_0^R \mathcal{M}(r)\, d\left(\frac{p(r)}{\rho(r)}\right).$$

(Мы считаем здесь, что $\gamma > 1$, так что p/ρ обращается в нуль при $r = R$.) Если с помощью уравнения состояния вычислить $d[p(r)/\rho(r)]$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{p(r)}{\rho(r)}\right) = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{p'(r)}{\rho(r)} = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2},$$

то этот интеграл можно вычислить

$$V = -3\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\int_0^R \frac{G\mathcal{M}^2(r)}{r^2}\, dr. \tag{11.3.27}$$

Используя $dr/r^2 = -d(1/r)$, проинтегрируем (11.3.27) по частям. В результате получим

$$V = 3\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left\{\frac{GM^2}{R} - 2\int_0^R 4\pi r G\mathscr{M}(r)\,\rho(r)\,dr\right\} =$$

$$= 3\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left\{\frac{GM^2}{R} + 2V\right\}.$$

Решая это уравнение относительно V, получаем формулу (11.3.24). Чтобы вычислить T, подставим выражение (11.3.8) в (11.3.26), откуда находим

$$V = -3(\gamma - 1)\,T. \tag{11.3.28}$$

Из соотношений (11.3.24) и (11.3.28) легко получить нужную формулу (11.3.23).

Соотношения (11.3.17) и (11.3.19) показывают, что число нуклонов N пропорционально $\rho(0)^{(3\gamma-4)/2}$, а выражение для внутренней энергии $E \sim \rho(0)^{(5\gamma-6)/2}$ следует из выражений (11.3.25), (11.3.16) и (11.3.17). Таким образом, производные $\partial N/\partial\rho\,(0)$ и $\partial E/\partial\rho\,(0)$ никогда не обращаются одновременно в нуль. Из теоремы 1, доказанной в предыдущем параграфе, следует, что каждая политропа будет для всех $\rho(0)$ устойчивой либо неустойчивой в зависимости от значения γ. Какие же это значения γ?

Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к теореме 2 предыдущего параграфа, утверждающей, что звезда будет устойчивой в том и только в том случае, когда E минимально при всех вариациях $\rho(r)$, не меняющих N (и уравнение состояния). Интуиция подсказывает, что первая возникающая неустойчивость соответствует однородному взрыву всей звезды, и поскольку мы на вопрос об устойчивости по отношению к этой моде хотим только получить ответ «да» или «нет», мы можем надеяться получить его, рассмотрев пробную конфигурацию, когда $\rho(r)$ *постоянно* (подробное обсуждение вопроса стабильности звезд дано в [8,9] [1]). В любой такой конфигурации выражения (11.3.19), (11.3.21), (11.3.22) и (11.3.8) примут вид

$$N = \frac{4\pi}{3m_{\text{н}}}\rho R^3, \tag{11.3.29}$$

$$T = \frac{4\pi}{3}(\gamma-1)^{-1}K\rho^{\gamma}R^3, \tag{11.3.30}$$

$$V = -\frac{16\pi^2}{15}G\rho^2R^5. \tag{11.3.31}$$

[1]) Релятивистские эффекты рассмотрены в работе [9].

Исключая из этих соотношений R, получаем

$$E = T + V = a\rho^{\gamma-1} - b\rho^{1/3}, \tag{11.3.32}$$

где

$$a = \frac{KM}{\gamma - 1}, \tag{11.3.33}$$

$$b = \frac{3}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} GM^{5/3}. \tag{11.3.34}$$

Для $\gamma > {}^4/_3$ энергия E будет *минимальной* при значении

$$\rho = \left(\frac{b}{3a(\gamma-1)}\right)^{1/(\gamma-4/3)} = \left(\frac{M^{2/3}G(4\pi/3)^{1/3}}{5K}\right)^{1/(\gamma-4/3)}, \tag{11.3.35}$$

соответствующем конфигурации *устойчивого* равновесия. Для $\gamma = {}^4/_3$ энергия E не будет зависеть от ρ, если E всюду обращается в нуль, что обеспечивает равенство $a = b$, или

$$M = \left(\frac{5K}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-1/2} \tag{11.3.36}$$

Для $\gamma < {}^4/_3$ величина E имеет *максимум* в точке, задаваемой (11.3.35), соответствующий состоянию *неустойчивого* равновесия.

Кстати, с помощью соотношения (11.3.35) можно оценить значение массы

$$M \approx \frac{4\pi}{3}\rho^{(3\gamma-4)/2}\left(\frac{15K}{4\pi G}\right)^{3/2}$$

и сравнить его с точным результатом (11.3.17). Отношение этих двух формул для M имеет вид

$$\frac{M\ (\text{вариацион.})}{M\ (\text{точное})} = \frac{(15(\gamma-1)/\gamma)^{3/2}}{3\xi_1^2\,|\,\theta'(\xi_1)\,|}.$$

Для $\gamma = {}^5/_3$ это отношение равно 1,8; для $\gamma = {}^4/_3$ оно равно 1,2. Таким образом, видно, что вариационный метод не только дает верную зависимость M от ρ (включая и то, что при $\gamma = {}^4/_3$ величина M не зависит от ρ, а E обращается в нуль), но и приводит к приближенному результату, чрезвычайно близкому к точному численному результату. Мы принимаем в качестве достоверного предсказание вариационного метода, что политропа устойчива или неустойчива в зависимости от того, будет ли $\gamma > {}^4/_3$ или $\gamma < {}^4/_3$ [8, 9].

Вариационный подход дает также простой метод оценки частоты колебаний для расширения или сжатия звезды. Из соотношений (11.3.29) — (11.3.31) для фиксированных N следует, что

$$T \sim R^{3(1-\gamma)}, \qquad V \sim R^{-1}.$$

Используем результаты (11.3.23) и (11.3.24) для того, чтобы задать правильные значения T и V при равновесном радиусе (который мы будем записывать сейчас как $R_{\text{равн}}$, чтобы отличать

его от мгновенного значения радиуса осциллирующей конфигурации). Это даст нам

$$E = \frac{1}{(5\gamma-6)} \frac{GM^2}{R_{\text{равн}}^{(4-3\gamma)}} R^{3(1-\gamma)} - \frac{3(\gamma-1)}{5\gamma-6} GM^2 R^{-1}.$$

Для $\gamma > {}^4/_3$ эта величина имеет минимум при $R = R_{\text{равн}}$, как и должно быть. Для R, близких к $R_{\text{равн}}$, E ведет себя следующим образом:

$$E \to E_{\text{равн}} + \frac{3(\gamma-1)(3\gamma-4)}{2(5\gamma-6)} \frac{GM^2}{R_{\text{равн}}^3} (R - R_{\text{равн}})^2.$$

Однородное расширение сферы с однородной плотностью отвечает кинетической энергии:

$$U = \frac{3}{10} M \dot{R}^2,$$

поэтому условие сохранения энергии $U + E = \text{const}$ приводит к такой моде:

$$R - R_{\text{равн}} \sim \sin \omega t,$$

$$\omega_0 \approx \left[\frac{5(\gamma-1)(3\gamma-4)}{5\gamma-6} \frac{GM^2}{R_{\text{равн}}^3} \right]^{1/2}. \qquad (11.3.37)$$

И наконец, заметим, что однородная сфера, вращающаяся с угловой скоростью Ω, имеет кинетическую энергию, равную

$$U = \frac{1}{5} M R_{\text{равн}}^2 \Omega^2.$$

Эта величина должна быть меньше, чем энергия связи ($-E$), поэтому максимальная угловая скорость, с которой звезда может вращаться, имеет порядок

$$\Omega_{\text{макс}} \approx \left[\frac{5(3\gamma-4)}{(5\gamma-6)} \frac{GM}{R_{\text{равн}}^3} \right]^{1/2} \equiv \frac{\omega_0}{\sqrt{\gamma-1}}. \qquad (11.3.38)$$

Конечно, вращающаяся с такой скоростью звезда перестает быть сферической, так что с помощью (11.3.38) можно оценить только порядок величины истинной максимальной частоты вращения.

Применим теперь эти сведения к звездам, известным под названием белых карликов. Представим себе старую звезду, которая исчерпала свое ядерное топливо и начала охлаждаться и сжиматься. Когда температура ее станет достаточно низкой (ниже мы укажем, что значит «достаточно низкой»), электроны будут заморожены на низшем разрешенном энергетическом уровне. Принцип Паули утверждает, что на каждом уровне могут находиться только два электрона (поскольку имеются два спиновых состояния) и в единице объема существует $4\pi k^2 (2\pi\hbar)^{-3} dk$ уровней с импульсами, лежащими в интервале k, $k + dk$. Поэтому число электронов на единицу объема связано следующим образом

с максимальным импульсом k_F:

$$n = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} k^2\, dk = \frac{{k_F}^3}{3\pi^2\hbar^3}. \tag{11.3.39}$$

Плотность массы

$$\rho = n m_{\text{н}} \mu, \tag{11.3.40}$$

где μ — число нуклонов, приходящихся на электрон; $\mu \approx 2$ для звезд, которые полностью израсходовали водород. Это дает следующее значение:

$$k_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 \rho}{m_{\text{н}} \mu} \right)^{1/3}. \tag{11.3.41}$$

Условие, при котором тепловой энергией можно пренебречь имеет вид

$$kT \ll [{k_F}^2 + {m_e}^2]^{1/2} - m_e.$$

Кинетическая энергия и давление этих электронов равны

$$e = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} [(k^2 + {m_e}^2)^{1/2} - m_e]\, k^2\, dk, \tag{11.3.42}$$

$$p = \frac{8\pi}{3\,(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^2}{(k^2 + {m_e}^2)^{1/2}}\, k^2\, dk. \tag{11.3.43}$$

[См. формулу (2.8.4).] Уравнение состояния можно явно записать, если подставить выражение (11.3.41) в (11.3.43).

Для белых карликов уравнение состояния не имеет простого вида, однако оно сводится к уравнению политропы в двух предельных случаях, когда $\rho \ll \rho_{\text{кр}}$ и $\rho \gg \rho_{\text{кр}}$, где $\rho_{\text{кр}}$ — критическая плотность, при которой k_F становится равным m_e; в единицах СГС получаем

$$\rho_{\text{кр}} = \frac{m_{\text{н}} \mu {m_e}^3 c^3}{3\pi^2\hbar^3} = 0{,}97 \cdot 10^6 \mu \text{ г/см}^3. \tag{11.3.44}$$

А. Рассмотрим случай $\rho \ll \rho_{\text{кр}}$. Тогда $k_F \ll m_e$, и соотношения (11.3.42) и (11.3.43) дают

$$e = \frac{3}{2} p,$$

$$p = \frac{8\pi {k_F}^5}{15 m_e (2\pi\hbar)^3} = \frac{\hbar^2}{15 m_e \pi^2} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{m_{\text{н}} \mu} \right)^{5/3}.$$

Этот результат соответствует политропе с параметрами

$$\gamma = \frac{5}{3}, \qquad K = \frac{\hbar^2}{15 m_e \pi^2} \left(\frac{3\pi^2}{m_{\text{н}} \mu} \right)^{5/3}. \tag{11.3.45}$$

Из выражения (11.3.17) можно получить массу (в единицах СГС)

$$M=\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{8}\right)^{1/2}(2{,}71406)\left(\frac{\hbar^{3/2}c^{3/2}}{m_{\text{н}}^2\mu^2G^{3/2}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{\text{кр}}}\right)^{1/2}=2{,}79\mu^{-2}\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{\text{кр}}}\right)^{1/2}M_\odot, \qquad (11.3.46)$$

а выражение (11.3.16) дает радиус (в единицах СГС)

$$R=\left(\frac{3\pi}{8}\right)^{1/2}(3{,}65375)\left(\frac{\hbar^{3/2}}{c^{1/2}G^{1/2}m_em_{\text{н}}\mu}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{\text{кр}}}\right)^{-1/6}=2{,}0\cdot10^4\mu^{-1}\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{\text{кр}}}\right)^{-1/6}\text{ км} \qquad (11.3.47)$$

Б. Рассмотрим случай $\rho\gg\rho_{\text{кр}}$. Тогда $k_F\gg m_e$, и выражения (11.3.42), (11.3.43) приводят к следующему результату:

$$e=3p,$$

$$p=\frac{8\pi k_F^4}{12(2\pi\hbar)^3}=\frac{\hbar}{12\pi^2}\left(\frac{3\pi^2\rho}{m_{\text{н}}\mu}\right)^{4/3}.$$

Это соответствует политропе с параметрами

$$\gamma=\frac{4}{3}, \qquad K=\frac{\hbar}{12\pi^2}\left(\frac{3\pi^2}{m_{\text{н}}\mu}\right)^{4/3}. \qquad (11.3.48)$$

Из выражения (11.3.17) следует *единственное* значение массы (в единицах СГС), равное

$$M=\frac{1}{2}(3\pi)^{1/2}(2{,}01824)\left(\frac{\hbar^{3/2}c^{3/2}}{G^{3/2}m_{\text{н}}^2\mu^2}\right)=5{,}87\mu^{-2}M_\odot \qquad (11.3.49)$$

а выражение (11.3.16) дает следующее значение радиуса (в единицах СГС):

$$R=\frac{1}{2}(3\pi)^{1/2}(6{,}89685)\left(\frac{\hbar^{3/2}}{c^{1/2}G^{1/2}m_em_{\text{н}}\mu}\right)\left(\frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho(0)}\right)^{1/3}=$$

$$=5{,}3\cdot10^4\mu^{-1}\left(\frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho(0)}\right)^{1/3}\text{ км.} \qquad (11.3.50)$$

Заметим, что для $\rho(0)\ll\rho_{\text{кр}}$, $\gamma>{}^4/_3$ и поэтому менее массивные белые карлики устойчивы. Мы видим, что при увеличении центральной плотности величина M растет монотонно, достигая максимума (11.3.49), когда $\rho(0)\to\infty$; в этом случае не существует точки, в которой звезда становится неустойчивой. Таким образом, можно уже сделать вывод, что белый карлик может быть устойчивым, если его масса меньше (11.3.49). Эта максимальная масса называется *пределом Чандрасекара* [10, 11].

В действительности же картина не столь проста. При $k_F\approx\approx5m_e$ становятся энергетически выгодными процессы захвата

электронов ядрами с превращением протонов в нейтроны и рождением нейтрино, которые сразу улетают из системы. Этот эффект приводит к увеличению числа μ нуклонов, приходящихся на один электрон, и, согласно выражению (11.3.46), снижает величину массы M при заданной центральной плотности. Следовательно, можно ожидать, что M увеличивается, стремясь к пределу Чандрасекара, до тех пор, пока центральная плотность не примет значения $\rho\,(0) \approx 5^3\rho_{кр}$ [см. выражения (11.3.41) и (11.3.44)]; при этом M достигает максимума, а затем начинает убывать. Подробные вычисления показывают (см. фиг. 5 и гл. 10 в [1]), что максимальная масса равна $1{,}2M_\odot$, т. е. приблизительно совпадает с пределом Чандрасекара, который составляет $1{,}26M_\odot$ для $\mu = {}^{56}/_{26}$. Радиус звезды максимальной массы равняется $4\cdot10^3$ км. Теорема 2 предыдущего параграфа утверждает, что этот максимум есть точка перехода от стабильных состояний к нестабильным, так что стабильные железные белые карлики могут существовать только при $M < 1{,}2M_\odot$.

Наиболее интересным для изучающих общую теорию относительности является абсолютное значение GM/R гравитационного потенциала на поверхности белого карлика. Для $\rho\,(0) \ll \rho_{кр}$ этот параметр задается выражениями (11.3.46) и (11.3.47):

$$\frac{GM}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{2{,}71406}{3{,}65375}\right)\mu^{-1}\left(\frac{m_e}{m_н}\right)\left(\frac{\rho\,(0)}{\rho_{кр}}\right)^{2/3}, \qquad (11.3.51)$$

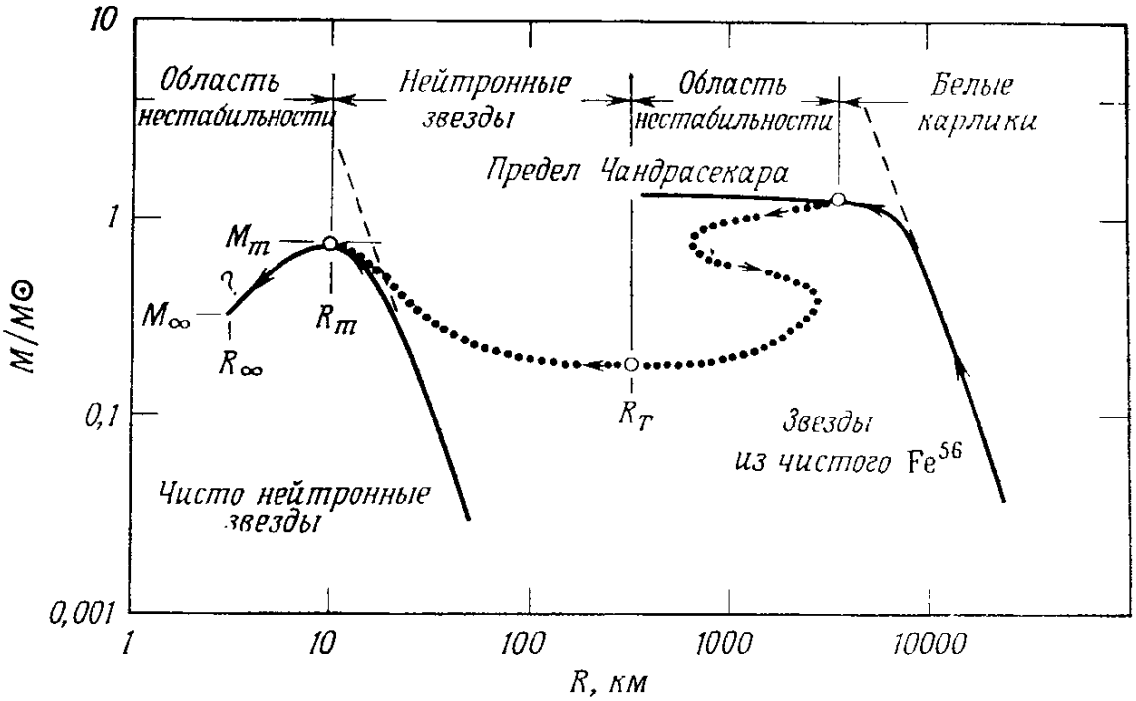
а для $\rho\,(0) \gg \rho_{кр}$ гравитационный потенциал задается выражениями (11.3.49) и (11.3.50):

$$\frac{GM}{R} = \left(\frac{2{,}01824}{6{,}89685}\right)\mu^{-1}\left(\frac{m_e}{m_н}\right)\left(\frac{\rho\,(0)}{\rho_{кр}}\right)^{1/3}. \qquad (11.3.52)$$

Видно, что GM/R всегда остается очень малой величиной из-за коэффициента $m_e/m_н = 5{,}4\cdot10^{-4}$. Таким образом, эффекты общей теории относительности не вносят больших изменений в структуру белых карликов. Величина GM/R растет с увеличением центральной плотности и становится наибольшей при максимальной массе $1{,}2M_\odot$, равной $4\cdot10^{-4}$. Наш старый знакомый, 40 Эридан B, характеризуется $GM/R \approx 6\cdot10^{-5}$ (§ 5 гл. 3), так что вряд ли можно ожидать серьезных улучшений в измерении красного смещения, если обнаружатся белые карлики с гораздо большими значениями красного смещения.

§ 4. Нейтронные звезды

В предыдущем параграфе мы убедились в том, что белые карлики, удерживаемые за счет давления холодных вырожденных электронов, не могут быть в равновесии, если их масса превышает предел Чандрасекара, равный примерно $\hbar^{3/2}/(m_н^2 G^{3/2})$. Гра-



Фиг. 11.2. Равновесные состояния звезды.

Сплошной линией слева и справа представлены соответственно решения Оппенгеймера — Волкова [12] для чисто нейтронной звезды и решение Чандрасекара [10] для белого карлика из чистого Fe^{56}. Пунктирная линия дает экстраполяцию нерелятивистских решений в этих двух случаях. Точки представляют интерполяцию решения Уилера, Гаррисона, Торна и Вакано [1], в котором учтено смещение химического состава от Fe^{56} к нейтронам. Стрелки указывают направление роста центральной плотности. Как доказано в теореме 1, всевозможные переходные состояния между устойчивостью и неустойчивостью возникают при максимумах или минимумах величины M, отмеченных здесь маленькими кружочками.

витационный потенциал на поверхности такой звезды также не может быть больше чем отношение $m_e/m_н$; так что общая теория относительности не изменяет результата расчета структуры звезды.

Продолжая наше исследование астрофизических приложений общей теории относительности, зададимся вопросом, что случается, когда звезда, масса которой выше предела Чандрасекара, достигает конца своей термоядерной эволюции и остывает. Внутреннего давления при этом заведомо не хватает для удержания ее в состоянии равновесия, и она коллапсирует. Первая возможность — звезда коллапсирует навсегда, и в этом случае общая теория относительности, несомненно, необходима для ее описания. Вторая возможность — звезда так нагревается при коллапсе, что взрывается и превращается в сверхновую. При этом может быть выброшено такое количество вещества, что масса звезды окажется ниже предела Чандрасекара. Полагают, что в последнем случае сильно сжатый остаток не завершает своей эволюции в виде белого карлика, а становится сверхплотной *нейтронной звездой* [12] [1]) (фиг. 11.2).

[1]) Ссылки не некоторые более ранние работы имеются в работе Ландау [11]; см. также [13—15].

Нейтронная звезда подобна белому карлику, за исключением того, что она состоит почти целиком из «холодных» вырожденных нейтронов: все электроны и протоны превратились в нейтроны согласно реакции

$$p + e^- \to n + \nu,$$

причем нейтрино покинули звезду. Чтобы принцип Паули запрещал обратную реакцию β-распада нейтрона $n \to p + e^- + \bar{\nu}$, в звезде все же должно оставаться достаточное количество электронов и протонов; это определяет нижний предел массы стабильной нейтронной звезды, которая будет вычислена ниже.

Нейтронные звезды с малыми массами во многом похожи на белых карликов с такими же массами, исключая то, что давление вырожденных нейтронов заменяется давлением вырожденных электронов, а потому вместо m_e теперь во всех формулах должна стоять m_n (а μ следует положить равным единице). Таким образом, замечая, как m_e входит в формулы (11.3.44) — (11.3.47) для малых белых карликов, мы можем сразу сделать вывод, что нейтронная звезда малой массы будет иметь более высокую центральную плотность, чем белый карлик при этой массе (и $\mu = 2$) в $^1/_2 (m_n/m_e)^3 = 3{,}1 \cdot 10^9$ раз и радиус, меньший в $m_n/2m_e = 920$ раз.

Электроны в белом карлике можно считать релятивистскими, когда его масса становится сравнимой с теоретическим верхним пределом, даваемым выражением (11.3.49). Поскольку величина m_e не входит в (11.3.49), мы ожидаем, что нейтроны в нейтронной звезде становятся релятивистскими при тех же самых массах, т. е. когда M по порядку величин совпадает с $M_\odot$. Однако далее аналогия между белыми карликами и нейтронными звездами нарушается.

Первое отличие состоит в том, что в плотность полной энергии ρ белого карлика основной вклад дает плотность масс покоя нерелятивистских *нуклонов*, в то время как нейтронная звезда с массой порядка $M_\odot$ будет состоять из нуклонов, кинетическая энергия которых сравнима с их массами покоя.

Второе отличие, даже более интересное, состоит в том, что в то время, как белый карлик с умеренно релятивистскими электронами имеет поверхностный гравитационный потенциал GM/R порядка m_e/m_n, нейтронная звезда равной массы имеет поверхностный потенциал, по порядку величины равный единице. Таким образом, общая теория относительности является необходимым элементом теории нейтронных звезд.

Для того чтобы сформулировать количественную теорию звезд, начнем с записи выражений плотности полной энергии и давления

идеального ферми-газа нейтронов с максимальным импульсом k_F:

$$\rho = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{k_F}(k^2+m_n{}^2)^{1/2}\,k^2\,dk = \\ = 3\rho_{\text{кр}}\int_0^{k_F/m_n}(u^2+1)^{1/2}\,u^2\,du, \qquad (11.4.1)$$

$$p = \frac{8\pi}{3\,(2\pi\hbar)^3}\int_0^{k_F}\frac{k^2}{(k^2+m_n{}^2)^{1/2}}\,k^2\,dk = \\ = \rho_{\text{кр}}\int_0^{k_F/m_n}(u^2+1)^{-1/2}\,u^4\,du, \qquad (11.4.2)$$

где теперь (в единицах СГС)

$$\rho_{\text{кр}} \equiv \frac{8\pi m_n{}^4 c^3}{3\,(2\pi\hbar)^3} = 6{,}11\cdot 10^{15}\ \text{г/см}^3. \qquad (11.4.3)$$

Исключая k_F/m_n из уравнений (11.4.1) и (11.4.2), получаем уравнение состояния в виде

$$\frac{p}{\rho_{\text{кр}}} = F\left(\frac{\rho}{\rho_{\text{кр}}}\right), \qquad (11.4.4)$$

где F — определенная трансцендентная функция. Структура нейтронной звезды с заданной центральной плотностью $\rho(0)$ вычисляется с помощью уравнения (11.1.13), в котором p следует рассматривать как заданную с помощью (11.4.4) функцию ρ. Так как единственными размерными величинами являются $\rho(0)$, $\rho_{\text{кр}}$ и G, решение должно давать массу и радиус в виде следующих функций от $\rho(0)$:

$$M = M_0 f\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{\text{кр}}}\right), \qquad (11.4.5)$$

$$R = R_0 g\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{\text{кр}}}\right), \qquad (11.4.6)$$

куда следует подставить (в единицах СГС)

$$R_0 \equiv c\,(8\pi G\rho_{\text{кр}})^{-1/2} = 3{,}0\ \text{км}, \qquad (11.4.7)$$

$$M_0 \equiv \frac{c^2 R_0}{G} = 2{,}0 M_\odot, \qquad (11.4.8)$$

а f и g здесь — неизвестные безразмерные функции. Как и в случае белых карликов, эту задачу удается решить аналитически только для очень больших и очень малых центральных плотностей.

Для $\rho(0) \ll \rho_{\text{кр}}$ можно использовать аналогию с белыми карликами, которые уже обсуждались выше, и сделать вывод из

выражений (11.3.46) и (11.3.47), что масса и радиус рассматриваемых нейтронных звезд равны

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{8}\right)^{1/2}(2{,}71406)\left(\frac{\hbar^{3/2}}{m_n{}^2 G^{3/2}}\right)\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{кр}}\right)^{1/2} = \\ = \frac{1}{2}(2{,}71406)\,M_0\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{кр}}\right)^{1/2}, \qquad (11.4.9)$$

$$R = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^{1/2}(3{,}65375)\left(\frac{\hbar^{3/2}}{m_n{}^2 G^{1/2}}\right)\left(\frac{\rho_{кр}}{\rho(0)}\right)^{1/6} = \\ = (3{,}65375)\,R_0\left(\frac{\rho_{кр}}{\rho(0)}\right)^{1/6}, \qquad (11.4.10)$$

где $\rho_{кр}$ теперь дается выражением (11.4.3).

Для $\rho(0) \gg \rho_{кр}$ нейтроны, находящиеся вблизи центра звезды, имеют $k_F \gg m_n$, так что выражения (11.4.1) и (11.4.2) приводят к формулам

$$\rho = \frac{3\rho_{кр}}{4}\left(\frac{k_F}{m_n}\right)^5, \qquad p = \frac{\rho_{кр}}{4}\left(\frac{k_F}{m_n}\right)^5$$

и, следовательно,

$$p = \frac{\rho}{3}, \qquad (11.4.11)$$

как и следовало ожидать для газа крайне релятивистских частиц. Используя это уравнение состояния в основном дифференциальном уравнении (11.1.13), получаем

$$-r^2\rho'(r) = 4G\mathscr{M}(r)\,\rho(r)\left[1+\frac{4\pi r^3\rho(r)}{3\mathscr{M}(r)}\right]\left[1-\frac{2G\mathscr{M}(r)}{r}\right]^{-1}. \qquad (11.4.12)$$

Удивительно, что в этом случае можно найти *точное* решение этого уравнения [16]:

$$\rho(r) = \frac{3}{56\pi G r^2}, \qquad (11.4.13)$$

соответствующее пределу $\rho(0) \to \infty$. Однако даже в этом пределе бесконечной центральной плотности это $\rho(r)$ оказывается ниже ρ_0 при радиусе r порядка R_0, так что уравнение состояния (11.4.11) оказывается несправедливым для внешних слоев *любой* нейтронной звезды. Чтобы рассмотреть оболочку из нерелятивистских нейтронов, необходимо решить полное уравнение (11.1.13), используя уравнение состояния (11.4.4); условие бесконечной центральной плотности при $r \ll R_0$ накладывается выражением (11.4.13). Мы не будем заниматься этим здесь; важным для нас следствием является лишь то, что решение имеет конечный радиус R, при котором ρ исчезает, и масса M, находящаяся внутри этого радиуса, конечна, поскольку сингулярность в выражении (11.4.13) при $r = 0$ интегрируемая. Таким образом, масса

запретить β-распад нейтронов. Чтобы получить представление о химическом составе нейтронной звезды, рассмотрим равновесие между нейтронами, протонами и электронами. Плотность энергии и плотность числа частиц каждого из трех таких ферми-газов даются (для $i = n, p, e$) формулами

$$\rho_i = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_{F,\,i}} \sqrt{k^2 + m_i^2}\, k^2\, dk, \tag{11.4.18}$$

$$n_i = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_{F,\,i}} k^2\, dk = \frac{k_{F,\,i}^3}{3\pi^2\hbar^3}. \tag{11.4.19}$$

В любой данной точке звезды реакции $n \to p + e + \bar{\nu}$ и $p + e \to n + \nu$ могут приводить к превращению нейтронов в протоны и наоборот (нейтрино при этом покидают звезду). В этих реакциях сохраняется плотность полного числа барионов

$$n_n + n_p = n_B \qquad \text{(фиксировано)}, \tag{11.4.20}$$

и система остается все время электрически нейтральной:

$$n_p - n_e = 0. \tag{11.4.21}$$

Но когда n_B сохраняется, плотность полной энергии может выражаться только через величину n_n, т. е.

$$\rho \equiv \rho_n + \rho_e + \rho_p = 3C^{-3} \left\{ \int_0^{Cn_n^{1/3}} \sqrt{k^2 + m_n^2}\, k^2\, dk + \right.$$
$$+ \int_0^{C[n_B - n_n]^{1/3}} \sqrt{k^2 + m_p^2}\, k^2\, dk +$$
$$\left. + \int_0^{C[n_B - n_n]^{1/3}} \sqrt{k^2 + m_e^2}\, k^2\, dk \right\}, \tag{11.4.22}$$

где

$$C \equiv (3\pi^2\hbar^3)^{1/3}.$$

Когда эта функция имеет минимум, достигается химическое равновесие. Условие равновесия имеет вид

$$\frac{d\rho}{dn_n} = (C^2 n_n^{2/3} + m_n^2)^{1/2} - (C^2 [n_B - n_n]^{2/3} + m_p^2)^{1/2} -$$
$$- (C^2 [n_B - n_n]^{2/3} + m_e^2)^{1/2} = 0.$$

Можно разрешить это уравнение относительно величины $n_p = n_B - n_n$ как функции от n_n

$$\frac{n_p}{n_n} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1+\dfrac{2(m_n^2 - m_p^2 - m_e^2)}{C^2 n_n^{2/3}}}{1+\dfrac{m_n^2}{C^2 n_n^{2/3}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\dfrac{(m_n^2 - m_p^2)^2 - 2m_e^2(m_n^2 + m_p^2) + m_e^4}{C^4 n_n^{4/3}}}{1+\dfrac{m_n^2}{C^2 n_n^{2/3}}}\right\}^{3/2}.$$

Разность масс нуклонов $Q \equiv m_n - m_p$ и масса электрона m_e сравнимы по величине и много меньше m_n, а потому этот результат можно записать гораздо проще:

$$\frac{n_p}{n_n} = \frac{1}{8}\left\{\frac{1+\dfrac{4Q}{m_n}\left(\dfrac{\rho_{кр}}{m_n n_n}\right)^{2/3} + \dfrac{4(Q^2 - m_e^2)}{m_n^2}\left(\dfrac{\rho_{кр}}{m_n n_n}\right)^{4/3}}{1+\left(\dfrac{\rho_{кр}}{m_n n_n}\right)^{2/3}}\right\}^{3/2}, \quad (11.4.23)$$

где $\rho_{кр} = m_n^4/C^3$ — критическая плотность, определенная выше выражением (11.4.3).

Условие, при котором нейтроны стабильны относительно β-распада, требует, чтобы фермиевское море электронов было заполнено вплоть до импульса, который превышает максимальный импульс $k_{макс}$ электрона, испускаемого в β-распаде нейтрона:

$$k_{F,e} > k_{макс}, \quad (11.4.24)$$

где

$$k_{макс} = \frac{[(m_n^2 - m_p^2)^2 - 2m_e^2(m_n^2 + m_p^2) + m_e^4]^{1/2}}{2m_n} \approx$$

$$\approx [Q^2 - m_e^2]^{1/2} = 1{,}19 \text{ МэВ}. \quad (11.4.25)$$

Импульс Ферми определяется с помощью соотношений (11.4.19) и (11.4.21):

$$k_{F,e}^2 = C^2 n_e^{1/3} = C^2 n_p^{2/3} = m_n^2\left(\frac{m_n n_n}{\rho_{кр}}\right)^{2/3}\left(\frac{n_p}{n_n}\right)^{2/3} =$$

$$= \left\{\frac{\dfrac{m_n^2}{4}\left(\dfrac{m_n n_n}{\rho_{кр}}\right)^{4/3} + Qm_n\left(\dfrac{m_n n_n}{\rho_{кр}}\right)^{2/3} + Q^2 - m_e^2}{\left(\dfrac{m_n n_n}{\rho_{кр}}\right)^{2/3} + 1}\right\}. \quad (11.4.26)$$

Он имеет наименьшее значение при $n_n = 0$, когда $k_{F,e}$ в точности равно значению $k_{макс}$. Поэтому условие стабильности нейтрона относительно β-распада (11.4.24) действительно выполняется для любой положительной плотности нейтронов.

Отношение плотностей нейтронов и протонов (11.4.23) велико и падает при очень малых нейтронных плотностях, достигая минимума при $n_n m_n$, равной переходной плотности

$$\rho_т \approx \rho_{кр}\left[\frac{4\,(Q^2-m_e{}^2)}{m_n{}^2}\right]^{3/4} = 1{,}28\cdot 10^{-4}\rho_{кр}, \qquad (11.4.27)$$

где

$$\left(\frac{n_p}{n_n}\right)_{мин} \approx \left(\frac{Q+\frac{1}{2}\,(Q^2-m_e{}^2)^{1/2}}{m_n}\right)^{3/2} = 0{,}002, \qquad (11.4.28)$$

а затем возрастает монотонно, достигая значения $^1/_8$ для $n_n m_n \gg \rho_{кр}$. Звезды, имеющие центральную плотность, несколько меньшую, чем переходная (11.4.27), в действительности вообще не являются нейтронными звездами, а соответствуют ветви равновесных решений для крайне плотных белых карликов, и, следовательно, не стабильны (§ 3 гл. 11). Таким образом, мы ожидаем, что должна быть некоторая минимальная центральная плотность порядка $\rho_т$ и некоторая минимальная масса порядка $3M_\odot(\rho_т/\rho_{кр})^{1/2} \approx 0{,}03M_\odot$ [см. выражение (11.4.9)], ниже которых стабильных нейтронных звезд не может быть. Подробные вычисления [1] показывают, что минимальная масса нейтронной звезды в действительности равна примерно $0{,}2M_\odot$.

Эффект малой примеси водорода в нейтронной звезде оказывается более интересным фактом, чем это может показаться на первый взгляд. Дело в том, что заполнение протонных и электронных энергетических уровней, так же как и нейтронных, будет препятствовать распадам не только нейтронов, но и других частиц, которые в обычном состоянии нестабильны. Например, μ^--мезон становится стабильным, когда $k_{F,\,e} > 53$ МэВ, поскольку в этом случае принцип Паули запрещает рождение электронов в процессах распада $\mu^- \to e^- + \nu + \bar{\nu}$. Согласно (11.4.26), это происходит тогда, когда плотность $\rho \approx m_n n_n$ достигает значения $0{,}038\rho_{кр}$ при $n_p = 0{,}005n_n$. Если плотность достигает значения $0{,}107\rho_{кр}$ при $n_p = 0{,}013n_n$, то импульс Ферми электронов становится равным массе μ-мезона 105 МэВ, и электронам, находящимся вблизи уровня Ферми, становится энергетически выгодно превращаться (скажем, при столкновении) в μ^--мезоны и в покидающие звезду пары нейтрино — антинейтрино. Таким образом, нейтронные звезды даже с умеренными значениями масс будут содержать примесь μ^--мезонов точно так же, как и примесь водорода. По тем же причинам можно ожидать, что гипероны и различные возбужденные состояния нуклонов и гиперонов также будут стабильны и представлены в малых количествах.

Тогда возникает интересный принципиальный вопрос. Например, знаменитый 33-резонанс в пион-нуклонном рассеянии может

рассматриваться либо как проявление пион-нуклонных сил, либо как частица, Δ-барион, с массой, равной 1236 МэВ, и очень коротким временем жизни, равным $5{,}5 \cdot 10^{-20}$ с. Должны ли мы включать Δ-барион в модель идеального газа для нейтронной звезды? С обычной точки зрения казалось бы, что не должны, но при достаточно высоких плотностях нуклонов принцип Паули будет запрещать распады $\Delta \to N + \pi$, $\Delta \to N + \gamma$ и т. д., а энергетические соображения будут благоприятствовать процессу превращения некоторых нейтронов и протонов в Δ-барион. Конечно, может оказаться и так, что сильные взаимодействия нуклонов просто исключат любую модель идеального газа для плотной нейтронной звезды,но не исключено, что эффекты этих взаимодействий можно будет учесть, рассматривая нейтронную звезду как идеальный газ, состоящий из нейтронов, протонов, электронов, μ^--мезонов, гиперонов и нуклонных и гиперонных резонансов (§ 11 гл. 15).

В любом случае ясно, что расчеты Оппенгеймера — Волкова, в которых нейтронная звезда рассматривается как чистый идеальный газ нейтронов, должны приниматься с большой осторожностью, когда $\rho(0)$ сравнимо или больше $\rho_{кр}$. Простое включение протонов и электронов наравне с нейтронами в модель идеального газа само по себе не оказывает серьезного влияния на структуру нейтронной звезды [1], однако ядерные силы могут играть при этом важную роль. Например, многие подробные вычисления дают максимальные значения стабильной массы, равные $0{,}37 M_\odot$ [17—19], $1{,}95 M_\odot$ [20] и $2{,}4 M_\odot$ [21]. Даже эти модели все еще весьма далеки от действительности; предполагается, что реальная нейтронная звезда имеет кристаллическую кору [22], сверхтекучую внутренность [23], мощные магнитные поля [24] [1]) и часто очень большую скорость вращения [25, 26].

Открытие [27] в 1967 г. «пульсаров»— звезд, испускающих излучение с различными длинами волн в виде периодических импульсов, разделенных интервалами от нескольких секунд до 0,033 с — наталкивает на мысль, что надо оценить возможные периоды вращений и вибраций нейтронных звезд и белых карликов. Выражения (11.3.37) и (11.3.38) показывают, что для всех γ, исключая $^6/_5$, $^4/_3$ и 1, максимальная частота вращения и основная частота колебаний любой ньютоновской политропы имеют порядок $\sqrt{GM/R^3}$. Вероятно, этот результат справедлив в пределах одного порядка величины для любой стабильной нейтронной звезды; в этом случае характеристическая частота принимает самое большое значение, когда M и R определяются выражениями (11.4.15) и (11.4.16), и равна

$$\left(\frac{GM_m}{R_m^3}\right)^{1/2} = 10^4 \text{ с}^{-1}. \qquad (11.4.29)$$

[1]) Другие ссылки см. в работе [21].

Это значительно больше, чем наблюдаемая частота излучения любого пульсара. В настоящее время полагают, что пульсары — это вращающиеся нейтронные звезды [28], существование которых начинается с частотами вращений, близкими к максимальной, порядка 10^4 с$^{-1}$, но впоследствии их вращение замедляется из-за потерь энергии на гравитационное или электромагнитное излучения и на электромагнитное ускорение заряженных частиц. (Чтобы объяснить существование этого излучения, а также периодических импульсов, необходимо предположить, что звезда не обладает круговой симметрией относительно оси вращения, как было бы в случае, если бы ее магнитные полюсы не совпадали с полюсами вращения.) В пользу такой интерпретации говорит наблюдение нескольких замедляющихся пульсаров (см. обзор [29]).

Белый карлик с такой же массой, как нейтронная звезда, будет иметь радиус, больший в $m_n/\mu m_e \approx 900$ раз, так что его основная частота колебаний и максимальная частота вращения будут меньше, чем у нейтронной звезды, в $3 \cdot 10^5$ раз. При M, близких к $M_{\text{макс}}$, это дает характеристическую частоту, меньшую чем (11.4.29) в $3 \cdot 10^5$ раз, что составляет примерно 0,3 с$^{-1}$. Это ниже того, что наблюдается для периодов излучения импульсов большинства пульсаров. Вероятно, пульсары — это нейтронные звезды, а не белые карлики.

§ 5. Сверхмассивные звезды

Теперь мы рассмотрим звезды другого вида [30, 31], которые общая теория относительности описывает совершенно иным образом. Представим себе ньютоновскую звезду, которая существует за счет давления излучения, а не вещества. Условия, при которых это возможно, будут разобраны в дальнейшем. Предположим также, что звезда находится в состоянии конвекционного равновесия § 1 гл. 11) и имеет однородный химический состав. Плотность энергии излучения равна $e = 3p$, а потому эта звезда будет политропой с $\gamma = {}^4/_3$, т. е.

$$p = K\rho^{4/3}. \tag{11.5.1}$$

Давление излучения задается законом Стефана — Больцмана

$$p_{\text{изл}} = \frac{\pi^2 (kT)^4}{45\hbar^3}, \tag{11.5.2}$$

так что при $p \approx p_{\text{изл}}$ температура определяется следующим образом:

$$kT = \left(\frac{45\hbar^3 K}{\pi^2}\right)^{1/4} \rho^{1/3}. \tag{11.5.3}$$

Давление вещества в этом случае подчиняется закону идеального газа

$$p_{\text{вещ}} = \rho \frac{kT}{\overline{m}}. \tag{11.5.4}$$

где $\overline{m}$ — средняя масса частиц газов. Таким образом, отношение давления вещества к давлению излучения равняется

$$\beta \equiv \frac{p_{\text{вещ}}}{p_{\text{изл}}} = \frac{45\hbar^3}{\pi^2 \overline{m}} \frac{\rho}{(kT)^3} = \frac{1}{\overline{m}} \left(\frac{45\hbar^3}{\pi^2 K^3} \right)^{1/3}. \tag{11.5.5}$$

Оно является константой по всему объему звезды, поэтому можно, используя β вместо K (или энтропию на один нуклон, от которой они обе зависят), задать уравнение состояния в виде

$$K = \left(\frac{45\hbar^3}{\overline{m}^4 \pi^2 \beta^4} \right)^{1/3}. \tag{11.5.6}$$

Тогда, согласно уравнению (11.3.17) и данным табл. 11.1, масса политропы с $\gamma = {}^4/_3$ равняется

$$M = 4\pi\,(2{,}01824) \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2}. \tag{11.5.7}$$

Используя (11.5.6.), получаем

$$M = \frac{12\sqrt{5}}{\pi^{3/2}}\,(2{,}01824)\,\frac{\hbar^{3/2}}{\overline{m}^2 G^{3/2} \beta^2} = 18 M_\odot \left(\frac{m_{\text{н}}}{\overline{m}} \right)^2 \beta^{-2}. \tag{11.5.8}$$

Для ионизованного водорода при температуре в интервале 10^5 — 10^{10} К масса $\overline{m}$ есть среднее между массами протона и электрона, что составляет $\overline{m} \approx m_{\text{п}}/2$. Таким образом, в этом случае, условие, при котором давление излучения превышает давление вещества, скажем, в 10 раз, выглядит так: $M \geqslant 7200 M_\odot$. Никаких подобных сверхмассивных звезд с достоверностью не наблюдали, но их рассматривают как возможные источники лучистой энергии при гравитационном коллапсе [30, 31].

Строение сверхмассивных звезд полностью определяется уравнениями для ньютоновской политропы с $\gamma \approx {}^4/_3$. В частности, уравнение (11.3.16) приводит к следующему радиусу для таких звезд:

$$R = 6{,}89685 \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{1/2} \rho\,(0)^{-1/3}.$$

Подставляя сюда (11.5.6), получаем

$$R = 6{,}89685 \left(\frac{45}{\pi^5} \right)^{1/6} \frac{\hbar^{1/2}}{\overline{m}^{2/3} G^{1/2} \beta^{2/3}} \rho\,(0)^{-1/3}. \tag{11.5.9}$$

Этот радиус ограничивается нашим предположением, что энергия массы покоя звезды много больше, чем ее энергия излучения, и уж, конечно, больше, чем тепловая энергия ее вещества.

Это условие имеет вид

$$\frac{\pi^2 (kT)^4}{15\hbar^3} \ll \rho$$

или, подставляя сюда (11.5.3) и (11.5.6), получаем

$$\rho \ll \frac{\pi^2}{1215} \frac{\beta^4 \overline{m}^4}{\hbar^3}. \tag{11.5.10}$$

Плотность ρ максимальна в центре, поэтому можно считать, что это условие наложено на $\rho(0)$. Используя (11.5.8) и (11.5.9), чтобы представить β и $\rho(0)$ через M и R, условие (11.5.10) записываем в виде

$$\frac{MG}{R} \ll \frac{4}{3}\left(\frac{2{,}01824}{6{,}89685}\right) = 0{,}39. \tag{11.5.11}$$

Это эквивалентно утверждению, что гравитационный потенциал мал, которое также делалось. При $M = 10^4 M_\odot$ выражение (11.5.11) требует, чтобы выполнялось условие $R \gg 4 \cdot 10^4$ км.

Хотя нет необходимости использовать общую теорию относительности для того, чтобы понять строение таких сверхмассивных звезд, она необходима, чтобы решить вопрос о стабильности. Политропа с $\gamma = {}^4/_3$ колеблется между состояниями стабильности и нестабильности, а потому необходимо принимать во внимание малые эффекты давления вещества и эффекты общей теории относительности, которые не играют существенной роли при расчетах структуры.

Используем теорему 1 из § 2 гл. 11, которая утверждает, что переход от состояния стабильности к нестабильности происходит при значении $\rho(0)$, для которого внутренняя энергия E стационарна. Чтобы вычислить E, воспользуемся выражениями (11.1.29) — (11.1.31), которые в первом порядке по GM/R дают следующий результат:

$$E \approx \int_0^R 4\pi r^2 e(r)\, dr + \int_0^R 4\pi G r \mathscr{M}(r)\, e(r)\, dr - \int_0^R 4\pi G r \mathscr{M}(r)\, dr - \int_0^R 6\pi G^2 \mathscr{M}^2(r)\, \rho(r)\, dr. \tag{11.5.12}$$

Тогда плотность внутренней энергии e равна

$$e = \frac{\pi^2}{15}\frac{(kT)^4}{\hbar^3} + \frac{1}{\Gamma - 1}\frac{\rho kT}{\overline{m}} = 3p_{\text{изл}}\left[1 + \frac{\beta}{3(\Gamma - 1)}\right],$$

где Γ — отношение теплоемкостей вещества. (Для ионизованного водорода $\Gamma = {}^5/_3$.) Для полного давления имеем

$$p = p_{\text{изл}} + p_{\text{вещ}} = p_{\text{изл}}(1 + \beta).$$

Следовательно, в первом порядке по малому параметру β отношение плотности энергии к давлению составляет

$$e \approx 3p\left[1-\frac{(3\Gamma-4)}{3(\Gamma-1)}\beta+O(\beta^2)\right]. \qquad (11.5.13)$$

Во втором слагаемом в (11.5.12) малой поправкой порядка β можно пренебречь, поскольку она уже меньше первого слагаемого из-за коэффициента порядка GM/R, но эту поправку надо учесть в большом первом члене, следовательно,

$$E \approx \left[1-\frac{(3\Gamma-4)}{3(\Gamma-1)}\beta\right]\int_0^R 12\pi r^2 p(r)\,dr+\int_0^R 12\pi G r\mathscr{M}(r)\,p(r)\,dr-$$
$$-\int_0^R 4\pi G r\mathscr{M}(r)\,dr-\int_0^R 6\pi G^2\mathscr{M}^2(r)\,\rho(r)\,dr-\ldots. \qquad (11.5.14)$$

Этот интеграл можно переписать, интегрируя по частям, следующим образом:

$$\int_0^R 12\pi r^2 p(r)\,dr=\int_0^R p(r)\,d(4\pi r^3)=-\int_0^R 4\pi r^3 p'(r)\,dr.$$

Для того чтобы вычислить $p'(r)$, разложим фундаментальное уравнение (11.1.13) по GM/R, удержав лишь первый порядок:

$$-r^2p'(r)\approx G\mathscr{M}(r)\,\rho(r)\left[1+\frac{p(r)}{\rho(r)}+\frac{4\pi r^3 p(r)}{\mathscr{M}(r)}+\frac{2G\mathscr{M}(r)}{r}\right],$$

так что

$$\int_0^R 12\pi r^2 p(r)\,dr\approx\int_0^R 4\pi G r\mathscr{M}(r)\,\rho(r)\,dr+\int_0^R 4\pi G r\mathscr{M}(r)\,p(r)\,dr+$$
$$+\int_0^R 16\pi^2 G r^4\rho(r)\,p(r)\,dr+\int_0^R 8\pi G^2\rho(r)\,\mathscr{M}^2(r)\,dr.$$

Поправку, содержащую β, надо удержать только в первом члене, который больше, чем другие, в R/MG раз. Таким образом, в первом порядке по β и GM/R выражение (11.5.14) принимает вид

$$E\approx-\frac{(3\Gamma-4)}{3(\Gamma-1)}\beta\int_0^R 4\pi G r\mathscr{M}(r)\,\rho(r)\,dr+\int_0^R 16\pi G r\mathscr{M}(r)p(r)\,dr+$$
$$+\int_0^R 16\pi^2 G r^4\rho(r)\,p(r)\,dr+\int_0^R 2\pi G^2\mathscr{M}^2(r)\,\rho(r)\,dr. \qquad (11.5.15)$$

Теперь каждый член мал, а потому их все можно вычислить, используя значения ρ, p и $\mathscr{M}$, полученные путем решения ньюто-

новского уравнения для ньютоновской политропы $\gamma = {}^4/_3$, т. е.

$$-r^2 p'(r) \approx G\mathscr{M}(r)\,\rho(r).$$

В частности, первый интеграл выражения (11.5.15) превращается при $\gamma = {}^4/_3$ в выражение (11.3.24), а именно

$$\int_0^R 4\pi G r \mathscr{M}(r)\,\rho(r)\,dr = -V = \frac{3GM^2}{2R}.$$

Третий член в (11.5.15) переписываем, интегрируя по частям следующим образом:

$$\int_0^R 16\pi^2 G r^4 \rho(r)\,p(r)\,dr = \int_0^R 4\pi r^2 p(r)\,d\mathscr{M}(r) =$$

$$= -\int_0^R 4\pi G r^2 p'(r)\,\mathscr{M}(r)\,dr - \int_0^R 8\pi G r p(r)\,\mathscr{M}(r)\,dr =$$

$$= \int_0^R 4\pi G^2 \mathscr{M}^2(r)\,\rho(r)\,dr - \int_0^R 8\pi G r p(r)\,\mathscr{M}(r)\,dr.$$

В результате этих действий выражение (11.5.15) принимает вид

$$E \approx -\frac{(3\Gamma-4)}{2(\Gamma-1)}\beta\frac{GM^2}{R} + \int_0^R 8\pi G r \mathscr{M}(r)\,p(r)\,dr + \int_0^R 6\pi G^2 \mathscr{M}^2(r)\,\rho(r)\,dr.$$

Последние два интеграла можно вычислить с помощью функции Лейна — Эмде $\theta(\xi)$ при $\gamma = {}^4/_3$:

$$\int_0^R 6\pi G^2 \mathscr{M}(r)\,\rho(r)\,dr = \frac{6K^{7/2}\rho(0)^{2/3}}{\pi^{5/2}G^{3/2}}\int_0^{\xi_1} \xi^4 \theta'^2(\xi)\,\theta^3(\xi)\,d\xi,$$

$$\int_0^R 8\pi G \mathscr{M}(r)\,p(r)\,r\,dr = \frac{8K^{7/2}\rho(0)^{2/3}}{\pi^{3/2}G^{3/2}}\int_0^{\xi_1} \xi^3 |\theta'(\xi)|\,\theta^4(\xi)\,d\xi,$$

в то время как K и $\rho(0)$ можно выразить через M и R подстановкой (11.3.16) и (11.3.17), приводящей к соотношению

$$\frac{K^{7/2}\rho(0)^{2/3}}{G^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{64\xi_1^4 |\theta'(\xi_1)|^3}\frac{GM^2}{R}.$$

Численное интегрирование дает [32] значение

$$\frac{1}{8\pi\xi_1^4 |\theta'(\xi_1)|^3}\left\{\int_0^{\xi_1} \xi^3 |\theta'(\xi)|\,\theta^4(\xi)\,d\xi + \frac{3}{4\pi}\int_0^{\xi_1} \xi^4 \theta'^2(\xi)\,\theta^3(\xi)\,d\xi\right\} = 5{,}1.$$

Далее, собирая все это вместе, получаем окончательный ответ:

$$E \approx -\frac{(3\Gamma-4)}{2(\Gamma-1)}\beta\frac{GM^2}{R}+5{,}1\frac{G^2M^3}{R^2}. \qquad (11.5.16)$$

Когда R так велико, что общей теорией относительности можно пренебречь, то в этом случае звезда ведет себя как ньютоновская политропа с γ, равной

$$\gamma \equiv 1+\frac{p}{e} \approx \frac{4}{3}+\frac{(3\Gamma-4)}{9(\Gamma-1)}\beta > \frac{4}{3},$$

и действительно является стабильной [см. выражение (11.5.13)]. Переход от стабильного состояния к нестабильному происходит, когда R уменьшается до значения, при котором

$$\frac{\partial E}{\partial R}=\frac{\partial E}{\partial \rho(0)}\frac{\partial \rho(0)}{\partial R}=0.$$

Производная должна быть взята при постоянном значении энтропии, приходящейся на один нуклон и, следовательно, при фиксированных в данном случае β и M [см. выражения (11.5.6) и (11.5.7)]. Таким образом, *минимальный* радиус, при котором звезда стабильна, равен

$$R_{\text{мин}}=\frac{20{,}4(\Gamma-1)}{(3\Gamma-4)}\frac{GM}{\beta}. \qquad (11.5.17)$$

Максимальная энергия, которая может освободиться, когда звезда медленно сжимается (за счет излучения ее поверхности) до минимального стабильного радиуса,

$$-E(R_{\text{мин}})=\frac{(3\Gamma-4)^2\beta^2M}{81{,}6(\Gamma-1)^2}. \qquad (11.5.18)$$

Например, звезда с $\beta = 0{,}1$ будет иметь массу $M \approx 7200 M_\odot$; если $\Gamma = {}^5/_3$, то минимальный радиус звезды равен $1{,}45 \cdot 10^6$ км и доля ее массы покоя, которая может освободиться при сжатии, составляет 0,03%. Максимальное значение поверхностного потенциала MG/R для $\Gamma = {}^5/_3$ равно $0{,}0735\beta$, как и следует из условия (11.5.11).

§ 6. Звезды с однородной плотностью

Общая теория относительности находит интересное применение к другому классу стабильных звезд, состоящих из несжимаемой жидкости, уравнение состояния которой

$$\rho = \text{const}. \qquad (11.6.1)$$

Такие звезды представляют интерес не в связи с наблюдениями (в действительности таких звезд нет), а потому, что они имеют достаточно простое строение, позволяющее точно решить уравнения Эйнштейна [33], а также потому, что они позволяют

найти верхний предел для гравитационного красного смещения спектральных линий, излучаемых поверхностью звезды любого типа [34, 35].

При постоянном ρ фундаментальное уравнение (11.1.13) можно переписать в виде

$$\frac{-p'(r)}{[\rho+p(r)][(\rho/3)+p(r)]}=4\pi Gr\left[1-\frac{8\pi G\rho r^2}{3}\right]^{-1}. \qquad (11.6.2)$$

Тогда давление должно определяться интегрированием по объему внутри поверхности, на которой $p = 0$, а не по объему, лежащему вне этой поверхности, как делается при рассмотрении более реалистических моделей. Это приводит к выражению

$$\frac{p(r)+\rho}{3p(r)+\rho}=\left[\frac{1-8\pi G\rho R^2/3}{1-8\pi G\rho r^2/3}\right]^{1/2}.$$

Решая последнее выражение относительно $p(r)$ и выражая ρ через массу звезды

$$\rho=\frac{3M}{4\pi R^3} \quad \text{для} \quad r<R, \qquad (11.6.3)$$

находим

$$p(r)=\frac{3M}{4\pi R^3}\left\{\frac{[1-(2MG/R)]^{1/2}-[1-(2MGr^2/R^3)]^{1/2}}{[1-(2MGr^2/R^3)]^{1/2}-3[1-(2MG/R)]^{1/2}}\right\}. \qquad (11.6.4)$$

Метрическая компонента $A(r)$ сразу определяется с помощью выражения (11.1.11):

$$A(r)=\left[\frac{1-2MGr^2}{R^3}\right]^{-1}, \qquad (11.6.5)$$

в то время как $B(r)$ можно вычислить подстановкой (11.6.4) в интеграл (11.1.16), что приводит к результату

$$B(r)=\frac{1}{4}\left[3\left(1-\frac{2MG}{R}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{2MGr^2}{R^3}\right)^{1/2}\right]^2. \qquad (11.6.6)$$

Наиболее интересная особенность этого решения состоит в том, что оно не имеет смысла для всех значений M и R. Давление, задаваемое выражением (11.6.4), становится бесконечным при $r = r_\infty$, соответствующем

$$r_\infty^2=9R^2-\frac{4R^3}{MG}. \qquad (11.6.7)$$

[Метрика также становится сингулярной при значении $r = r_\infty$, поскольку $B(r_\infty)$ равно нулю.] Но давление есть скаляр, а потому сингулярность в $p(r)$ нельзя отнести за счет неразумного выбора системы координат. Мы должны считать, что $p(r)$ не сингулярно при любом реальном r, а единственный путь обеспечить это — ввести отрицательные r_∞^2, т. е. допустить неравенство

$$\frac{MG}{R}<\frac{4}{9}. \qquad (11.6.8)$$

Заметим, что радиус Шварцшильда $2MG$ в этом случае меньше, чем $^8/_9$ действительного радиуса R; поэтому нет никакой сингулярности ни во внешнем решении (11.1.17), ни во внутреннем решении (11.6.5), (11.6.6).

Это не первый случай, когда мы устанавливаем верхнюю границу абсолютного значения MG/R гравитационного потенциала звезды. В § 4 гл. 11 мы видели, что для стабильной нейтронной звезды, рассматриваемой как идеальный газ, MG/R никогда не превышает отношения 0,36/3,2, т. е. 0,11 [см. выражения (11.4.15) и (11.4.16)]. Существует ли тогда абсолютная верхняя граница для MG/R, накладываемая структурой уравнений Эйнштейна вне зависимости от уравнения состояния?

Чтобы сформулировать этот вопрос как математическую задачу, будем считать, что ρ — произвольная конечная положительная функция, отвечающая лишь следующим общим требованиям:

А. Задан радиус R, так что

$$\rho(r) = 0 \quad \text{при} \quad r > R. \tag{11.6.9}$$

Б. Задана масса M из условия

$$\int_0^R 4\pi r^2 \rho(r)\, dr = M. \tag{11.6.10}$$

В. Метрический коэффициент $A(r)$, заданный (11.1.11), не должен быть сингулярным, а потому

$$\mathscr{M}(r) < \frac{r}{2G}, \tag{11.6.11}$$

где

$$\mathscr{M}(r) \equiv \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\, dr'.$$

Г. Плотность $\rho(r)$ не должна возрастать к поверхности:

$$\rho'(r) \leqslant 0. \tag{11.6.12}$$

(Действительно, трудно представить, чтобы жидкая сфера с плотностью, большей у поверхности, чем в центре, могла быть стабильной.) Выбирая функцию $\rho(r)$ согласно этим условиям, мы можем вычислить $A(r)$ с помощью выражения (11.1.11); $p(r)$ можно определить, интегрируя уравнение (11.1.13) по объему, находящемуся внутри рассматриваемой поверхности [с граничным условием $p(R) = 0$]; затем мы можем вычислить $B(r)$ с помощью выражения (11.1.16). Условие (11.6.11) гарантирует, что $A(r)$ — хорошая функция, а поскольку $p(r)$ конечно, выражение (11.1.13) будет давать $p(r) \geqslant 0$, а выражение (11.1.16) будет приводить к конечным, положительно определенным $B(r)$. Таким образом, любые абсолютные ограничения на задаваемую нами функцию $\rho(r)$ (так же, как и на верхнюю границу MG/R) могут вытекать

лишь из того условия, что уравнение (11.1.13) должно приводить к конечному решению для давления $p(r)$.

Это условие мы будем использовать довольно косвенным образом, обращаясь к метрическому коэффициенту $B(r)$, а не к самому значению $p(r)$. Сначала получим уравнение, позволяющее вычислить $B(r)$ при заданной плотности $\rho(r)$, не находя предварительно решения для $p(r)$; из (11.1.5) и (11.1.7) следует, что

$$3R_{rr}B + R_{tt}A = B'' - \frac{B'}{2}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{3BA'}{rA} - \frac{B'}{r} = -16\pi G\rho AB$$

или

$$B'' - \frac{B'}{2}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{2}{r}\right) = \frac{B}{rA}[3A' - 16\pi G\rho r A^2].$$

Это уравнение можно линеаризовать с помощью подстановки

$$B \equiv \zeta^2. \tag{11.6.13}$$

Привлекая уравнение (11.1.11) для $A(r)$ и несколько переустраивая его, находим

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\left(1 - \frac{2G\mathscr{M}(r)}{r}\right)^{1/2}\frac{d\zeta(r)}{dr}\right] = G\left(1 - \frac{2G\mathscr{M}(r)}{r}\right)^{-1/2}\left(\frac{\mathscr{M}(r)}{r^3}\right)'\zeta(r). \tag{11.6.14}$$

Начальные условия при $r = R$ могут быть определены прямо из выражения (11.1.16) или из того условия, чтобы $B(r)$ гладко сшивалось с внешним решением (11.1.17). В любом случае приходим к результатам

$$\zeta(R) = \left[1 - \frac{2MG}{R}\right]^{1/2}, \tag{11.6.15}$$

$$\zeta'(R) = \frac{MG}{R^2}\left[1 - \frac{2MG}{R}\right]^{-1/2} \tag{11.6.16}$$

Решение для $\zeta(r)$ должно быть *положительным*, поскольку $\zeta(r)$ могло бы быть отрицательным только в том случае, если бы оно проходило через нуль, где исчезало B, а согласно выражению (11.1.16) B может равняться нулю только в том случае, когда давление $p(r)$ имеет сингулярность.

Получим теперь верхнюю границу $\zeta(0)$. Если ζ положительно, тогда правая часть (11.6.14) отрицательна, потому что $3\mathscr{M}(r)/4\pi r^3$ есть средняя плотность внутри сферы радиуса r, а средняя плотность не может увеличиваться с ростом r, если не возрастает сама плотность. Таким образом, (11.6.14) приводит к условию

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\left(1 - \frac{2G\mathscr{M}(r)}{r}\right)^{1/2}\frac{d\zeta(r)}{dr}\right] \leqslant 0,$$

причем равенство достигается только при однородной плотности. Интегрируя это неравенство от r до R и подставляя (11.6.16),

получаем

$$\zeta'(r) \geqslant \frac{MGr}{R^3}\left(1-\frac{2G\mathscr{M}(r)}{r}\right)^{-1/2}.$$

Интегрируя еще раз от 0 до R и подставляя (11.6.15), находим

$$\zeta(0) \leqslant \left[1-\frac{2MG}{R}\right]^{1/2} - \frac{MG}{R^3}\int_0^R \frac{r\,dr}{[1-(2G\mathscr{M}(r)/r)]^{1/2}}.$$

Правая часть принимает наибольшие значения, когда $\mathscr{M}(r)$, насколько это возможно, мало. При заданной массе M и радиусе R плотность распределения с $\rho'(r) \leqslant 0$, приводящая к $M(r)$, которое во всем объеме принимает свое минимальное значение $\rho(r)$, является постоянной; в этом случае имеем

$$\mathscr{M}(r) = \frac{Mr^3}{R^3}.$$

Подставляя это выражение под интеграл, преобразуем последнее неравенство к виду

$$\zeta(0) \leqslant \frac{3}{2}\left[1-\frac{2MG}{R}\right]^{1/2} - \frac{1}{2}. \qquad (11.6.17)$$

Мы уже отмечали, что $\zeta(r)$ должно быть положительно определенным, следовательно, (11.6.17) предполагает неравенство

$$\frac{MG}{R} < \frac{4}{9}. \qquad (11.6.18)$$

Это как раз верхний предел, найденный ранее для звезд с однородной плотностью, но теперь мы знаем, что (11.6.18) справедливо для всех звезд, однородных и неоднородных.

Можно также доказать, что при данной массе и данном радиусе стабильные звезды с наименьшими значениями давления в центре — это те, что имеют однородную плотность. Следовательно, давление в центре любой звезды не должно быть меньше значения, получаемого из выражения (11.6.4) при $r = 0$, т. е.

$$p(0) \geqslant \frac{3M}{4\pi R^3}\left\{\frac{[1-(2MG/R)]^{1/2}-1}{1-3[1-(2MG/R)]^{1/2}}\right\}. \qquad (11.6.19)$$

Это опять указывает на то, что MG/R никогда не может равняться запрещенному значению $^4/_9$.

Этот результат можно сразу превратить в ограничение на величину красного смещения спектральных линий, излучаемых поверхностью любого типа звезды. Согласно выражениям (3.5.3), (11.1.1) и (11.1.17), имеем

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = B^{-1/2}(R) - 1 = \left(1-\frac{2MG}{R}\right)^{-1/2} - 1.$$

Условие (11.6.18) накладывает на z верхнее граничное условие

$$z < 2. \tag{11.6.20}$$

И действительно, имеется множество квазизвездных радиоисточников (гл. 14), спектральные линии которых имеют красное смещение, близкое к величине 1,95! Однако мы не будем делать поспешного заключения, что такое красное смещение с необходимостью вызывается сильными гравитационными полями, поскольку красное смещение, близкое к $z = 2$, требует, чтобы звезда состояла из почти несжимаемой жидкости, т. е. характеризовалась очень малыми значениями $\partial\rho/\partial p$. Последнее представляется физически не обоснованным, поскольку нежелательно, чтобы скорость звука $(\partial p/\partial\rho)^{1/2}$ превышала скорость света [34]. Бонди [34] показал (см., однако, [35—37]), что для стабильной звезды при условиях $(\partial p/\partial\rho) < 1$ и $p/\rho \leqslant {}^1/_3$ [а эти неравенства выполняются для частиц, которые взаимодействуют только электромагнитным образом и (или) путем локальных столкновений; см. § 10 гл. 2] красное смещение спектральных линий, испускаемых ее поверхностью, ограничивается значением $z \leqslant 0{,}615$. В действительности же существуют квазизвездные объекты с величиной красного смещения $z > 2$, такие, как 4C25.5, для которого $z = 2{,}358$.

Однако нет никаких теорем, которые ограничивали бы красное смещение световых сигналов, выходящих *изнутри* статических сферически-симметричных тел [38] [1]). Например, световой сигнал, выходящий из центра прозрачной однородной звезды, имел бы, согласно выражениям (3.5.3), (11.1.1) и (11.6.6), красное смещение

$$1 + z = B^{-1/2}(0) = \frac{2}{3\,(1-(2MG/R))^{1/2}-1}.$$

Когда MG/R приближается к максимальному значению ${}^4/_9$, такое красное смещение становится бесконечным. Хойл и Фаулер [41] предположили, что квазизвездный объект представляет собой скопление звезд, небольших, но плотных с красным смещением, связанным с процессами испускания и поглощения в горячем облаке газа, захваченном вблизи центра скопления. До сих пор не вполне ясно, связано ли красное смещение у квазизвездных объектов с их внутренним строением или с какой-нибудь другой причиной, такой, как космологическое разбегание далеких объектов, обсуждаемое в гл. 14.

---

[1]) Обсуждение устойчивости релятивистских газовых сфер и кластера точечных масс с произвольно большими центральными красными смещениями дано в [39, 40].

§ 7. Сферически-симметричные поля, зависящие от времени

Обратимся к проблемам динамики звезд. Начнем с того, что запишем метрику и тензор Риччи для сферически-симметричной системы. Сферическая симметрия требует, чтобы собственный временной интервал $d\tau^2$ зависел только от инвариантов группы вращений:

$$t,\ dt,\ r,\ \mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} = r\,dr,\ d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2),$$

поэтому $d\tau^2$ можно записать в виде

$$d\tau^2 = C\,(r,\ t)\,dt^2 - D\,(r,\ t)\,dr^2 - 2E\,(r,\ t)\,dr\,dt - \\ - F\,(r,\ t)\,r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2).$$

Можно избавиться от функции F, если ввести новую радиальную переменную

$$r' \equiv rF^{1/2}\,(r,\ t).$$

Тогда метрика сохранит свой вид, но вместо C, D и E возникнут новые функции C', D' и E', зависящие, конечно, не от r, а от r', и исчезнет F. Опустив штрихи, получим

$$d\tau^2 = C\,(r,\ t)\,dt^2 - D\,(r,\ t)\,dr^2 - 2E\,(r,\ t)\,dr\,dt - \\ - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2).$$

Теперь избавимся от E, введя новое время:

$$dt' = \eta\,(r,\ t)\,[C\,(r,\ t)\,dt - E\,(r,\ t)\,dr],$$

где η — интегрирующий множитель, который вводится так, чтобы правая часть стала полным дифференциалом, т. е. так, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial r}\,[\eta\,(r,\ t)\,C\,(r,\ t)] = -\frac{\partial}{\partial t}\,[\eta\,(r,\ t)\,E\,(r,\ t)].$$

[Это уравнение может быть решено, если рассматривать его как задачу с начальными данными; задавая $\eta\,(r,\ t_0)$ для всех r, можем найти $\partial\eta\,(r,\ t)/\partial t$ при $t = t_0$, а затем определить $\eta\,(r,\ t_0 + dt)$ для всех r.] Собственное время тогда будет иметь вид

$$d\tau^2 = \eta^{-2}C^{-1}\,dt'^2 - (D + C^{-1}E^2)\,dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2),$$

или, вводя новые функции A и B вместо $D + C^{-1}E^2$ и $\eta^{-2}C^{-1}$ и опуская штрих у t, переписываем это так:

$$d\tau^2 = B\,(r,\ t)\,dt^2 - A\,(r,\ t)\,dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \qquad (11.7.1)$$

Таким образом, мы можем использовать метрику в ее привычной «стандартной» форме с единственной особенностью, а именно: A и B зависят как от r, так и от t.

Отличные от нуля элементы метрического тензора и его обратного тензора равны:

$$g_{rr}=A, \quad g_{\theta\theta}=r^2, \quad g_{\varphi\varphi}=r^2\sin^2\theta, \quad g_{tt}=-B,$$
$$g^{rr}=A^{-1}, \quad g^{\theta\theta}=r^{-2}, \quad g^{\varphi\varphi}=r^{-2}(\sin\theta)^{-2}, \quad g^{tt}=-B^{-1}. \tag{11.7.2}$$

Отсюда следует, что элементы аффинной связности, отличные от нуля, записываются так:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^r_{rr}=\frac{A'}{2A}, && \Gamma^r_{\theta\theta}=-\frac{r}{A}, && \Gamma^r_{\varphi\varphi}=-\frac{r\sin^2\theta}{A},\\
&\Gamma^r_{tt}=\frac{B'}{2A}, && \Gamma^r_{rt}=\Gamma^r_{tr}=\frac{\dot A}{2A}, && \Gamma^\theta_{\theta r}=\Gamma^\theta_{r\theta}=\frac{1}{r},\\
&\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}=-\sin\theta\cos\theta, && \Gamma^\varphi_{\varphi r}=\Gamma^\varphi_{r\varphi}=\frac{1}{r}, && \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}=\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}=\operatorname{ctg}\theta,\\
&\Gamma^t_{rr}=+\frac{\dot A}{2B}, && \Gamma^t_{tt}=\frac{\dot B}{2B}, && \Gamma^t_{tr}=\Gamma^t_{rt}=\frac{B'}{2B}.
\end{aligned} \tag{11.7.3}$$

(Штрих и точка теперь означают $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial t$ соответственно.) Из уравнения (6.1.5) вытекает, что независимые компоненты тензора Риччи, отличные от нуля, имеют вид:

$$R_{rr}=\frac{B''}{2B}-\frac{B'^2}{4B^2}-\frac{A'B'}{4AB}-\frac{A'}{Ar}+\frac{\ddot A}{2B}-\frac{\dot A\dot B}{4B^2}-\frac{\dot A^2}{4AB}, \tag{11.7.4}$$

$$R_{\theta\theta}=-1+\frac{1}{A}-\frac{rA'}{2A^2}+\frac{rB'}{2AB}, \tag{11.7.5}$$

$$R_{tt}=-\frac{B''}{2A}+\frac{B'A'}{4A^2}-\frac{B'}{Ar}+\frac{B'^2}{4AB}+\frac{\ddot A}{2A}-\frac{\dot A^2}{4A^2}-\frac{\dot B\dot A}{4AB}, \tag{11.7.6}$$

$$R_{tr}=-\frac{\dot A}{Ar}. \tag{11.7.7}$$

Из сферической симметрии также следует, что метрика принимает значения

$$R_{\varphi\varphi}=\sin^2\theta R_{\theta\theta}, \tag{11.7.8}$$

$$R_{r\theta}=R_{r\varphi}=R_{\theta\varphi}=R_{\theta t}=R_{\varphi t}=0. \tag{11.7.9}$$

В качестве простого, но важного применения этих формул рассмотрим сферически-симметричное, но не обязательно статическое поле в *пустом пространстве*, когда уравнения поля имеют вид $R_{\mu\nu}=0$. Согласно (11.7.7), уравнение поля $R_{tr}=0$ утверждает лишь то, что A не зависит от времени:

$$\dot A=0.$$

Исследование выражений (11.7.4) — (11.7.6) показывает, что все временные производные в уравнениях поля сокращаются и последние оказываются совпадающими с уравнениями для статического

изотропного гравитационного поля в пустом пространстве [уравнения (8.1.13)]. Тогда можно повторить вывод § 2 гл. 8, а именно: обращение в нуль R_{rr} и R_{tt} приводит к соотношению

$$(AB)' = 0,$$

а равенство нулю $R_{\theta\theta}$ даст

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = 1.$$

Так как A от времени не зависит, общее решение принимает вид

$$A = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1}, \qquad B = f(t)\left(1 - \frac{2MG}{r}\right),$$

где GM — не зависящая от времени константа интегрирования, а $f(t)$ — неизвестная функция t. Функция $f(t)$ может быть приравнена к единице, если ввести новую временную координату

$$t' = \int^{t} f^{1/2}(t)\, dt.$$

Теперь метрика совсем не зависит от времени и согласуется с решением Шварцшильда (8.2.12). Таким образом, мы доказали *теорему Биркгоффа* [43, 44] о том, что сферически-симметричное гравитационное поле в пустом пространстве должно быть статическим с метрикой, соответствующей решению Шварцшильда. Теорема Биркгоффа — аналог результата, полученного Ньютоном в его теории движения Луны и состоящего в том, что гравитационное поле вне сферически-симметричного тела ведет себя так, как если бы вся масса тела была сконцентрирована в его центре. Несколько удивительно, что этот вывод остается справедливым в общей теории относительности, как и в теории Ньютона, поскольку в общей теории относительности нестатическое тело должно было бы излучать гравитационные волны. Теорема же Биркгоффа утверждает, что хотя пульсирующее симметричное тело и может создавать нестатические гравитационные поля внутри объема, занимаемого его массой, но в окружающее пустое пространство гравитационное излучение выйти не может. В этом смысле теорема Биркгоффа аналогична хорошо известному выводу атомной теории о том, что фотон не может быть излучен в результате квантового перехода между двумя состояниями, имеющими нулевые спины.

Теорему Биркгоффа можно использовать не только при рассмотрении гравитационного поля вне тела, но также при рассмотрении поля *внутри* пустой сферической полости в центре сферически-симметричного (но не обязательно статического) тела. В этом случае метрика также задается решением Шварцшильда, но так как точка $r = 0$ теперь находится в пустом пространстве,

в ней не может возникнуть никакой сингулярности, а потому постоянная интегрирования MG должна равняться нулю. Таким образом, теорема Биркгоффа имеет следствие, состоящее в том, что *метрика в пустой сферической полости в центре сферически-симметричной системы должна быть эквивалентна метрике плоского пространства Минковского* $\eta_{\mu\nu}$. Это следствие — аналог другого знаменитого вывода теории Ньютона о том, что гравитационное поле сферической оболочки равно нулю внутри нее. Однако звезды обычно не имеют полостей в центре, и это следствие не принесет нам большой пользы в данной главе. Его важность определяется тем обстоятельством, что теорема Биркгоффа — локальная теорема, не зависящая от условий, налагаемых на метрику при $r \to \infty$ (кроме сферической симметрии), так что пространство должно быть плоским в сферической полости в центре сферически-симметричной системы даже в том случае, если система бесконечна, и в действительности даже тогда, когда рассматриваемая система — это вся Вселенная. В § 1 гл. 15 мы увидим, что это следствие теоремы Биркгоффа оправдывает предельные рассмотрения космологических проблем с помощью ньютоновской механики.

§ 8. Сопутствующие координаты

В качестве следующего шага на пути подготовки к рассмотрению гравитационного коллапса и космологических проблем в гл. 14 введем очень полезные координаты — *сопутствующую систему координат* [45]. Она обладает свойством более естественного разделения пространства и времени, чем разделение в стандартных координатах, использованных в предыдущем параграфе.

Рассмотрим конечную область пространства, заполненную плотным облаком свободно падающих частиц. Предположим, что каждой частице придаются малые часы и фиксированный набор осей пространственных координат, которые могут быть определены как координаты x^i частицы в некоторой произвольной системе, когда ее собственные часы показывают время $t = 0$. (Правила установки различных часов обсуждаются ниже.) Пространственно-временные координаты $\mathbf{x}$, t любого события определяются рассмотрением $\mathbf{x}$ как пространственного аргумента частицы, задаваемого в том месте и в тот момент, где и когда происходит событие, а время t рассматривается как совпадающее с тем, что показывают часы частицы. Можно себе это представить в виде координатной сетки, движущейся вместе с облаком частиц, причем время определяется по часам, закрепленным в узлах этой сетки. Такую систему координат целесообразно вводить во всей области, занимаемой облаком частиц для любых интервалов времени, за которые траектории частиц не пересекаются.

В сопутствующих координатах метрика $g_{\mu\nu}$ имеет некоторые весьма простые свойства. Прежде всего заметим, что часы в этом случае находятся в состоянии свободного падения и показывают, следовательно, собственное время. Поэтому интервал собственного времени между двумя точками $\mathbf{x}$, t и $\mathbf{x}$, $t + dt$ на траектории данной частицы равен просто dt, т. е.

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu = -g_{tt}\,dt^2,$$

и, следовательно,

$$g_{tt} = -1. \tag{11.8.1}$$

Заметим далее, что траектория частицы $\mathbf{x} = \text{const}$, $t = \tau$ удовлетворяет уравнению, описывающему свободное падение, а именно

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \Gamma^i_{tt} = 0.$$

Подставляя сюда (11.8.1), получаем

$$g^{ij}\frac{\partial g_{jt}}{\partial t} = 0,$$

или, поскольку g^{ij}, вообще говоря, является несингулярной матрицей, имеем

$$\frac{\partial g_{jt}}{\partial t} = 0. \tag{11.8.2}$$

Оставался открытым вопрос о часах, придаваемых различным частицам. Предположим, что мы переставляем часы, совершая преобразование:

$$t' = t + f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{x}. \tag{11.8.3}$$

Тогда новая метрика будет состоять из элементов

$$g'_{tt} = -1, \tag{11.8.4}$$

$$g'_{ti} = g_{ti} + \frac{\partial f}{dx^i}, \tag{11.8.5}$$

$$g'_{ij} = g_{ij} - g_{ti}\frac{\partial f}{\partial x^j} - g_{tj}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}. \tag{11.8.6}$$

Возникает большое упрощение, если функцию f можно выбрать так, что два члена в соотношении (11.8.5) сокращаются, приводя к условию $g'_{it} = 0$. Существуют два важных случая, когда это действительно возможно:

А. Предположим, что мы устанавливаем все часы так, что время $t = 0$ соответствует моменту, когда все частицы находятся в покое. Этому предположению можно придать абсолютный физический смысл, если считать, что для каждой частицы P

при $t = 0$ можно найти локально-инерциальную систему координат x^μ, в которой частица P отделена от всех соседних частиц чисто пространственными интервалами, т. е.

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^i}\right)_{t=0,\ \mathbf{x}=\mathbf{x}_p} = 0.$$

Смещение частицы P за интервал времени dt имеет чисто временной характер:

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial t}\right)_{t=0,\ \mathbf{x}=\mathbf{x}_p} = 0.$$

В этой локально-инерциальной системе метрика совпадает с метрикой Минковского $\eta_{\mu\nu}$, а потому пространственно-временные компоненты метрики в сопутствующей системе при $t = 0$ обращаются в нуль:

$$g_{ti}(\mathbf{x}_p, 0) = \left[\eta_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial t}\right]_{t=0,\ \mathbf{x}=\mathbf{x}_p} = 0.$$

Вместе с (11.8.2) это приводит к тому, что g_{ti} исчезают везде, так что метрика приобретает вид

$$d\tau^2 = dt^2 - g_{ij}(\mathbf{x}, t)\, dx^i\, dx^j. \qquad (11.8.7)$$

Б. Если метрика явно сферически-симметричная, то интервал должен описываться общей формулой, с которой мы начинали предыдущий параграф, т. е.

$$d\tau^2 = C(r, t)\, dt^2 - D(r, t)\, dr^2 - 2E(r, t)\, dr\, dt - \\ - F(r, t)\, r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Единственная неисчезающая пространственно-временная компонента g_{tj} здесь — это $g_{tr} = 2E$, и (11.8.2) говорит нам тогда, что E не зависит от времени, а потому

$$g_{tr} = 2E(r), \qquad g_{t\theta} = g_{t\varphi} = 0.$$

Можно далее исключить компоненту g_{tj}, изменяя показания часов с помощью преобразования (11.8.3), где

$$f = -2\int^r E(r)\, dr.$$

Используя (11.8.4) и опуская штрихи, переписываем метрику в виде

$$d\tau^2 = dt^2 - U(r, t)\, dr^2 - V(r, t)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (11.8.8)$$

Здесь U и V — новые неизвестные функции, введенные вместо D и F.

Конечно, можно построить системы координат такого типа даже в том случае, когда облако свободно падающих частиц

только воображаемое. В дифференциальной геометрии системы координат, удовлетворяющие (11.8.1) и (11.8.2), называют *гауссовыми*, а когда $g_{ti} = 0$ и интервал принимает форму (11.8.7), координаты называют *гауссовыми нормальными*. Такие системы отсчета находят наиболее важные применения при рассмотрении свободно падающей жидкости. В этом случае 4-вектор скорости жидкости имеет по определению нулевую пространственную компоненту

$$U^i = 0, \tag{11.8.9}$$

а поскольку U^μ нормирован так, что

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1 \tag{11.8.10}$$

[выражение (5.4.4)], временная компонента в U^μ должна равняться

$$U^t = (-g_{tt})^{-1/2} = 1. \tag{11.8.11}$$

Мы будем применять только сферически-симметричные сопутствующие системы координат, когда интервал задается формулой (11.8.8). Ненулевые элементы метрического тензора в этом случае выглядят так:

$$\begin{aligned} &g_{rr} = U, \quad g_{\theta\theta} = V, \quad g_{\varphi\varphi} = V\sin^2\theta, \quad g_{tt} = -1, \\ &g^{rr} = U^{-1}, \quad g^{\theta\theta} = V^{-1}, \quad g^{\varphi\varphi} = (V\sin^2\theta)^{-1}, \quad g^{tt} = -1. \end{aligned} \tag{11.8.12}$$

Легко также вычислить ненулевые элементы аффинной связности:

$$\begin{aligned} &\Gamma^r_{rr} = \frac{U'}{2U}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{V'}{2U}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{V'}{2U}\sin^2\theta, \quad \Gamma^r_{rt} = \Gamma^r_{tr} = \frac{\dot U}{2U}, \\ &\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{V'}{2V}, \quad \Gamma^\theta_{\theta t} = \Gamma^\theta_{t\theta} = \frac{\dot V}{2V}, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \\ &\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{V'}{2V}, \quad \Gamma^\varphi_{t\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi t} = \frac{\dot V}{2V}, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta, \\ &\Gamma^t_{rr} = \frac{\dot U}{2}, \quad \Gamma^t_{\theta\theta} = \frac{\dot V}{2}, \quad \Gamma^t_{\varphi\varphi} = \frac{\dot V}{2}\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{11.8.13}$$

(Штрихи и точки означают $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial t$ соответственно.) С помощью (6.1.5) можно получить независимые ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$R_{rr} = \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} - \frac{\ddot U}{2} + \frac{\dot U^2}{4U} - \frac{\dot U\dot V}{2V}, \tag{11.8.14}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{V''}{2U} - \frac{V'U'}{4U^2} - \frac{\ddot V}{2} - \frac{\dot V\dot U}{4U}, \tag{11.8.15}$$

$$R_{tt} = \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}}{2V^2}, \tag{11.8.16}$$

$$R_{tr} = \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{V'\dot{V}}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV}. \tag{11.8.17}$$

Из сферической симметрии метрики снова следует, что

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta}\sin^2\theta, \tag{11.8.18}$$

$$R_{r\theta} = R_{r\varphi} = R_{\theta\varphi} = R_{\theta t} = R_{\varphi t} = 0. \tag{11.8.19}$$

§ 9. Гравитационный коллапс

В § 3 и 4 этой главы мы видели, что в процессе охлаждения звезда с массой, большей, чем несколько масс Солнца, не может достигнуть равновесия и стать белым карликом либо нейтронной звездой. Возможно, что массивная звезда всегда выбрасывает достаточное количество вещества к тому времени, когда она заканчивает свою термоядерную эволюцию, так что ее масса становится ниже пределов Чандрасекхара или Оппенгеймера — Волкова. Если же это не так, то она должна будет коллапсировать.

Систематическое рассмотрение гравитационного коллапса было бы слишком сложным в рамках этой книги. Для того чтобы получить некоторое понятие о том, как может происходить коллапс, рассмотрим один простейший случай [46] — сферически-симметричный коллапс «пылевидной» материи с пренебрежимо малым давлением [1]). Так как пылевидные частицы удерживаются чисто гравитационными силами, то они падают свободно, и мы можем использовать их как физический базис для сопутствующей системы координат типа той, что обсуждалась в предыдущем параграфе. Тогда метрика определяется выражением (11.8.8)

$$d\tau^2 = dt^2 - U(r, t)\,dr^2 - V(r, t)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \tag{11.9.1}$$

Тензор энергии-импульса жидкости с пренебрежимо малым давлением определяется выражением (5.4.2)

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu, \tag{11.9.2}$$

где $\rho(r, t)$ — плотность собственной энергии, а U^μ — 4-вектор скорости, определяемой в сопутствующей системе координат выражениями (11.8.9) и (11.8.11):

$$U^r = U^\theta = U^\varphi = 0, \qquad U^t = 1. \tag{11.9.3}$$

---

[1]) Подробное обсуждение решения Оппенгеймера — Волкова и других сферически-симметричных решений см. в статьях [47—54]; асимметричный коллапс разобран в работах [55—57].

При этом условие сохранения импульса $(T^{\mu}{}_{i})_{;\,\mu} = 0$ удовлетворяется автоматически, а условие сохранения энергии выглядит так:

$$(T^{\mu}{}_{t})_{;\,\mu} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho\Gamma^{\lambda}_{\lambda t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho\left(\frac{\dot{U}}{2U} + \frac{\dot{V}}{V}\right) = 0$$

или, в другой записи

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V\sqrt{U}) = 0. \tag{11.9.4}$$

Уравнения поля Эйнштейна можно тогда записать в виде

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}, \tag{11.9.5}$$

где

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\lambda} = \rho\left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} + U_{\mu}U_{\nu}\right]. \tag{11.9.6}$$

Последнюю величину можно вычислить с помощью выражений (11.9.1) и (11.9.3); в результате найдем, что единственными неисчезающими компонентами $S_{\mu\nu}$ являются

$$S_{rr} = \rho\frac{U}{2}, \quad S_{\theta\theta} = \rho\frac{V}{2}, \quad S_{\varphi\varphi} = S_{\theta\theta}\sin^2\theta, \quad S_{tt} = \frac{\rho}{2}. \tag{11.9.7}$$

В частности, имеем

$$S_{tr} = 0. \tag{11.9.8}$$

Подстановка (11.9.7), (11.9.8) и (11.8.14) — (11.8.17) в (11.9.5) приводит к четырем уравнениям поля:

$$\frac{1}{U}\left[\frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV}\right] - \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2UV} = -4\pi G\rho, \tag{11.9.9}$$

$$-\frac{1}{V} + \frac{1}{U}\left[\frac{V''}{2V} - \frac{U'V'}{4UV}\right] - \frac{\ddot{V}}{2V} - \frac{\dot{V}\dot{U}}{4VU} = -4\pi G\rho \tag{11.9.10}$$

$$\frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2} = -4\pi G\rho, \tag{11.9.11}$$

$$\frac{\dot{V}'}{V} - \frac{V'\dot{V}}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} = 0. \tag{11.9.12}$$

Произведем дальнейшее упрощение в модели, сделав предположение, что ρ не зависит от положения [46]. Будем искать решение с разделяющимися переменными в виде

$$U = R^2(t)\, f(r), \qquad V = S^2(t)\, g(r).$$

Тогда (11.9.12) требует, чтобы $\dot{S}/S$ равнялось $\dot{R}/R$, а потому мы можем нормировать f и g так, чтобы

$$S(t) = R(t).$$

Далее, мы имеем право переопределить радиальную координату, так как она является некоторой функцией $\tilde{r}$ от r, в частности можем выбрать $\tilde{r} = \sqrt{g(r)}$, так что f и g заменятся на $\tilde{f} = fg'^2/4g$ и $\tilde{g} = \tilde{r}^2$. Опуская тильды, получаем

$$U = R^2(t) f(r), \qquad V = S^2(t) r^2. \tag{11.9.13}$$

Уравнения (11.9.9) и (11.9.10) тогда принимают вид

$$-\frac{f'(r)}{rf^2(r)} - \ddot{R}(t) R(t) - 2\dot{R}^2(t) = -4\pi G R^2(t) \rho(t), \tag{11.9.14}$$

$$\left[-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rf^2(r)} - \frac{f'(r)}{2rf^2(r)}\right] - \ddot{R}(t) R(t) - 2\dot{R}^2(t) = -4\pi G R^2(t) \rho(t). \tag{11.9.15}$$

Первые слагаемые в (11.9.14) и (11.9.15) должны, очевидно, равняться одной и той же постоянной, которую обозначим как $-2k$:

$$-\frac{f'(r)}{rf^2(r)} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 f(r)} - \frac{f'(r)}{2rf^2(r)} = -2k$$

Единственное решение этого уравнения имеет вид

$$f(r) = [1 - kr^2]^{-1},$$

а потому метрика выглядит так:

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2\right]. \tag{11.9.16}$$

(Между прочим, эта метрика является пространственно-однородной, а также изотропной, она будет служить нам кинематической основой при изложении релятивистской космологии в гл. 14.)

Остается вычислить функции $\rho(t)$ и $R(t)$. Подставляя (11.9.13) и (11.9.14) в условие сохранения энергии (11.9.4), находим, что $\rho(t) R^3(t)$ постоянно. Нормируем радиальную координату r следующим образом:

$$R(0) = 1, \tag{11.9.17}$$

тогда имеем

$$\rho(t) = \rho(0) R^{-3}(t). \tag{11.9.18}$$

Уравнения поля (11.9.14) или (11.9.15) и (11.9.11) теперь оказываются обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$-2k - \ddot{R}(t) R(t) - 2\dot{R}^2(t) = -4\pi G \rho(0) R^{-1}(t), \tag{11.9.19}$$

$$\ddot{R}(t) R(t) = -\frac{4\pi G}{3} \rho(0) R^{-1}(t). \tag{11.9.20}$$

Можно исключить $\ddot{R}(t)$, складывая эти два уравнения; в результате получим

$$\dot{R}^2(t) = -k + \frac{8\pi G}{3}\rho(0)\,R^{-1}(t). \tag{11.9.21}$$

Уравнения (11.9.19) и (11.9.20) можно вывести также с помощью (11.9.21) и его временной производной, а потому мы можем забыть о них и для вычисления $R(t)$ прямо использовать (11.9.21).

Предположим теперь, что жидкость покоится (в стандартных координатах) при $t = 0$, так что

$$\dot{R}(0) = 0 \tag{11.9.22}$$

и, следовательно, (11.9.21) и (11.9.17) приводят к соотношению

$$k = \frac{8\pi G}{3}\rho(0). \tag{11.9.23}$$

Тогда уравнение (11.9.21) можно записать в виде

$$\dot{R}^2(t) = k\,[R^{-1}(t) - 1]. \tag{11.9.24}$$

Решением будет параметрическое уравнение *циклоиды*

$$t = \left(\frac{\psi + \sin\psi}{2\sqrt{k}}\right), \qquad R = \frac{1}{2}(1 + \cos\psi). \tag{11.9.25}$$

Отметим, что $R(t) = 0$, когда $\psi = \pi$, а следовательно, когда $t = T$,

$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{k}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{8\pi G\rho(0)}\right)^{1/2}. \tag{11.9.26}$$

Таким образом, жидкая сфера с начальной плотностью $\rho(0)$ *и нулевым давлением переходит из состояния покоя в состояние коллапса с бесконечной плотностью собственной энергии за конечное время* T.

Хотя коллапс завершается за конечное координатное время $t = T$, любой световой сигнал, идущий к нам с поверхности сферы, будет проходить ее гравитационное поле с задержкой (§ 7 гл. 8), так что мы на Земле *не* будем наблюдать внезапного исчезновения звезды. Чтобы прояснить картину, завершим наши вычисления метрики вне звезды.

Теорема Биркгоффа, доказанная в § 7 этой главы, показывает, что всегда можно найти «стандартную» систему координат $\bar{r}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{t}$, в которой метрика вне сферы принимает вид

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2MG}{\bar{r}}\right)d\bar{t}^2 - \left(1 - \frac{2MG}{\bar{r}}\right)^{-1} d\bar{r}^2 - \bar{r}^2\,d\bar{\theta}^2 - \bar{r}^2\sin^2\bar{\theta}\,d\bar{\varphi}^2. \tag{11.9.27}$$

Но эта метрика не имеет гауссовой нормальной формы (11.9.1), а потому, чтобы сшить решения на поверхности, мы должны либо преобразовать внутреннее решение (11.9.16) к стандартным координатам, либо внешнее решение (11.9.27) привести к гауссовым нормальным координатам. Выберем первый способ [46].

Рассмотрение метрики (11.9.16) сразу показывает, что стандартные пространственные координаты $\bar{r}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$ должны быть выбраны в виде

$$\bar{r} = rR(t), \qquad \bar{\theta} = \theta, \qquad \bar{\varphi} = \varphi. \tag{11.9.28}$$

Для того чтобы найти стандартную временную координату, такую, при которой $d\tau^2$ не содержит перекрестного члена $d\bar{r}\,d\bar{t}$, воспользуемся способом «интегрирующего множителя», приведенным в § 7 этой главы. В результате получаем

$$\bar{t} = \left(\frac{1-ka^2}{k}\right)^{1/2} \int\limits_{S(r,\,t)}^{1} \frac{dR}{(1-ka^2/R)} \left(\frac{R}{1-R}\right)^{1/2}, \tag{11.9.29}$$

где

$$S(r,\,t) = 1 - \left(\frac{1-kr^2}{1-ka^2}\right)^{1/2} (1 - R(t)). \tag{11.9.30}$$

Постоянная a произвольна, и ее удобно приравнять радиусу рассматриваемой сферы в сопутствующих координатах. То, что метрика в системе координат $\bar{r}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{t}$ принимает стандартный вид, проверяется непосредственно:

$$d\tau^2 = B(\bar{r},\,\bar{t})\,d\bar{t}^2 - A(\bar{r},\,\bar{t})\,d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\bar{\theta}^2 + \sin^2\bar{\theta}\,d\bar{\varphi}^2),$$

где

$$B = \frac{R}{S}\left(\frac{1-kr^2}{1-ka^2}\right)^{1/2} \frac{(1-ka^2/S)^2}{(1-kr^2/R)}, \tag{11.9.31}$$

$$A = \left(1 - \frac{kr^2}{R}\right)^{-1}. \tag{11.9.32}$$

Теперь ясно, что S является функцией $\bar{t}$, определяемого выражением (11.9.29), и что r и $R(t)$ — функции $\bar{r}$ и S или $\bar{r}$ и $\bar{t}$, определяемых решениями уравнений (11.9.28) и (11.9.30). Это выглядит несколько запутанным, однако при r, равном a, радиусу звезды (a постоянна, поскольку r — сопутствующая координата), имеем

$$\bar{r} = \bar{a}(t) \equiv aR(t), \tag{11.9.33}$$

$$\bar{t} = \left(\frac{1-ka^2}{k}\right)^{1/2} \int\limits_{R(t)}^{1} \frac{dR}{(1-ka^2/R)} \left(\frac{R}{1-R}\right)^{1/2}, \tag{11.9.34}$$

$$B(\bar{a}, \bar{t}) = \left(1 - \frac{ka^2}{R(t)}\right), \tag{11.9.35}$$

$$A(\bar{a}, \bar{t}) = \left(1 - \frac{ka^2}{R(t)}\right)^{-1}. \tag{11.9.36}$$

[Выражение (11.9.34) можно было бы получить путем интегрирования уравнений свободного падения, данных в § 4 гл. 8.] Сравнивая это с (11.9.27), видим, что внутреннее и внешнее решения сшиваются гладко при $\bar{r} = aR(t)$, если

$$k = \frac{2MG}{a^3}. \tag{11.9.37}$$

Вместе с (11.9.23) это говорит о том, что

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho(0) a^3, \tag{11.9.38}$$

что для нас уже не удивительно.

Вернемся теперь к задаче о том, как ведут себя световые сигналы, испускаемые с поверхности коллапсирующей сферы. Световой сигнал, испускаемый в радиальном направлении в момент стандартного времени $\bar{t}$, будет иметь производную $d\bar{r}/d\bar{t}$, соответствующую выражению (11.9.27) и условию $d\tau = 0$, а потому он будет прибывать в отдаленную точку $\bar{r}$ в момент времени

$$\bar{t}' = \bar{t} + \int_{aR(t)}^{\bar{r}'} \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr. \tag{11.9.39}$$

Наиболее неожиданное следствие выражений (11.9.39) и (11.9.34) — это стремление как $\bar{t}$, так и $\bar{t}'$ к бесконечности, когда радиус рассматриваемой сферы (11.9.33) приближается к радиусу Шварцшильда $2GM$, т. е. когда

$$R(t) \to \frac{2GM}{a} = ka^2. \tag{11.9.40}$$

Таким образом, оказывается, что коллапс до шварцшильдовского радиуса, с точки зрения внешнего наблюдателя, длится бесконечно долго, а коллапс до $R = 0$ извне ненаблюдаем.

Хотя коллапсирующая сфера визуально внезапно не исчезает, свет от нее постепенно слабеет из-за все более возрастающего красного смещения. Собственное время источника света на поверхности сферы — это как раз сопутствующее время t, а потому сопутствующий интервал времени между моментами испускания импульсов на поверхности равняется естественной длине волны λ_0, которая излучалась бы источником в отсутствие гравитации. Стандартный временной интервал $d\bar{t}'$ между моментами прибытия

импульсов в точку $\bar{r}'$ равен наблюдаемой длине волны λ'; следовательно, относительное изменение длины волны вычисляется следующим образом:

$$z \equiv \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{d\bar{t}'}{dt} - 1 = \frac{d\bar{t}}{dt} - a\dot{R}(t)\left(1 - \frac{2MG}{aR(t)}\right)^{-1} - 1 =$$
$$= -\dot{R}(t)\left(1 - \frac{ka^2}{R(t)}\right)^{-1}\left[\left(\frac{1-ka^2}{k}\right)^{1/2}\left(\frac{R(t)}{1-R(t)}\right)^{1/2} + a\right] - 1.$$

Используя (11.9.24) для определения $\dot{R}(t)$, получаем

$$z = \left(1 - \frac{ka^2}{R(t)}\right)^{-1}\left[(1-ka^2)^{1/2} + a\sqrt{k}\left(\frac{1-R(t)}{R(t)}\right)^{1/2}\right] - 1. \quad (11.9.41)$$

Для того чтобы увидеть, как изменяется красное смещение z со временем $\bar{t}'$, предположим, что радиус сферы вначале намного превышает радиус Шварцшильда:

$$ka^2 = \frac{2GM}{a} \ll 1, \quad (11.9.42)$$

и будем различать два периода в развитии коллапса:

А. Пока t подходит близко к T, имеем

$$\frac{ka^2}{R(t)} \ll 1. \quad (11.9.43)$$

Подставляя (11.9.42) и (11.9.43) в (11.9.34), (11.9.39) и (11.9.41), получаем (для $\bar{r}' \gg a$)

$$\bar{t} \approx t,$$
$$\bar{t}' \approx \bar{t} + \bar{r}' - aR(t) \approx t + \bar{r}' - aR(t) \approx t + \bar{r}', \quad (11.9.44)$$
$$z \approx a\sqrt{k}\left(\frac{1-R(t)}{R(t)}\right)^{1/2} \approx a\sqrt{k}\left(\frac{1-R(\bar{t}'-\bar{r}')}{R(\bar{t}'-\bar{r}')}\right)^{1/2}.$$

Б. В итоге имеем

$$\frac{ka^2}{R(t)} \to 1$$

в момент времени t_1, найденный с помощью (11.9.25) в виде

$$t_1 \approx \frac{1}{2\sqrt{k}}\left[\pi - \frac{4}{3}(ka^2)^{3/2}\right]. \quad (11.9.45)$$

Тогда (11.9.34), (11.9.39) и (11.9.41) принимают вид

$$\bar{t} \approx -ka^3 \ln\left[1 - \frac{ka^2}{R(t)}\right] + \text{const},$$
$$\bar{t}' \approx \bar{t} - ka^3 \ln\left[1 - \frac{ka^2}{R(t)}\right] + \text{const} \approx -2ka^3 \ln\left[1 - \frac{ka^2}{R(t)}\right] + \text{const},$$
$$z \approx 2\left(1 - \frac{ka^2}{R(t)}\right)^{-1} \sim \exp\left(\frac{\bar{t}'}{2ka^3}\right). \quad (11.9.46)$$

Рассматривая этапы А и Б вместе, приходим к выводу, что красное смещение с точки зрения наблюдателя, находящегося в точке $\bar{r}'$, отсутствует, когда коллапс только начинается, затем постепенно растет, но остается по величине порядка $a\sqrt{k} \ll 1$ до тех пор, пока время не становится почти равным $T = \pi/2\sqrt{k}$, а после этого растет экспоненциально с показателем $1/2ka^3$. Например, красное смещение для коллапсирующей сферы с массой $M = 10^8\ M_\odot$ и радиусом $a = 100$ световых лет будет порядка 10^{-3} в течение периода порядка 10^5 лет, после чего красное смещение внезапно начнет расти экспоненциально, увеличиваясь в e раз за время порядка 1 мин. С практической точки зрения, коллапсирующая сфера внезапно становится полностью отрезанной от остальной Вселенной.

Действительно ли это так? Даже если коллапсирующее тело становится визуально не наблюдаемым, оно все же имеет гравитационное поле, и, как показано в § 6 гл. 7, измерение этого поля на больших расстояниях может быть использовано для определения энергии-импульса и углового момента тела. Если тело имеет ненулевой суммарный заряд, то измерение электрического поля на больших расстояниях также будет, по теореме Гаусса, говорить о заряде этого тела. Интересен вопрос: могут ли измерения гравитационного и (или) электромагнитного полей *вне* коллапсирующего тела давать какую-нибудь информацию об этом теле, кроме значений энергии, импульса, углового момента и заряда. В случае сферически-симметричного электрически нейтрального тела, который мы рассмотрели в этой главе, ответ дает теорема Биркгоффа, а именно: гравитационное поле вне сферически-симметричного тела должно быть шварцшильдовского типа, так что все, что мы сможем узнать когда-либо об этом теле, — это величина его массы. (Сферическая симметрия, естественно, предполагает нулевой импульс и нулевой угловой момент.) Картер [58] показал [1]), что, когда гравитационное поле *аксиально симметричного* коллапсирующего тела приходит в стационарное состояние, его внешняя метрика принадлежит к *двухпараметрическому* семейству решений, таких, как метрики Керра (§ 7 гл. 11), которые полностью определяются полной массой и угловым моментом. Большинство придерживается мнения, что гравитационное поле любого электрически нейтрального коллапсирующего тела будет в итоге приближаться к полю, описываемому метрикой Керра.

Как отмечалось во введении к этой главе, интерес к явлению гравитационного коллапса возродился в последнее десятилетие в связи с открытием квазизвездных источников, которые, по-видимому, обладают какими-то новыми источниками энергии.

[1]) Другие строгие теоремы о возможных формах внешних метрик при различных условиях приведены в книге [59] и статьях [60—63].

Максимальная энергия, выделяющаяся при синтезе из водорода какого-нибудь наиболее стабильного ядра, например ядра железа, равна всего лишь 8 МэВ на нуклон, что составляет менее 1% от его массы покоя. Аннигиляция материи-антиматерии давала бы эффективность 100%, исключая энергетические потери на излучение нейтрино. Однако этот процесс может быть важен только в том случае, когда существует какой-то мощный естественный источник антинуклонов. Таким образом, единственным вероятным механизмом превращения массы в энергию со столь большой эффективностью остается гравитационный коллапс [64].

Облако пыли, коллапсирующее по модели Оппенгеймера — Снайдера, не будет выделять никакой энергии во внешний мир. Чтобы извлечь растущую кинетическую энергию падающих частиц, надо как-то замедлить их падение к центру: либо за счет какого-нибудь макроскопического «толчка» всей системы в целом, либо за счет столкновения частиц между собой, в результате чего коллапсирующий газ будет нагреваться. Подробные вычисления [65, 66] обнаруживают обескураживающе низкую эффективность превращения массы в действительную энергию при гравитационном коллапсе *изолированного тела*. Однако частицы, падающие в область с метрикой Керра, могут выйти из нее с более высокой энергией, возникающей за счет энергии вращения коллапсирующего тела [67].

Независимо от того, имеют или не имеют отношение квазизвездные источники к гравитационному коллапсу, остается такой вопрос: что случается с погасшей звездой, чья масса выше пределов Чандрасекара и Оппенгеймера — Волкова? В последние годы Пенроуз и Хоукинг использовали топологические методы, чтобы доказать ряд мощных теорем [68—70] (см. также [67]) о том, что при разумных требованиях (справедливости общей теории относительности, положительности энергии, заполненности Вселенной веществом, соблюдении принципа причинности) коллапс действительно становится неизбежным как только возникают *ловушечные* поверхности. Ловушка — это замкнутая пространственно-подобная двумерная поверхность, для которой как выходящее, так и входящее семейства направленных в будущее нулевых геодезических, ортогональных к этой поверхности, обязательно сходятся. (Для метрики Шварцшильда сферы с постоянными r и t являются ловушечными поверхностями при значениях r, меньших радиуса Шварцшильда $2MG$.) Однако не известно, может ли реальная массивная звезда развить в действительности ловушечную поверхность или звезда просто разорвется на части с достаточно малыми массами и превратится в стабильные нейтронные звезды или белые карлики.

Если гравитационный коллапс — действительно неизбежный конец эволюции *массивных* тел, то мы должны ожидать, что Все-

ленная полна черных дыр — коллапсирующих тел, чье существование выдают только их гравитационные поля или энергия, освобождающаяся при втягивании материи [1]). Надежда наблюдения гравитационного коллапса в основном связывается с двойной звездой, один из партнеров которой обычная видимая звезда, а другой партнер — черная дыра (см., например, [73,74]).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Релятивистская астрофизика в ОТО

Quasars and High Energy Astronomy, ed. K. N. Douglas, I. Robinson. A. Schild, E. L. Schucking, J. A. Wheeler and N. J. Woolf, Second «Texas» Symposium on Relativistic Astrophysics, Gordon and Breach, 1969.

High Energy Astrophysics, ed. L. Gratton, Proceedings of the International School of Physics «Enrico Fermi», Course XXXV, Academic Press, 1966.

Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse, ed. I. Robinson, A. Schild and E. L. Schucking, First «Texas» Symposium on Relativistic Astrophysics, University of Chicago Press, 1965.

Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., УФН, 84, 377 (1964); 86, 447 (1965).

Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Теория тяготения и эволюция звезд, «Наука», 1971.

Я сожалею, что последней книги, охватывающей чрезвычайно много вопросов, еще не было во время написания этой главы.

Нерелятивистская теория звездных структур

Chandrasekhar S., An Introduction to the Study of Stellar Structure. Dover Publications, 1939 (см. перевод: *Чандрасекар Ш.*, Введение в учение о строении звезд, ИЛ, 1950).

Salpeter E. E., Stellar Structure Leading up to White Dwarfs and Neutron Stars, в книге Relativity Theory and Astrophysics. 3. Stellar Structure, ed. J. Ehlers, American Mathematical Society, 1967, p. 1.

Schwarzschild M., Structure and Evolution of the Stars, Princeton University Press, 1958 (см. перевод: *Шварцшильд М.*, Строение и эволюция звезд, ИЛ, 1961).

Пульсары и нейтронные звезды

Cameron A. G. W., Neutron Stars, в книге Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 8, ed. L. Goldberg, Annual Reviews, Inc., 1970, p. 179.

Cameron A. G. W., How Are Neutron Stars Formed? Comments Astrophys. and Space Phys., 1, 172 (1969).

Frautschi S., Bahcall J. N., Steigman G., Wheeler J. C., Ultradense Matter Comments Astrophys. and Space Phys., 3, 121 (1971).

Ginzburg V. L., Superfluidity and Superconductivity in Astrophysics, Comments Astrophys. and Space Phys., 1, 81 (1969).

Gold T., The Nature of Pulsars, в книге Contemporary Physics — Trieste Symposium 1968, ed. A. Salam, Vol. 1, International Atomic Energy Agency, 1969, p. 477.

Hewish A., Pulsars, в книге Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 8, ed. L. Goldberg, Annual Reviews, Inc., 1970, p. 265.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, Физматгиз, 1964, гл. 11.

---

[1]) Гравитационное излучение от осциллирующих черных дыр рассмотрено в статье [71]. Гравитационное излучение от вещества, падающего в черные дыры, рассмотрено в [72].

Ostriker J. P., The Nature of Pulsars, Scientific American, January 1971, p. 48.
Ruderman M. A., Solid Stars, Scientific American, March 1971, p. 24.
Symposium on the Crab Pulsar, Pub. Astron. Soc. Pac., 82, № 486 (1970).
Wheeler J. A., Superdense Stars, в книге Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 4, ed. L. Goldberg, Annual Reviews, Inc., 1966, p. 393.

Сверхтяжелые объекты

Wagoner R. V., Physics of Massive Objects, в книге Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 7, ed. L. Goldberg, Annual Reviews, Inc., 1969, p. 553.

Гравитационный коллапс

Harrison B. K., Thorne K. S., Wakano M., Wheeler J. A., Gravitational Theory and Gravitational Collapse, University of Chicago Press, 1965 (см. перевод: *Уилер Дж., Гаррисон Б., Вакано М., Торн К.*, Теория гравитации и гравитационный коллапс, «Мир», 1967).
Hawking S. W., Sciama D. W., Singularities in Collapsing Stars and Expanding Universes, Comments Astrophys. and Space Phys., **1**, 1 (1969).
Geroch R., Singularities, в книге Relativity — Proceedings of the Relativity Conference in the Midwest, ed. M. Carmeli, S. I. Fickler and L. Witten, Plenum Press, 1970, p. 259.
May M. M., White R. H., Hydrodynamic Calculations of General Relativistic Collapse, в книге Relativity Theory and Astrophysics. 3. Stellar Structure (см. выше), p. 96.
Misner C. W., Gravitational Collapse, в книге Astrophysics and General Relativity (1968 Brandies University Summer Institute in Theoretical Physics), Vol. 1, ed. M. Chretien, S. Deser and J. Goldstein, N. Y. 1969.
Penrose R., On Gravitational Collapse, в книге Contemporary Physics—Trieste Symposium 1968, ed. A. Salam, Vol, 1, International Atomic Energy Agency, 1969, p. 545.
Penrose R., Structure of Space-Time, в книге Batelle Rencontres, ed. C. M. DeWitt and J. A. Wheeler, W.A. Benjamin, 1968, p. 121 (см. перевод: *Пенроуз Р.*, Структура пространства-времени, «Мир», 1972).
Thorne K. S., Nonspherical Gravitational Collapse: Does it Produce Black Holes?, Comments Astrophys. and Space Phys., **2**, 191 (1970).
Ruffini R., Wheeler J. A., Introducing the Black Hole, Phys. Today, 30 (January 1971), p. 30.
Wheeler J. A., Geometrodynamics and the Issue of the Final State, в книге Relativity, Groups, and Topology, ed. C. DeWitt and B. DeWitt, Gordon and Breach Science Publ., 1964, p. 317.

По поводу квазаров см. литературу к гл. 14.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Harrison B. K., Thorne K. S., Wakano M., Wheeler J. A.*, Gravitation Theory and Gravitational Collapse, University of Chicago Press, 1965, Appendix B (см. перевод: *Уилер Дж., Гаррисон Б., Вакано Н., Торн К.*, Теория гравитации и гравитационный коллапс, «Мир», 1967).
2. *Bardeen J. M.*, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, 1965, не опубликовано.
3. *Hartle J. B., Thorne K. S.*, Ap. J., 158, 179 (1969)*.
4. *Morse P. M., Feshbach H.*, Methods of Mathematical Physics, McGraw-Hill, 1953, p. 278 (см. перевод: *Морс Ф. М., Фешбах Г.*, Методы теоретической физики, т. 1, ИЛ, 1958).

* Ap. J.— Astrophys. Journ. — *Прим. ред.*

5. *Chandrasekhar S.*, Stellar Structure, Dover Publ., 1939, Ch. IV (см. перевод: *Чандрасекар Ш.*, Введение в учение о строении звезд, ИЛ, 1950, гл. 4).
6. *Ritter A.*, Wiedemann Ann., **11**, 332 (1880).
7. *Betti E.*, Nuovo Cimento, **7**, 26 (1880).
8. *Ledoux P.*, в книге Stars and Stellar Structure VIII: Stellar Structure, ed. L. H. Aller and D. B. McLaughlin, Chicago, 1965, Ch. 10.
9. *Chandrasekhar S.*, Ap. J., **140**, 417 (1964).
10. *Chandrasekhar S.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 95, 207 (1935).
11. *Ландау Л. Д.*, Phys. Zs. Sowjetunion, **1**, 285 (1932).
12. *Oppenheimer J. R., Volkoff G. M.*, Phys. Rev., 55, 374 (1939).
13. *Baade W., Zwicky F.*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S., **20**, 254 (1934).
14. *Oppenheimer J. R., Serber R.*, Phys. Rev., **54**, 540 (1938).
15. *Tolman R. C.*, Phys. Rev., **55**, 364 (1939).
16. *Misner C. W., Zapolsky H. S.*, Phys. Rev. Lett., **12**, 635 (1964).
17. *Leung Y. C., Wang C. G.*, Astrophys. J., **170**, 499 (1972).
18. *Wang C. G., Rose W. K., Schlenker S. L.*, Ap. J., **160**, L17 (1970).
19. *Lee H., Leung Y. C., Wang C. G.*, Ap. J., **166**, 387 (1971).
20. *Tsuruta S., Cameron A. G. W.*, Canadian J. Phys., **44**, 1895 (1966).
21. *Cameron A. G. W.*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., 8, 179 (1970).
22. *Ruderman M.*, Nature, **223**, 597 (1969).
23. *Midgal A. B.*, Nucl. Phys., **13**, 655 (1959).
24. *Canuto V., Chiu H. Y.*, Phys. Rev., **173**, 1210, 1220, 1229 (1968).
25. *Hartle J. B.*, Ap. J., **150**, 1005 (1967).
26. *Hartle J. B., Thorne K. S.*, Ap. J., **153**, 807 (1968); **158**, 719 (1969).
27. *Hewish A., Bell S. J., Pilkington J. D. H., Scott P. F., Collins R. A.*, Nature, **217**, 709 (1968).
28. *Gold T.*, Nature, **218**, 731 (1968).
29. *Hewish A.*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., 8, 265 (1970).
30. *Hoyle F., Fowler W. A.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **125**, 169 (1963); Nature, **197**, 533 (1963).
31. *Hoyle F., Fowler W. A., Burbidge G. R., Burbidge E. M.*, Ap. J., **139**, 909 (1964).
32. *Fowler W. A.*, в книге Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse, University of Chicago Press, 1965, p. 56, Eq. (24).
33. *Schwarzschild K.*, Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss., 424 (1916).
34. *Bondi H.*, Proc. Roy. Soc., **A281**, 39 (1964); Lectures on General Relativity, Prentice-Hall, ed. S. Deser and K. W. Ford, 1964, p. 375.
35. *Ruderman M. A.*, Phys. Rev., **172**, 1286 (1968).
36. *Bludman S. A., Ruderman M. A.* Phys. Rev., **170**, 1176 (1968).
37. *Bludman S. A., Ruderman M. A.*, Phys. Rev., **D1**, 3243 (1970).
38. *Бисноватый-Коган Ж. С., Зельдович Я. Б.*, Астрофизика, **5**, 223 (1969).
39. *Bisnovatyi-Kogan G. S., Thorne K. S.*, Ap. J., **160**, 875 (1970).
40. *Fackerell E. D., Ipser J. R., Thorne K. S.*, Comments Astrophys. and Space Phys., **1**, 140 (1969).
41. *Hoyle F., Fowler W. A.*, Nature, **213**, 373 (1967).
42. *Zapolsky H. S.*, Ap. J., **153**, L163 (1968).
43. *Birkhoff G.*, Relativity and Modern Physics, Harvard University Press, 1923, p. 253.
44. *Deser S., Laurent B. E.*, Am. J. Phys., **36**, 789 (1968).
45. *Tolman R. C.*, Proc. Nat. Acad. USA, **20**, 3 (1934).
46. *Oppenheimer J. R., Snyder H.*, Phys. Rev., **56**, 455 (1939).
47. *Klein O.*, в книге Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit, Vieweg, 1961.
48. *Hoyle F., Fowler W. A., Burbidge G. R., Burbidge E. M.*, Ap. J., **139**, 909 (1964).
49. *Hoyle F., Fowler W. A.*, в книге Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse, ed. I. Robinson et al., Chicago, 1965.
50. *Misner C. W., Sharp D. H.*, Phys. Rev., **136**, B571 (1964).

51. *McVittie G. C.*, Ap. J., **140**, 401 (1964).
52. *McVittie G. C.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 6, № 1 (1967).
53. *May M. M.*, *White R. H.*, Phys. Rev., **141**, 1232 (1966).
54. *Colgate S. A.*, *White R. H.*, Ap. J., **143**, 626 (1966).
55. *Cohen J. M.*, Phys. Rev., **173**, 1258 (1966).
56. *Fujimoto M.*, Ap. J., **152**, 523 (1968).
57. *de la Cruz V.*, *Chase J. E.*, *Israel W.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 423 (1970).
58. *Carter B.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 331 (1971).
59. *Lichnerowicz A.*, Théories relativistes de la gravitation, Masson, 1955.
60. *Deser S.*, Compt. Rend., **264**, 805 (1967).
61. *Israel W.*, Phys. Rev., **164**, 1776 (1967).
62. *Дорошкевич А. Ж.*, *Зельдович Я. Б.*, *Новиков И. Д.*, ЖЭТФ, **49**, 170 (1965).
63. *Wald R. M.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 1653 (1971).
64. *Hoyle F.*, *Fowler W.*, Nature, **197**, 533 (1963).
65. *Dyson F. J.*, Comments Astrophys. and Space Phys., **1**, 75 (1969).
66. *Leibovitz C.*, *Israel W.*, Phys. Rev., **1**, 3226 (1970).
67. *Penrose R.*, Riv. Nuovo Cimento, **1**, Numero Speciale, 252 (1969).
68. *Penrose R.*, Phys. Rev. Lett., **14**, 57 (1965).
69. *Hawking S. W.*, Proc. Roy. Soc., **A294**, 511 (1966); **A295**, 490 (1966); **A300**, 187 (1967); **A308**, 433 (1967).
70. *Hawking S. W.*, *Penrose R.*, Proc. Roy. Soc., **A314**, 529 (1970).
71. *Press W. H.*, Ap. J., **170**, L105 (1971).
72. *Davis M.*, *Ruffini R.*, *Press W. H.*, *Price R. H.*, Phys. Rev. Lett., **27**, 1466 (1971).
73. *Cameron A. G. W.*, Nature, **229**, 178 (1971).
74. *Wilson R. E.*, Ap. J., **170**, 529 (1971).

Часть IV
РАЗВИТИЕ ФОРМАЛИЗМА

Вы могли бы с полным основанием согласиться, что принцип минимальности справедлив, но в действительности он не лучше, чем другой принцип. Однако же перейдите из лекционного зала в ванную и посмотрите на большой палец вашей ноги в воде. Ваши ноги не покажутся вам стройными, поскольку скорость света в воде отличается от скорости света в воздухе. Принцип Ферма подскажет вам, как при таких условиях описать картину, и Вам не обязательно при этом помнить о законе Снеллиуса об углах. Кто будет колебаться, какое из научных объяснений лучше?

Пауль Е. Самуэльсон,
Принципы максимума в аналитической экономике, Нобелевская лекция, 11 декабря 1970 г.

Глава 12
ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Имеется множество физических систем, динамические уравнения которых могут быть получены с помощью «принципа наименьшего действия», т. е. на основании утверждения, что некий функционал от динамических переменных, «действие», стационарен относительно малых вариаций этих переменных. Такой вывод динамических уравнений имеет одно большое преимущество: он позволяет установить непосредственную связь между принципами симметрий и законами сохранения.

Симметрия действия, с которой в основном мы имеем дело в этой книге,— это общая ковариантность. В этой главе мы дадим общее определение тензора энергии-импульса любой материальной системы как функциональной производной от действия системы. Применение принципа действия и общей ковариантности позволит нам затем показать, что этот тензор в самом деле сохраняется.

Чтобы получить действительно общую формулировку теории относительности с помощью принципа действия, необходимо исследовать вопрос, который мы тщательно обходили до сих пор:

каким образом включить эффекты гравитации в теорию поля частиц с полуцелым спином? Чтобы ответить на этот вопрос, надо развить некий подход к общей теории относительности, связанный с «тетрадным формализмом». В нем непосредственно используются семейства локально-инерциальных систем, которые служили отправным пунктом в гл. 3. Хотя доказательства выглядят сложнее, но тензор энергии-импульса в нем получается симметричным и сохраняющимся.

§ 1. Принцип наименьшего действия для вещества. Пример

Начнем с того, что рассмотрим в качестве примера физическую систему, уравнения движения которой могут быть получены с помощью принципа наименьшего действия. Такой системой является плазма, состоящая из несоударяющихся n частиц с массами m_n и зарядами e_n, а также электромагнитного поля $F_{\mu\nu}(x)$, которое они создают. Уравнения движения в произвольном внешнем гравитационном поле $g_{\mu\nu}$ имеют вид

$$\frac{d^2x_n{}^\mu}{d\tau_n} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_n)\frac{dx_n{}^\nu}{d\tau_n}\frac{dx_n{}^\lambda}{d\tau_n} = \left(\frac{e_n}{m_n}\right) F^\mu{}_\nu(x_n)\frac{dx_n{}^\nu}{d\tau_n}, \qquad (12.1.1)$$

$$d\tau_n \equiv (-g_{\mu\nu}\,dx_n{}^\mu\,dx_n{}^\nu)^{1/2}, \qquad (12.1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\sqrt{g(x)}\,F^{\mu\nu}(x)\right] = -\sum_n e_n \int \delta^4(x - x_n)\frac{dx_n{}^\nu}{d\tau_n}\,d\tau_n, \qquad (12.1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}F_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\nu}F_{\lambda\mu}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}F_{\nu\lambda}(x) = 0. \qquad (12.1.4)$$

[См. уравнения (5.2.9), (5.1.11), (5.2.6), (5.2.13) и (5.2.7).] Для того чтобы удовлетворить (12.1.4), введем вектор-потенциал $A_\mu(x)$:

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu}. \qquad (12.1.5)$$

Независимыми динамическими переменными можно тогда считать $A_\mu(x)$ и $x_n{}^\nu(p)$, где p — некоторая величина, которая одновременно параметризует все пространственно-временные траектории различных частиц.

Рассмотрим следующую функцию в качестве действия системы:

$$I_M = -\sum_n m_n \int_{-\infty}^{\infty} dp\left[-g_{\mu\nu}(x_n(p))\frac{dx_n{}^\mu(p)}{dp}\frac{dx_n{}^\nu(p)}{dp}\right]^{1/2} -$$

$$-\frac{1}{4}\int d^4x g^{1/2}(x)\,F_{\mu\nu}(x)\,F^{\mu\nu}(x) +$$

$$+\sum_n e_n \int_{-\infty}^{\infty} dp\,\frac{dx_n{}^\mu(p)}{dp}\,A_\mu(x_n(p)). \qquad (12.1.6)$$

[Символ M должен напоминать нам, что рассматривается действие только вещества и излучения, а $g_{\mu\nu}(x)$ учитывается как внешнее гравитационное поле.] Тогда ясно, что $F_{\mu\nu}(x)$ определяется выражением (12.1.5) и индексы у $F_{\mu\nu}$ поднимаются с помощью контравариантного метрического тензора, как обычно.

Принцип наименьшего действия утверждает, что действие I_M не изменяется при бесконечно малых изменениях динамических переменных:

$$x^\mu(p) \to x^\mu(p) + \delta x^\mu(p), \quad \text{где} \quad \delta x^\mu(p) \to 0 \quad \text{при} \quad |p| \to \infty,$$
$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \delta A_\mu(x), \quad \text{где} \quad \delta A_\mu(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x^\lambda| \to \infty,$$

в том и только в том случае, если $x^\mu(p)$ и $A_\mu(x)$ подчиняются динамическим уравнениям (12.1.1) — (12.1.3). Чтобы убедиться, что это верно, вычислим изменение I_M, возникающее при этих смещениях без дополнительных предположений о том, что удовлетворяются (12.1.1) — (12.1.3):

$$\delta I_M = \frac{1}{2}\sum_n m_n \int_{-\infty}^{\infty} dp \left[-g_{\mu\nu}(x_n(p)) \frac{dx_n{}^\mu(p)}{dp} \frac{dx_n{}^\nu(p)}{dp} \right]^{-1/2} \times$$
$$\times \left\{ 2g_{\mu\nu}(x_n(p)) \frac{dx_n{}^\mu(p)}{dp} \frac{d\delta x_n{}^\nu(p)}{dp} + \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda} \right)_{x=x_n(p)} \left. \frac{dx_n{}^\mu(p)}{dp} \frac{dx_n{}^\nu(p)}{dp} \delta x_n{}^\lambda(p) \right\} -$$
$$- \int d^4x g^{1/2}(x) F^{\mu\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta A_\nu(x) +$$
$$+ \sum_n e_n \int_{-\infty}^{\infty} dp \left\{ \frac{d\delta x_n{}^\mu(p)}{dp} A_\mu(x_n(p)) + \right.$$
$$\left. + \frac{dx_n{}^\mu(p)}{dp} \left(\frac{dA_\mu(x)}{\partial x^\lambda} \right)_{x=x_n(p)} \delta x_n{}^\lambda(p) + \frac{dx_n{}^\mu(p)}{dp} \delta A_\mu(x_n(p)) \right\}.$$

Теперь удобно перейти от переменной интегрирования p к τ_n, определяемой выражением (12.1.2). Получаем

$$\delta I_M = \frac{1}{2}\sum_n m_n \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n \left\{ 2g_{\mu\lambda}(x_n) \frac{dx_n{}^\mu}{d\tau_n} \frac{d\delta x_n{}^\lambda}{d\tau_n} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial g_{\mu\nu}(x_n)}{\partial x_n{}^\lambda} \frac{dx_n{}^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n{}^\nu}{d\tau_n} \delta x_n{}^\lambda \right\} -$$
$$- \int d^4x g^{1/2}(x) F^{\mu\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta A_\nu(x) +$$

$$+\sum_n e_n \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n \left\{ \frac{d\delta x_n{}^\mu}{d\tau_n} A_\mu(x_n) + \right.$$
$$\left. + \frac{dx_n{}^\mu}{d\tau_n} \frac{\partial A_\mu(x_n)}{\partial x_n{}^\lambda} \delta x_n{}^\lambda + \frac{dx_n{}^\mu}{d\tau_n} \delta A_\mu(x_n) \right\}.$$

Поскольку $\delta x^\mu(\tau_n)$ и $\delta A_\mu(x)$ исчезают на границе области интегрирования, то, проинтегрировав по частям, приходим к результату:

$$\delta I_M = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n g_{\mu\lambda}(x_n) \left\{ -m_n \left[\frac{d^2 x_n{}^\mu}{d\tau_n{}^2} + \right.\right.$$
$$\left. + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}(x_n) \frac{dx_n{}^\rho}{d\tau_n} \frac{dx_n{}^\sigma}{d\tau_n} \right] + e_n \frac{dx_n{}^\rho}{d\tau_n} F^\mu{}_\rho(x_n) \left. \right\} \delta x_n{}^\lambda +$$
$$+ \int d^4x \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} [g^{1/2}(x) F^{\mu\nu}(x)] + \right.$$
$$\left. + \sum_n e_n \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n \delta^4(x - x_n) \frac{dx_n{}^\nu}{d\tau_n} \right\} \delta A_\nu(x).$$

Очевидно, что δI_M равно нулю при произвольных вариациях $\delta x_n{}^\lambda$ и δA_ν тогда и только тогда, когда $x_n{}^\lambda$ и A_ν подчиняются динамическим уравнениям (12.1.1) и (12.1.3). Итак, приходим к выводу, что формула (12.1.6) действительно является подходящей лагранжевой функцией этой системы.

§ 2. Общее определение $T^{\mu\nu}$

Мы собираемся определить тензор энергии-импульса материальной системы, описываемой действием I_M как «функциональной производной» I_M по $g_{\mu\nu}$. Для этого предположим, что $g_{\mu\nu}(x)$ подвергается бесконечно малой вариации

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \tag{12.2.1}$$

где $\delta g_{\mu\nu}$ произвольно, за исключением того, что оно равняется нулю при $|x^\lambda| \to \infty$. Действие I_M не будет устойчиво относительно этой вариации, поскольку в данном случае мы рассматриваем $g_{\mu\nu}(x)$ не как динамическую переменную, подобную $x_n{}^\mu$ или A_μ, но как внешнее поле. Тогда δI_M будет некоторым линейным функционалом бесконечно малой вариации $\delta g_{\mu\nu}(x)$ и, следовательно, будет иметь вид

$$\delta I_M = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g(x)}\, T^{\mu\nu}(x)\, \delta g_{\mu\nu}(x). \tag{12.2.2}$$

Коэффициент $T^{\mu\nu}(x)$ *по определению* считается тензором энергии-импульса этой системы.

Общее доказательство того, что $T^{\mu\nu}$ — сохраняющийся симметричный тензор, будет дано в следующем параграфе. Однако сначала убедимся, что (12.2.2) действительно дает корректное определение тензора энергии-импульса для бесстолкновительной плазмы, описываемой действием (12.1.6). Будем варьировать $g_{\mu\nu}$, оставляя фиксированным A_μ; получаем

$$\delta F^{\mu\nu} = F_{\rho\sigma}\delta\left(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\right) = F_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}\delta g^{\nu\sigma} + F_{\rho\sigma}g^{\nu\sigma}\delta g^{\mu\rho}.$$

Чтобы вычислить $\delta g^{\nu\sigma}$, заметим, что

$$\delta\left(g_{\lambda\varkappa}g^{\varkappa\sigma}\right) = g^{\varkappa\sigma}\delta g_{\lambda\varkappa} + g_{\lambda\varkappa}\delta g^{\varkappa\sigma} = 0,$$

а потому

$$\delta g^{\nu\sigma} = -g^{\nu\lambda}g^{\varkappa\sigma}\delta g_{\lambda\varkappa},$$

и, следовательно,

$$\delta F^{\mu\nu} = -F^{\mu\varkappa}g^{\nu\lambda}\delta g_{\lambda\varkappa} + F^{\nu\lambda}g^{\mu\varkappa}\delta g_{\lambda\varkappa}.$$

В § 7 гл. 4 мы уже видели, что

$$\delta g = g g^{\lambda\varkappa}\delta g_{\lambda\varkappa}.$$

Непосредственное вычисление приводит в результате к выражению

$$\delta I_M = \frac{1}{2}\sum_n m_n \int_{-\infty}^{\infty} dp \left[\left[-g_{\mu\nu}\left(x_n(p)\right)\right]\frac{dx_n^{\mu}(p)}{dp}\frac{dx_n^{\nu}(p)}{dp}\right]^{-1/2} \times$$
$$\times \frac{dx_n^{\lambda}(p)}{dp}\frac{dx_n^{\varkappa}(p)}{dp}\delta g_{\lambda\varkappa}\left(x_n(p)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\int d^4x g^{1/2}(x)\left\{F_{\mu}^{\ \lambda}(x)F^{\mu\varkappa}(x) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{4}g^{\lambda\varkappa}(x)F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right\}\delta g_{\lambda\varkappa}(x).$$

Сравнивая последнее выражение с (12.2.2), находим $T^{\lambda\varkappa}(x)$ в виде

$$T^{\lambda\varkappa}(x) = g^{-1/2}(x)\sum_n m_n \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n \frac{dx_n^{\lambda}}{d\tau_n}\frac{dx_n^{\varkappa}}{d\tau_n}\delta^4(x - x_n) +$$
$$+F_{\mu}^{\ \lambda}(x)F^{\mu\varkappa}(x) - \frac{1}{4}g^{\lambda\varkappa}(x)F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x),$$

что согласуется с тензором энергии-импульса, полученным ранее с помощью выражений (5.3.5) и (5.3.7).

Определение (12.2.2) очень схоже с соответствующим определением электрического тока J^{μ}. Мы можем разбить полное действие для вещества на чисто электромагнитный член I_E и член I'_M,

который описывает заряженные частицы и их электромагнитные взаимодействия:

$$I_M \equiv I_E + I'_M, \tag{12.2.3}$$

$$I_E \equiv -\frac{1}{4}\int d^4x g^{1/2}(x)\, F_{\mu\nu}(x)\, F^{\mu\nu}(x). \tag{12.2.4}$$

Рассмотрим изменения I'_M при бесконечно малой вариации вектора-потенциала

$$A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu. \tag{12.2.5}$$

Так как I'_M не является полным действием, изменение I_M в результате этой вариации A_μ не равно нулю, но с необходимостью является линейным функционалом от δA_μ:

$$\delta I'_M = \int d^4x \sqrt{g(x)}\, J^\mu(x)\, \delta A_\mu(x). \tag{12.2.6}$$

Сомножитель $J^\mu(x)$ считается, *по определению*, электромагнитным током системы. Например, в случае бесстолкновительной плазмы, описываемой выражением (12.1.6), член I'_M является суммой первого и третьего членов в выражении (12.1.6), и мы немедленно находим, что

$$\delta I'_M = \sum_n e_n \int_{-\infty}^{\infty} dx_n{}^\mu \delta A_\mu(x_n).$$

Сравнивая это с формулой (12.2.6), получаем

$$J^\mu(x) = g^{-1/2}(x) \sum_n e_n \int \delta^4(x - x_n)\, dx_n{}^\mu$$

в соответствии с выражением (5.2.13). В следующем параграфе мы докажем, что (12.2.6) всегда приводит к сохраняющемуся току.

§ 3. Общая ковариантность и сохранение энергии-импульса

Если действие I_M материальной системы — скаляр, тогда равенство нулю δI_M является общековариантным и этим же свойством будут обладать уравнения, найденные с помощью этого действия. Рассматривая, например, действие (12.1.6) для бесстолкновительной плазмы, убеждаемся в том, что I_M — скаляр, и это обеспечивает общую ковариантность динамических уравнений (12.1.1) — (12.1.3), которые можно найти с помощью (12.1.6), если применить принцип наименьшего действия.

Итак, будем предполагать далее, что I_M есть скаляр. Это означает, что I_M не будет изменяться, если мы одновременно

сделаем замены

$$d^4x \to d^4x', \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \frac{\partial}{\partial x'^\mu}, \quad x_n^\mu(p) \to x_n'^\mu(p),$$

$$A^\mu(x) \to A'_\mu(x') \equiv A_\nu(x) \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu},$$

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') \equiv g_{\rho\sigma}(x) \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}.$$

Однако x'^μ — это просто переменная интегрирования (в противоположность x_n^μ, которая является динамической переменной), а потому мы можем перейти от x'^μ снова к x^μ без изменения I_M. Тогда делаем вывод, что I_M не изменяется при заменах

$$x_n^\mu(p) \to x_n'^\mu(p),$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\nu(x) \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} - [A'_\mu(x') - A'_\mu(x)],$$

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x) = g_{\rho\sigma}(x) \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} - [g'_{\mu\nu}(x') - g'_{\mu\nu}(x)],$$

а d^4x и $\partial/\partial x^\mu$ мы теперь не касаемся. Если первоначальное преобразование $x^\mu \to x'^\mu$ было инфинитезимальным:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x),$$

то изменение динамических переменных будет следующим:

$$\delta x_n^\mu(p) = \varepsilon^\mu(x_n(p)),$$

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(x) &= -A_\nu(x) \frac{\partial \varepsilon^\nu(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} \varepsilon^\nu(x), \\ \delta g_{\mu\nu}(x) &= -g_{\mu\lambda}(x) \frac{\partial \varepsilon^\lambda(x)}{\partial x^\nu} - g_{\lambda\nu}(x) \frac{\partial \varepsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda} \varepsilon^\lambda(x). \end{aligned} \tag{12.3.1}$$

Изменения A и g суть просто производные Ли (§ 9 гл. 10). Важно здесь то, что инфинитезимальному преобразованию теперь подвергаются только динамические переменные, а не координаты, по которым производится интегрирование. Таким образом, принцип наименьшего действия утверждает, что в том случае, когда динамические уравнения для x_n^μ, A_μ и т. д. удовлетворяются, изменения этих величин не приводят ни к каким изменениям действия для вещества I_M. Единственное изменение в I_M происходит здесь за счет вариации внешнего поля $g_{\mu\nu}$, и (12.2.2) описывает это изменение следующим образом:

$$\delta I_M = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g}\, T^{\mu\nu} \left[g_{\mu\lambda} \frac{\partial \varepsilon^\lambda}{\partial x^\nu} + g_{\lambda\nu} \frac{\partial \varepsilon^\lambda}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \varepsilon^\lambda \right].$$

Если I_M является скаляром, то δI_M должно равняться нулю; интегрирование по частям приводит к результатам:

$$0 = \delta I_M = \int d^4x \varepsilon^\lambda \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{g}\, T^\nu{}_\lambda) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \sqrt{g}\, T^{\mu\nu} \right],$$

а так как $\varepsilon^\lambda(x)$ произвольно, получаем

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{g}\, T^\nu{}_\lambda) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \sqrt{g}\, T^{\mu\nu},$$

или, учитывая (4.7.6), имеем

$$0 = (T^\nu{}_\lambda)_{;\nu}. \tag{12.3.2}$$

Итак, тензор энергии-импульса, введенный с помощью выражения (12.2.2), сохраняется (в ковариантном смысле) тогда и только тогда, когда действие для вещества является скаляром. Если же I_M — скаляр, из (12.2.2) немедленно вытекает, что $T^{\mu\nu}$ — симметричный тензор, и, следовательно, наше определение тензора энергии-импульса обладает всеми свойствами, которые нам хотелось бы иметь.

Доказательство того, что общая ковариантность предполагает сохранение энергии-импульса, в точности аналогично доказательству того, что калибровочная инвариантность предполагает сохранение заряда. Изменение действия I'_M, определяемое (12.2.3) для произвольного калибровочного преобразования, может возникать только благодаря изменению A_μ, поскольку I'_M стационарно относительно всех других динамических переменных. Общее инфинитезимальное калибровочное преобразование ε будет приводить к следующему изменению A_μ (§ 11 гл. 4 и § 2 гл. 10):

$$\delta A_\mu = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\mu}.$$

Подставляя это в (12.2.6), видим, что I'_M калибровочно-инвариантно тогда и только тогда, когда

$$0 = \delta I'_M = \int d^4x \sqrt{g}\, J^\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^\mu}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$0 = \int d^4x \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} J^\mu),$$

или, поскольку ε произвольно, имеем

$$0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{g}\, J^\mu = J^\mu{}_{;\mu}.$$

Снова видим, сколь близки калибровочная инвариантность и общая ковариантность.

§ 4. Гравитационное действие

До сих пор гравитационное поле $g_{\mu\nu}$ в этой главе считалось внешним полем, которое можно было вводить по нашему желанию. [Соответственно (12.2.2) обычно является наиболее удобным определением тензора энергии-импульса именно в отсутствие гравитации.] Дадим теперь для $g_{\mu\nu}$ настоящие уравнения поля, добавив для этого к полному действию I чисто гравитационный член I_G:

$$I = I_M + I_G, \tag{12.4.1}$$

$$I_G \equiv -\frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{g(x)}\, R(x)\, d^4x. \tag{12.4.2}$$

Видно, что I_G — скаляр, а потому этот член является удачным кандидатом для теории гравитации, даже если мы не имели бы никакого опыта обращения с гравитационными явлениями. Теперь покажем, что применение к I принципа наименьшего действия на самом деле приводит к теории Эйнштейна.

Скалярная кривизна R определяется как $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, а потому вариация $\delta g_{\mu\nu}$ метрики приводит к следующему изменению подынтегрального выражения (12.4.2):

$$\delta(\sqrt{g}\,R) = \sqrt{g}\,R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + R\delta\sqrt{g} + \sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}.$$

Согласно выражению (10.9.2), изменение тензора Риччи равно

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda},$$

причем ковариантные производные здесь определяются так, как если бы $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ был тензором (что выполняется в действительности). Таким образом, последний член в $\delta(\sqrt{g}R)$ равняется

$$\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{g}\,[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}],$$

или, подставляя (4.7.7), получаем

$$\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}) - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}).$$

Этот член, следовательно, выпадает, когда мы интегрируем по всему пространству. Учитывая также то, что

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \qquad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma},$$

получаем изменение действия (12.4.2) в виде

$$\delta I_G = \frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{g}\left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right]\delta g_{\mu\nu}d^4x. \tag{12.4.3}$$

Объединяя (12.4.3) и (12.2.2), видим, что полное действие I стационарно относительно произвольных вариаций $g_{\mu\nu}$ тогда и только

тогда, когда

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + 8\pi G T^{\mu\nu} = 0.$$

Последнее, конечно, является уравнением поля Эйнштейна.

Формулу (12.4.3) можно также использовать для получения свернутого тождества Бианки. Так как величина I_G является скаляром, она должна быть устойчива относительно вариаций (12.3.1) по $g_{\mu\nu}$. Повторяя аргументы, приведшие нас к условию (12.3.2), приходим теперь к соотношению

$$\left[R^{\nu}{}_{\lambda} - \frac{1}{2} \delta^{\nu}{}_{\lambda} R \right]_{;\nu} = 0,$$

в котором мы узнаем свернутое тождество Бианки (6.8.3.)

Этот формализм указывает на то, что теорию Эйнштейна можно было бы модифицировать, прибавляя в выражении (12.4.2) к R члены, пропорциональные R^2, R^3 и т. д. В § 1 гл. 7 отмечалось, что такие члены сказывались бы только в явлениях с достаточно малыми пространственно-временными масштабами.

§ 5. Тетрадный формализм *)

До сих пор мы придерживались только одного метода при определении воздействия гравитации на произвольные физические системы. Брали уравнения специальной теории относительности, которым подчиняются системы в отсутствие гравитации, и заменяли все лоренцевы тензоры $T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}$ объектами $T^{\mu\ldots}_{\nu\ldots}$, которые ведут себя подобно тензорам (или тензорным плотностям) при общих преобразованиях координат. Далее, заменяли все производные $\partial/\partial x^{\alpha}$ ковариантными производными, а вместо $\eta_{\alpha\beta}$ везде подставляли $g_{\mu\nu}$. Полученные уравнения движения оказывались общековариантными (см. гл. 5).

Этот метод в действительности применим *только* к объектам, которые ведут себя, подобно тензорам при преобразованиях Лоренца, и не применим к спинорным полям, введенным в § 12 гл. 2. [Математически это происходит из-за того, что тензорные представления группы $GL(4)$ в виде произвольных линейных 4×4 матриц ведут себя, подобно тензорам на подгруппе лоренцевых преобразований, но не существует представлений $GL(4)$ и даже «представлений с точностью до знака», которые ведут себя, подобно спинорам на подгруппе Лоренца.] Каким образом тогда ввести спиноры в общей теории относительности?

Этот вопрос разрешается в другом подходе к задаче о воздействии гравитации на физические системы; этот подход доволь-

*) Этот параграф лежит несколько в стороне от основной линии книги и может быть опущен при первом чтении.

но интересен сам по себе, даже если не иметь в виду задачу о спинорах.

Начнем с того, что, пользуясь принципом эквивалентности, зададим в каждой точке X набор локально-инерциальных координат ξ^{α}_{X}. (Невозможно, конечно, построить ни одной системы координат, которая была бы локально-инерциальной повсюду, если пространственно-временной континуум не является «плоским».) Как показано в § 2 и 3 гл. 3, метрика в произвольной неинерциальной системе координат выглядит так:

$$g_{\mu\nu}(x) = V^{\alpha}{}_{\mu}(x)\, V^{\beta}{}_{\nu}(x)\, \eta_{\alpha\beta}, \tag{12.5.1}$$

где

$$V^{\alpha}{}_{\mu}(X) \equiv \left(\frac{\partial \xi_X{}^{\alpha}(x)}{\partial x^{\mu}}\right)_{x=X} \tag{12.5.2}$$

Заметим, что мы фиксируем локально-инерциальные координаты ξ^{α}_{X} в каждой физической точке X раз и навсегда, а потому, когда мы заменяем неинерциальные координаты x'^{μ} координатами x^{μ}, частные производные $V^{\alpha}{}_{\mu}$ заменяются по правилу

$$V^{\alpha}{}_{\mu} \to V'^{\alpha}{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\, V^{\alpha}{}_{\nu}. \tag{12.5.3}$$

Поэтому можно считать, что $V^{\alpha}{}_{\mu}$ — *не* один тензор, а четыре ковариантных векторных поля; такой набор четырех векторов называют *тетрадой* [1]).

При наличии какого-либо контравариантного векторного поля $A^{\mu}(x)$ можно использовать тетраду, чтобы задать его x-компоненты в системе координат ξ^{α}_{X}, локально-инерциальной в этой точке x:

$$*A^{\alpha} \equiv V^{\alpha}{}_{\mu} A^{\mu}. \tag{12.5.4}$$

При этом свертывание контравариантного вектора A^{μ} с четырьмя ковариантными векторами $V^{\alpha}{}_{\mu}$ приводит к *замене* единственного 4-вектора A^{μ} *четырьмя* скалярами $*A^{\alpha}$. Мы можем сделать то же самое с ковариантным векторным полем, а также с произвольными тензорными полями:

$$\begin{gathered} *A_{\alpha} \equiv V_{\alpha}{}^{\mu} A_{\mu}, \\ *B^{\alpha}{}_{\beta} \equiv V^{\alpha}{}_{\mu} V_{\beta}{}^{\nu} B^{\mu}{}_{\nu} \text{ и т. д.} \end{gathered} \tag{12.5.5}$$

Здесь $V_{\beta}{}^{\nu}$ — тетрада (12.5.2), но с α-индексом, пониженным с помощью тензора Минковского $\eta_{\alpha\beta}$, и μ-индексом, поднятым с помощью метрического тензора $g^{\mu\nu}$, а именно

$$V_{\beta}{}^{\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} V^{\alpha}{}_{\mu}. \tag{12.5.6}$$

[1]) Или репером, или, более старое, 4-под.— *Прим. ред.*

Заметим, что, согласно (12.5.1), это — обратная тетрада, т. е.

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = V_{\beta}{}^{\mu} V^{\beta}{}_{\nu}, \tag{12.5.7}$$

и, следовательно, справедливо также

$$\delta^{\alpha}{}_{\beta} = V^{\alpha}{}_{\mu} V_{\beta}{}^{\mu}. \tag{12.5.8}$$

Скалярные компоненты метрического тензора тогда выглядят просто как

$$^{*}g_{\alpha\beta} \equiv V_{\alpha}{}^{\mu} V^{\nu}_{\beta} g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}. \tag{12.5.9}$$

Теперь, когда мы показали, как превратить любое тензорное поле в набор скаляров, можно забыть первоначальные тензоры V^{μ}, $T_{\mu\nu}$ и т. д., из которых мы исходили, и посмотреть, как следует строить действие, если мы с самого начала работаем со скалярами $^{*}V^{\alpha}$, $^{*}T_{\alpha\beta}$ и т. д. В таком подходе спинорное поле, подобное полю электрона Дирака, может быть введено в наш формализм точно таким же способом, как и любое другое поле, а его особые свойства при лоренцевых преобразованиях не приводят ни к каким осложнениям. У нас есть *два* принципа инвариантности, которые следует учитывать при построении подходящего действия для вещества I_M.

А. Действие должно быть общековариантным, а все поля следует рассматривать как скаляры, исключая саму тетраду.

Б. Принцип эквивалентности требует, чтобы в локально-инерциальных системах была применима специальная теория относительности и, в частности, чтобы не возникало никаких различий от того, что мы выбираем в каждой точке разные локально-инерциальные системы. Таким образом, поскольку наборы рассматриваемых скалярных полей $^{*}V^{\alpha}$, $^{*}T_{\alpha\beta}$ и т. д. определяются в произвольно выбранной локально-инерциальной системе координат, уравнения поля и действие должны быть инвариантными относительно переопределений этих локально-инерциальных систем координат в каждой точке или, другими словами, относительно лоренцевых преобразований $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(x)$, которые могут зависеть от пространственных и временной координат:

$$^{*}A^{\alpha}(x) \to \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(x)\, {}^{*}A^{\beta}(x),$$

$$^{*}T_{\alpha\beta}(x) \to \Lambda_{\alpha}{}^{\nu}(x)\, \Lambda_{\beta}{}^{\delta}(x)\, {}^{*}T_{\nu\delta}(x),$$

где

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\nu}(x)\, \Lambda^{\beta}{}_{\delta}(x) = \eta_{\nu\delta}. \tag{12.5.10}$$

Тетрада (12.5.2) преобразуется по тому же правилу, что и $^{*}A^{\alpha}$:

$$V^{\alpha}{}_{\mu}(x) \to \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(x)\, V^{\beta}{}_{\mu}(x), \tag{12.5.11}$$

а произвольное поле ${}^*\psi_n(x)$ преобразуется по правилу

$$ {}^*\psi_n(x) \to \sum_m [D(\Lambda(x))]_{nm}\, {}^*\psi_m(x), \qquad (12.5.12) $$

где $D(\Lambda)$ — матричное представление группы Лоренца (или по крайней мере группы инфинитезимальных лоренцевых преобразований) типа того, что обсуждалось в § 12 гл. 2.

Эти два принципа инвариантности приводят к двойной классификации физических величин. *Координатный скаляр* или *координатный тензор* преобразуется как скаляр или тензор при замене системы координат. При заменах локально-инерциальных систем координат *лоренцев скаляр* или *лоренцев тензор* или *лоренцев спинор* преобразуется по правилу, подобному (12.5.12), где $D(\Lambda)$ — единица или тензорное представление или спинорное представление инфинитезимальных преобразований группы Лоренца. Например, поле (12.5.4) является координатным скаляром и лоренцевым вектором, поле электрона Дирака — это координатный скаляр и лоренцев спинор, а тетрада $V^{\alpha}{}_{\mu}$ — это координатный вектор и лоренцев вектор. Приемлемая с физической точки зрения лагранжева функция вещества I_M должна быть координатным скаляром и лоренцевым скаляром.

В этом месте у читателя может возникнуть недоумение: как может появиться в теории гравитационное поле, если координатно-скалярные компоненты (12.5.9) метрического тензора оказываются постоянными $\eta_{\alpha\beta}$? Ответ состоит в том, что гравитационные тензорные поля возникнут в действии потому и только потому, что в теорию *необходимо будет* ввести производные. Если бы имелся смысл в построении действия I_M только из полей без производных от них, тогда надо было лишь выбрать некоторую произвольную лоренц-инвариантную функцию $\mathscr{L}({}^*\psi(x))$, зависящую от различных полей ${}^*\psi_n(x)$ (но не от тетрад), и, считая их координатными скалярами, записать действие в виде

$$ I_M = \int d^4x \sqrt{g(x)}\, \mathscr{L}({}^*\psi(x)). $$

Это выражение было бы тогда автоматически координатным скаляром и лоренцевым скаляром. Однако примеры, обсуждавшиеся в предыдущих параграфах этой главы, показывают, что любые физически приемлемые лагранжевы функции должны содержать производные физических величин наравне с самими этими функциями. Тетрадное поле должно входить в лагранжеву функцию таким образом, чтобы сохранялся ее скалярный координатный и лоренцев характер, несмотря на присутствие производных.

Обычная производная является, конечно, координатным вектором в том смысле, что при замене координат $x \to x'$ она пре-

образуется по правилу

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}.$$

Если бы все поля, включаемые в действие, были бы координатными скалярами, в нем не возникало бы контравариантных индексов для свертывания с ковариантным индексом μ. Следовательно, для того, чтобы сделать действие координатным скаляром, необходимо ввести тетрадное поле и производные типа

$$V_{\alpha}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}. \tag{12.5.13}$$

Однако, хотя эта комбинация — координатный скаляр, она не обладает простыми трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца, зависящих от положения. Если преобразовывать произвольного вида поле $^*\psi$ согласно лоренцеву правилу (12.5.12), то его скалярные координатные производные будут преобразовываться так:

$$V_{\alpha}^{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} {}^*\psi(x) \rightarrow \Lambda_{\alpha}^{\beta}(x) V_{\beta}^{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \{D(\Lambda(x))^* \psi(x)\} =$$

$$= \Lambda_{\alpha}^{\beta}(x) V_{\beta}^{\mu}(x) \left\{ D(\Lambda(x)) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \psi^*(x) + \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} D(\Lambda(x)) \right] \psi^*(x) \right\}. \tag{12.5.14}$$

Однако нам нужно включить в действие производные в форме оператора $\mathscr{D}_{\alpha}$, который является не только координатным скаляром, но также, в отличие от (12.5.13), лоренцевым вектором. Последнее означает, что при лоренцевом, зависящем от положения преобразовании $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(x)$, должно иметь место преобразование

$$\mathscr{D}_{\alpha} {}^*\psi(x) \rightarrow \Lambda_{\alpha}^{\beta}(x) D(\Lambda(x)) \mathscr{D}_{\beta} {}^*\psi(x). \tag{12.5.15}$$

Любое действие, зависящее лишь от различных полей $^*\psi$ и их «производных» $\mathscr{D}_{\alpha}{}^*\psi$, тогда автоматически не будет зависеть от выбора локально-инерциальных систем отсчета, если оно инвариантно относительно обычных постоянных лоренцевых преобразований. Рассмотрение правила (12.5.14) показывает, что мы можем построить координатно-скалярную и лоренцевско-векторную производную $\mathscr{D}_{\alpha}$ вида

$$\mathscr{D}_{\alpha} \equiv V_{\alpha}^{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu} \right], \tag{12.5.16}$$

где Γ_{μ} — матрица, подчиняющаяся следующему правилу лоренцева преобразования:

$$\Gamma_{\mu}(x) \rightarrow D(\Lambda(x)) \Gamma_{\mu}(x) D^{-1}(\Lambda(x)) -$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} D(\Lambda(x)) \right] D^{-1}(\Lambda(x)). \tag{12.5.17}$$

Неоднородный член в (12.5.17) будет тогда сокращаться со вторым членом в (12.5.14), приводя к нужному трансформационному свойству (12.5.15) производной $\mathscr{D}_\alpha$.

Для того чтобы определить структуру матрицы $\Gamma_\mu(x)$, достаточно рассмотреть преобразования Лоренца, бесконечно близкие к единице. Такие преобразования в соответствии с (2.12.5) и (2.12.6) должны иметь вид

$$\Lambda^\alpha{}_\beta(x) = \delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta(x), \tag{12.5.18}$$

где

$$\omega_{\alpha\beta}(x) = -\omega_{\beta\alpha}(x). \tag{12.5.19}$$

В этом случае матрица D имеет форму (2.12.7)

$$D(1+\omega(x)) = 1 + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)\,\sigma_{\alpha\beta}. \tag{12.5.20}$$

Здесь $\sigma_{\alpha\beta}$ — набор постоянных матриц, антисимметричных по α и β:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}, \tag{12.5.21}$$

и удовлетворяющих коммутационным соотношениям (2.12.12)

$$[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\beta}\sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\gamma\alpha}\sigma_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta}\sigma_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha}\sigma_{\gamma\beta}. \tag{12.5.22}$$

Условие (12.5.17) утверждает, что при инфинитезимальном лоренцевом преобразовании (12.5.18) матрица $\Gamma_\mu(x)$ преобразуется так:

$$\Gamma_\mu(x) \to \Gamma_\mu(x) + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)\,[\sigma_{\alpha\beta}, \Gamma_\mu(x)] - \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\omega^{\alpha\beta}(x). \tag{12.5.23}$$

Заметим, что $V^\alpha{}_\mu(x)$ преобразуется по правилу

$$V^\alpha{}_\nu(x) \to V^\alpha{}_\nu(x) + \omega^\alpha{}_\beta(x)\,V^\beta{}_\nu(x),$$

а потому, используя (12.5.8), получаем

$$V_\beta{}^\nu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}V_{\alpha\nu}(x) \to V_\beta{}^\nu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}V_{\alpha\nu}(x) + \omega_\beta{}^\gamma(x)\,V_\gamma{}^\nu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}V_{\alpha\nu}(x) + \omega_\alpha{}^\gamma(x)\,V_\beta{}^\nu(x)\times \frac{\partial}{\partial x^\mu}V_{\gamma\nu}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\omega_{\alpha\beta}(x).$$

Умножая это на $\sigma^{\alpha\beta}$ и применяя правила коммутации (12.5.22), находим, что формулу преобразования (12.5.23) можно переписать в виде

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{2}\sigma^{\alpha\beta}V_\alpha{}^\nu(x)\,V_{\beta\nu;\,\mu}. \tag{12.5.24}$$

Итак, воздействие гравитации на любую физическую систему можно учесть, если в действии для вещества или уравнениях поля, установленных в специальной теории относительности заменить все производные $\partial/\partial x^\alpha$ «ковариантными производными» $\mathscr{D}_\alpha$:

$$\mathscr{D}_\alpha \equiv V_\alpha{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}\sigma^{\beta\nu} V_\beta{}^\nu V_\alpha{}^\mu V_{\gamma\nu;\,\mu}. \qquad (12.5.25)$$

Этот рецепт позволяет найти действие для вещества или уравнения поля, инвариантные относительно преобразований координат общего вида, причем $V_\alpha{}^\mu$ в них рассматривается как 4-вектор, а все другие поля — как скаляры, не зависящие от выбора локально-инерциальной системы отсчета при определении тетрады.

Как задать тензор энергии-импульса в этом формализме? Вариация $\delta V_\alpha{}^\mu$ тетрадного поля будет приводить к следующему изменению лагранжевой функции вещества:

$$\delta I_M = \int d^4x \sqrt{-g}\, U^\alpha{}_\mu \delta V_\alpha{}^\mu, \qquad (12.5.26)$$

где $U^\alpha{}_\mu$ — координатный вектор и лоренцев вектор. Попробуем определить тензор энергии-импульса следующим образом:

$$T_{\mu\nu} \equiv V_{\alpha\mu} U^\alpha{}_\nu. \qquad (12.5.27)$$

Чтобы убедиться, что выражение (12.5.27) подходит для тензора энергии-импульса, надо также проверить, симметрично ли оно:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \qquad (12.5.28)$$

и выполняются ли законы сохранения:

$$(T^\nu{}_\lambda)_{;\nu} = 0. \qquad (12.5.29)$$

Свойство симметрии тензора энергии-импульса отнюдь не очевидно в тетрадном формализме. Оно должно быть выведено из свойства инвариантности действия для вещества относительно инфинитезимальных лоренцевых преобразований:

$$\Lambda^\alpha{}_\beta(x) = \delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta(x),$$

где

$$|\omega^\alpha{}_\beta(x)| \ll 1.$$

Эти преобразования приводят к малым смещениям всех динамических переменных, однако предполагается, что действие для вещества стационарно относительно вариаций каждой из этих переменных, исключая вариацию тетрады, которая входит в I_M как внешнее поле. Поэтому нам необходимо лишь учесть изменение (12.5.11) тетрадного поля:

$$\delta V_\alpha{}^\mu(x) = \omega_\alpha{}^\beta(x)\, V_\beta{}^\mu(x). \qquad (12.5.30)$$

Подставляя (12.5.30) в (12.5.26), находим, что инвариантность действия для вещества относительно зависящих от положения преобразований Лоренца требует, чтобы

$$\int d^4x \sqrt{g(x)}\, U^{\alpha}{}_{\mu}(x)\, V^{\beta\mu}(x)\, \omega_{\alpha\beta}(x) = 0.$$

Но $\omega_{\alpha\beta}(x)$ — произвольная функция, за исключением требования антисимметрии (12.5.19), а потому коэффициент при $\omega_{\alpha\beta}(x)$ должен быть симметричным:

$$U^{\alpha}{}_{\mu}V^{\beta\mu} = U^{\beta}{}_{\mu}V^{\alpha\mu}.$$

Умножая это соотношение на $V_{\beta\nu}V_{\alpha\lambda}$ и учитывая (12.5.7), находим

$$U^{\alpha}{}_{\nu}V_{\alpha\lambda} = U^{\beta}{}_{\lambda}V_{\beta\nu}, \tag{12.5.31}$$

что совпадает с требуемым условием симметрии (12.5.28).

Чтобы показать, что тензор энергии-импульса, введенный с помощью (12.5.27), сохраняется, надо воспользоваться инвариантностью лагранжевой функции вещества при инфинитезимальном преобразовании координат

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x),$$

где $|\varepsilon^{\mu}|$ очень мало. Такое преобразование изменяет тетрадное поле на бесконечно малую величину:

$$\delta V_{\alpha}{}^{\mu}(x) \equiv V'^{\mu}_{\alpha}(x) - V_{\alpha}{}^{\mu}(x) =$$

$$= V_{\alpha}{}^{\nu}(x)\frac{\partial \varepsilon^{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial V_{\alpha}{}^{\mu}(x)}{\partial x^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda}(x) \tag{12.5.32}$$

[сравните с выражением (12.3.1)]. Все другие координатные скалярные поля $\psi(x)$ изменяются при этом следующим образом:

$$\delta\psi(x) \equiv \psi'(x) - \psi(x) = -\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda}(x).$$

Однако действие для вещества I_M снова стационарно относительно вариаций этих полей, а потому в ней нужно учитывать только вариацию тетрадного поля. Подставляя (12.5.32) в (12.5.26), находим, что инвариантность лагранжевой функции вещества I_M относительно преобразований координат общего вида требует, чтобы

$$\int d^4x \sqrt{g} U^{\alpha}{}_{\mu}\left\{V_{\alpha}{}^{\nu}\frac{\partial\varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial V_{\alpha}{}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda}\right\} = 0.$$

Но $\varepsilon^{\lambda}(x)$ произвольно, а потому после интегрирования по частям мы можем приравнять коэффициент при $\varepsilon^{\lambda}(x)$ нулю, что дает

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{g}U^{\alpha}{}_{\lambda}V_{\alpha}{}^{\nu}) + \sqrt{g}U^{\alpha}{}_{\mu}\frac{\partial V_{\alpha}{}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}.$$

Подставляя сюда выражения (12.5.27) и (12.5.8), представляем это соотношение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{g}\,T^\nu{}_\lambda)+\sqrt{g}\;T_{\nu\mu}V^{\alpha\nu}\frac{\partial V_\alpha{}^\mu}{\partial x^\lambda}=0. \qquad (12.5.33)$$

Согласно (12.5.1), метрический тензор связан с тетрадой следующим образом:

$$g^{\mu\nu}=V_\alpha{}^\mu V^{\alpha\nu},$$

поэтому

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}=V^{\alpha\nu}\frac{\partial V_\alpha{}^\mu}{\partial x^\lambda}+V^{\alpha\mu}\frac{\partial V_\alpha{}^\nu}{dx^\lambda}\,.$$

Так как $T_{\mu\nu}$ симметрично, соотношение (12.5.33) можно теперь переписать так:

$$0=\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{g}\,T^\nu{}_\lambda)+\frac{1}{2}\sqrt{g}\,T_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\,. \qquad (12.5.34)$$

Кроме того, (3.3.1) и (4.7.6) приводят к соотношениям

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}=-g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\lambda}=-g^{\sigma\nu}\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}-g^{\rho\mu}\Gamma^\nu_{\rho\lambda},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\ln\sqrt{g}=\Gamma^\lambda_{\nu\lambda},$$

так что (12.5.34) совпадает с обычным законом сохранения (12.5.29).

Таким образом, определение тензора энергии-импульса (12.5.27) вполне удовлетворительно. Отметим, однако, что если бы действие для вещества не было инвариантно относительно зависящих от положения преобразований Лоренца, то $T_{\mu\nu}$ не только не было бы симметричным, но и не сохранялось бы.

Полное действие для вещества *и* гравитации — это, как и выше, сумма

$$I=I_M+I_G,$$

где I_G определяется выражением (12.4.2). Вариация тетрады будет приводить к следующему изменению метрики в соответствии с (12.5.1):

$$\delta g_{\mu\nu}=V^\alpha{}_\mu\delta V_{\alpha\nu}+V^\alpha{}_\nu\delta V_{\alpha\mu}=-[g_{\mu\lambda}V^\alpha{}_\nu+g_{\nu\lambda}V^\alpha{}_\mu]\,\delta V_\alpha{}^\lambda,$$

так что (12.4.3) дает следующее изменение гравитационной функции

Лагранжа:

$$\delta I_G = -\frac{1}{8\pi G}\int \sqrt{-g}\left[R^{\mu}{}_{\lambda}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\lambda}R\right]V^{\alpha}{}_{\mu}\delta V_{\alpha}{}^{\lambda}d^4x. \qquad (12.5.35)$$

Полное действие должно быть стационарно относительно вариаций тетрадного поля, а потому (12.5.26) и (12.5.35) приводят к уравнению

$$\left(R^{\mu}{}_{\lambda}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\lambda}R\right)V^{\alpha}{}_{\mu} = -8\pi G U^{\alpha}{}_{\lambda}.$$

Свертывая это с $V_{\alpha\nu}$ и подставляя сюда (12.5.1) и (12.5.27), получаем известные уравнения поля Эйнштейна

$$R_{\nu\lambda}-\frac{1}{2}g_{\nu\lambda}R = -8\pi G T_{\nu\lambda}. \qquad (12.5.36)$$

Эти уравнения позволяют найти только $g_{\mu\nu}$, оставляя тетраду определенной лишь с точностью до лоренцева преобразования (12.5.11). Однако инвариантность действия для вещества относительно таких, зависящих от положения преобразований Лоренца гарантирует, что все тетрады, связанные с данной метрикой, приводят к одним и тем же физическим эффектам.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Utiyama R.*, Phys. Rev., **101**, 1597 (1956) (см. перевод в сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля», ИЛ, 1960, стр. 250).
2. *Kibble T. W. B.*, J. Math. Phys., **2**, 212 (1961).

Симметрия как в широком, так и в узком понимании этого слова есть идея, с помощью которой человек во все времена пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство.

Г. Вейль, Симметрия

Глава 13
СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Евклид неявно допускал, что метрические соотношения не изменяются при трансляциях и вращениях. Реальные гравитационные поля, вообще говоря, не обладают столь высокой степенью симметрии, однако иногда они обладают приближенной симметрией относительно некоторых групп преобразований. В этих случаях мы можем, используя информацию об этом, облегчить себе решение уравнений Эйнштейна или даже обойтись совсем без решений. Здесь дано короткое введение в хорошо разработанную математическую теорию симметричных пространств, причем особое внимание уделено максимально симметричным пространствам, представляющим особый интерес для космологии.

С самого начала мы встретимся со следующей проблемой: как можно использовать предполагаемую симметрию для получения каких-то сведений о метрике, если без знания метрики мы не можем найти даже систему координат, в которой определяется свойство симметрии. Для того чтобы обойти это затруднение, мы должны искать ковариантный способ описания симметрии, не зависящий от конкретного выбора какой-нибудь системы координат. Если такой способ будет найден, то установление свойств метрики, определяемых ее симметрией, сведется к математическим операциям.

§ 1. Векторы Киллинга

Говорят, что метрика $g_{\mu\nu}(x)$ *форминвариантна* относительно данных преобразований координат $x \to x'$, если преобразованная метрика $g'_{\mu\nu}(x')$ — это та же самая функция от ее аргумента x'^{μ}, что и первоначальная функция $g_{\mu\nu}(x)$ *ее* первоначального аргумента x^{μ}, т. е.

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \text{ для всех } y. \qquad (13.1.1)$$

[Это условие отличается от задающего скаляры, которое имеет вид $S'(x') = S(x)$.] В любой данной *точке* новая метрика ввo-

дится с помощью соотношения

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$

или, эквивалентным способом,

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x').$$

Когда выполняется условие (13.1.1), $g'_{\rho\sigma}(x')$ можно заменить на $g_{\rho\sigma}(x')$ и получить таким образом фундаментальное условие форминвариантности метрики:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x'). \qquad (13.1.2)$$

Любое преобразование $x \to x'$, удовлетворяющее (13.1.2), называется *изометрией*.

Вообще говоря, условие (13.1.2) — весьма сложное ограничение на функцию $x'^\mu(x)$. Его можно очень сильно упростить, рассматривая специальный случай инфинитезимального преобразования координат

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon\xi^\mu(x), \quad \text{где } |\varepsilon| \ll 1. \qquad (13.1.3)$$

В первом порядке по ε соотношение (13.1.2) теперь выглядит так:

$$0 = \frac{\partial\xi^\mu(x)}{\partial x^\rho} g_{\mu\sigma}(x) + \frac{\partial\xi^\nu(x)}{\partial x^\sigma} g_{\rho\nu}(x) + \xi^\mu(x)\frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^\mu}. \qquad (13.1.4)$$

Его можно переписать через производные ковариантных компонент $\xi_\sigma \equiv g_{\mu\sigma}\xi^\mu$:

$$\frac{\partial\xi_\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial\xi_\rho}{\partial x^\sigma} + \xi^\mu\left[\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma}\right] = \frac{\partial\xi_\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial\xi_\rho}{\partial x^\sigma} - 2\xi_\mu\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = 0,$$

или, в более компактном виде,

$$\xi_{\sigma;\,\rho} + \xi_{\rho;\,\sigma} = 0. \qquad (13.1.5)$$

Говорят, что 4-векторное поле $\xi_\sigma(x)$, которое удовлетворяет соотношению (13.1.5), образует *вектор Киллинга* [1] метрики $g_{\mu\nu}(x)$. В этом случае задача нахождения всех инфинитезимальных изометрий данной метрики сводится к задаче нахождения всех векторов Киллинга для данной метрики. Любая линейная комбинация векторов Киллинга с постоянными коэффициентами также является вектором Киллинга, так что существует пространство векторных полей, натянутых на векторы Киллинга, которое определяет инфинитезимальные изометрии метрики.

Условие Киллинга (13.1.5) намного сильнее, чем выглядит на первый взгляд, поскольку оно позволяет полностью задать

функцию $\xi_\mu(x)$ с помощью величин ξ_σ и $\xi_{\sigma;\,\rho}$, заданных в некоторой точке X. Чтобы убедиться в этом, необходимо лишь обратиться к формуле (6.5.1) для коммутатора двух ковариантных производных:

$$\xi_{\sigma;\,\rho;\,\mu} - \xi_{\sigma;\,\mu;\,\rho} = -R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\xi_\lambda, \tag{13.1.6}$$

а также к правилу суммирования циклических перестановок (6.6.5) тензора кривизны

$$R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu} + R^{\lambda}_{\mu\sigma\rho} + R^{\lambda}_{\rho\mu\sigma} = 0. \tag{13.1.7}$$

Прибавляя к (13.1.6) две ее циклические перестановки, приходим к выводу, что любой вектор ξ_μ должен удовлетворять соотношению

$$\xi_{\sigma;\,\rho;\,\mu} - \xi_{\sigma;\,\mu;\,\rho} + \xi_{\mu;\,\sigma;\,\rho} - \xi_{\mu;\,\rho;\,\sigma} + \xi_{\rho;\,\mu;\,\sigma} - \xi_{\rho;\,\sigma;\,\mu} = 0. \tag{13.1.8}$$

Для вектора Киллинга, (13.1.5) и (13.1.8) приводят к соотношению

$$\xi_{\sigma;\,\rho;\,\mu} - \xi_{\sigma;\,\mu;\,\rho} - \xi_{\mu;\,\rho;\,\sigma} = 0.$$

Тогда (13.1.6) принимает вид

$$\xi_{\mu,\,\rho;\,\sigma} = -R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\xi_\lambda. \tag{13.1.9}$$

Следовательно, зная ξ_λ и $\xi_{\lambda;\,\nu}$ в некоторой точке, можно найти вторые производные от $\xi_\lambda(x)$ в точке X с помощью соотношения (13.1.9), а затем последовательно найти более высокие производные от ξ_λ в точке X, взяв производные от (13.1.9). Все производные от ξ_λ в точке X, таким образом, будут найдены в виде линейных комбинаций $\xi_\lambda(X)$ и $\xi_{\lambda;\,\nu}(X)$. Тогда функцию $\xi_\lambda(x)$ можно построить (если она существует) в виде ряда Тейлора по $x^\lambda - X^\lambda$ в некоторой окрестности точки X. Эта функция также будет линейной по первоначальным величинам $\xi_\lambda(X)$ и $\xi_{\lambda;\,\nu}(X)$. Таким образом, любой вектор Киллинга $\xi_\rho{}^n(x)$ метрики $g_{\mu\nu}(x)$ может быть выражен следующим образом:

$$\xi_\rho{}^n(x) = A_\rho{}^\lambda(x;\,X)\,\xi_\lambda{}^n(X) + B_\rho{}^{\lambda\nu}(x;\,X)\,\xi_{\lambda;\,\nu}{}^n(X), \tag{13.1.10}$$

где $A_\rho{}^\lambda$ и $B_\rho{}^{\lambda\nu}$ — функции, которые, конечно, зависят от метрики и от положения точки X, но не зависят от первоначальных величин $\xi_\lambda(X)$ и $\xi_{\lambda;\,\nu}(X)$, а потому они являются одними и теми же для всех векторов Киллинга. Каждый вектор Киллинга $\xi_\rho(X)$ для данной метрики задается единственным образом значениями $\xi_\rho(X)$ и $\xi_{\rho;\,\sigma}(X)$ в любой конкретной точке X.

Говорят, что набор векторов Киллинга *независим*, если эти векторы не удовлетворяют никакому линейному соотношению типа

$$\sum_n c_n \xi_\rho{}^n(x) = 0, \tag{13.1.11}$$

где c_n — *постоянные* коэффициенты. Выражение (13.1.10) утверждает, что *может существовать не более чем* $N(N+1)/2$ *независимых векторов Киллинга в* N*-мерном пространстве.* Рассмотрим, например, какие-либо M векторов Киллинга $\xi_\rho{}^n(x)$. Для каждого n имеется N величин $\xi_\rho{}^n(X)$ и $N(N-1)/2$ независимых величин $\xi^n_{\rho;\nu}(X)$ [вспомним соотношение (13.1.5)], а потому можно считать величины $\xi_\rho{}^n(X)$ и $\xi^n_{\rho;\nu}(X)$ компонентами M векторов в $N(N+1)/2$-мерном пространстве. Если $M > N(N+1)/2$, то эти M векторов не могут быть линейно-независимыми, следовательно, между ними должно существовать соотношение типа

$$\sum_n c_n \xi_\rho{}^n(X) = \sum_n c_n \xi^n_{\rho;\,\nu}(X) = 0.$$

Тогда выражение (13.1.10) утверждает, что векторы Киллинга $\xi_\rho{}^n(x)$ удовлетворяют соотношениям (13.1.11) повсюду, а потому не являются независимыми.

Этот результат имеет смысл только потому, что мы определили независимые векторы Киллинга как векторы, которые не связаны никакими линейными соотношениями с *постоянными* коэффициентами. В некоторой данной точке X в N-мерном пространстве любой набор более чем N векторов Киллинга, конечно, будет связан одним или несколькими линейными соотношениями, подобными (13.1.11). Однако коэффициенты c_n в этих линейных соотношениях иногда могут зависеть от x^μ. Предыдущая теорема утверждает, что любой набор более чем $N(N+1)/2$ векторов Киллинга будет связан линейными соотношениями с постоянными коэффициентами.

Говорят, что метрическое пространство *однородно*, если существуют инфинитезимальные изометрии (13.1.3), которые переводят любую данную точку X в любую другую точку в окрестности точки X. Другими словами, метрика должна допускать существование векторов Киллинга, которые в любой данной точке принимают все возможные значения. В частности, в N-мерном пространстве мы можем задать набор N векторов Киллинга $\xi_\lambda{}^{(\mu)}(x, X)$, обладающих свойством

$$\xi_\lambda{}^{(\mu)}(X;\, X) = \delta_\lambda{}^\mu.$$

Эти векторы, очевидно, являются независимыми, поскольку из любого соотношения типа $c_\mu \xi_\nu{}^{(\mu)}(x;\, X)$ следовало бы, что в точке X все c_λ равны нулю.

Говорят, что метрическое пространство *изотропно* в данной точке X, если существуют инфинитезимальные изометрии (13.1.3), оставляющие фиксированной точку X, так что $\xi^\lambda(X) = 0$, и первые производные $\xi_{\lambda;\,\nu}(X)$ в этой точке принимают все возможные значения, подчиняясь лишь условию антисимметрии (13.1.5). В частности, в N-мерных пространствах можно задать набор

$N(N-1)/2$ векторов Киллинга, подчиняющихся условиям

$$\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X) \equiv -\xi_\lambda^{(\nu\mu)}(x; X), \quad \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(X; X) \equiv 0,$$

$$\xi_{\lambda;\,\rho}^{(\mu\nu)}(X; X) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)\right]_{x=X} \equiv \delta_\lambda{}^\mu\delta_\rho{}^\nu - \delta_\rho{}^\mu\delta_\lambda{}^\nu.$$

Эти векторы являются независимыми, поскольку любое соотношение типа $c_{\mu\nu}\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X) = 0$, в котором $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, предполагало бы, что в точке X $c_{\lambda\rho} - c_{\rho\lambda} = 2c_{\lambda\rho} = 0$.

Мы будем также иметь дело с пространствами, которые изотропны в окрестности каждой точки. В этом случае существуют векторы Киллинга, $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)$ и $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X + dX)$, которые удовлетворяют найденным выше начальным условиям в точках X и $X + dX$ соответственно. Любая линейная комбинация их будет вектором Киллинга, и, следовательно, $\partial\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)/\partial X^\rho$ также будет вектором Киллинга для этой метрики. Для того чтобы вычислить этот вектор Киллинга в точке $x = X$, необходимо лишь вспомнить, что $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(X; X)$ равняется нулю, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial X^\rho}\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(X; X) = \left[\frac{\partial\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)}{\partial x^\rho}\right]_{x=X} + \left[\frac{\partial\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)}{\partial X^\rho}\right]_{x=X} = 0.$$

Это дает

$$\left[\frac{\partial}{\partial X^\rho}\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)\right]_{x=X} = -\delta_\lambda{}^\mu\delta_\rho{}^\nu + \delta_\rho{}^\mu\delta_\lambda{}^\nu.$$

Теперь очевидно, что можно построить вектор Киллинга $\xi_\lambda(X)$, принимающий любое произвольное значение a_λ в точке $x = X$; надо лишь задать

$$\xi_\lambda(x) = \frac{a_\nu}{N-1}\frac{\partial}{\partial X^\rho}\xi_\lambda^{(\rho\nu)}(x; X).$$

Поэтому *любое пространство, изотропное в окрестности каждой его точки, является также однородным.*

Говорят, что метрика, допускающая максимальное число $N(N+1)/2$ векторов Киллинга, *максимально симметрична.* В частности, пространство, которое и однородно и изотропно в окрестности некоторой заданной точки X, допускает существование $N(N+1)/2$ векторов Киллинга $\xi_\lambda^{(\mu)}(x; X)$ и $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X)$. Такие векторы Киллинга, очевидно, независимы, поскольку если они удовлетворяют линейному соотношению

$$c_\mu\xi_\lambda^{(\mu)}(x; X) + c_{\mu\nu}\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x; X) = 0,$$

$$c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu},$$

то, продифференцировав его по x^ρ и положив $x = X$, приходим к $c_{\lambda\rho} = 0$, а положив затем $x = X$ в этом соотношении, получаем

$c_\lambda = 0$. Таким образом, *однородное пространство, изотропное в окрестности некоторой точки, является максимально симметричным.* Из этого также следует, что любое пространство, изотропное в окрестности каждой точки, является максимально симметричным.

Можно также доказать обратное, а именно: максимально симметричное пространство с необходимостью однородно и изотропно в окрестности каждой точки. Если существуют $N(N+1)/2$ независимых векторов Киллинга $\xi^n{}_\lambda(x)$, то можно считать, что величины $\xi^n{}_\rho(X)$, $\xi^n{}_{\lambda;\nu}(X)$ образуют квадратную матрицу, имеющую $N(N+1)/2$ строк, нумеруемых значениями n, и $N(N+1)/2$ столбцов, нумеруемых N значениями величины ρ и $N(N-1)/2$ значениями λ и ν, где $\lambda > \nu$. Кроме того, эта матрица должна иметь неравный нулю детерминант, поскольку любое соотношение типа

$$\sum_n c_n \xi_\rho{}^n(X) = \sum_n c_n \xi_{\lambda;\,\nu}{}^n(X) = 0$$

предполагало бы при наличии (13.1.10), что $\sum_n c_n \xi_\rho{}^n(x)$ исчезает — в противоречии с нашим предположением, что эти векторы Киллинга независимы. Следовательно, должно быть возможным для любого «вектора-строки» с «компонентами» a_μ и $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$, найти решение уравнений

$$\sum_n d_n \xi_\mu{}^n(X) = a_\mu, \qquad \sum_n d_n \xi_{\mu;\,\nu}{}^n(X) = b_{\mu\nu}.$$

Поэтому мы можем определить вектор Киллинга $\xi_\mu(x)$, который в точке X принимает значения a_μ, а $\xi_{\mu;\nu}(X)$ принимает значение $b_{\mu\nu}$, если выберем

$$\xi_\mu(x) = \sum_n d_n \xi_\mu{}^n(x).$$

Но a_μ произвольно, следовательно, пространство однородно; произвольно и $b_{\mu\nu}$ (исключая условие $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$), а потому пространство изотропно в окрестности точки X.

В качестве примера максимально симметричного пространства рассмотрим N-мерное плоское пространство с равным нулю тензором кривизны. Тогда можно выбрать декартовы координаты с постоянной метрикой и равной нулю аффинной связностью. В этой системе координат уравнение (13.1.9) выглядит так:

$$\frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = 0.$$

Решение его имеет вид

$$\xi_\mu(x) = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu,$$

где a_μ и $b_{\mu\nu}$ — константы. Это выражение является вектором Киллинга в соответствии с условием (13.1.5) тогда и только тогда, когда

$$b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}.$$

Следовательно, можно задать набор $N(N+1)/2$ векторов Киллинга следующим образом:

$$\xi_\mu^{(\nu)}(x) \equiv \delta_\mu{}^\nu, \quad \xi_\mu^{(\nu\lambda)}(x) \equiv \delta_\mu{}^\nu x^\lambda - \delta_\mu^\lambda x^\nu.$$

Тогда произвольный вектор Киллинга выражается в виде комбинации

$$\xi_\mu(x) = a_\nu \xi_\mu^{(\nu)}(x) + b_{\nu\lambda}\xi_\mu^{(\nu\lambda)}(x).$$

N векторов $\xi_\mu^{(\nu)}(x)$ вводят трансляции, в то время как $N(N-1)/2$ векторов $\xi_\mu^{(\nu\lambda)}$ вводят бесконечно малые вращения (или, в пространстве Минковского, лоренцевы преобразования). Таким образом, метрика любого плоского пространства допускает существование $N(N+1)/2$ независимых векторов Киллинга и является, следовательно, максимально симметричной.

Конечно, не все метрики позволяют построить максимальное число векторов Киллинга. Является ли разрешимым (13.1.9) для данного набора начальных данных $\xi_\lambda(X)$, $\xi_{\lambda;\rho}(X)$ или нет, это зависит от интегрируемости данного уравнения, что зависит в свою очередь от рассматриваемой метрики. Одно условие интегрируемости, которое мы будем использовать ниже, следует из общей формулы для коммутаторов ковариантных производных тензоров:

$$\xi_{\rho;\,\mu;\,\sigma;\,\nu} - \xi_{\rho;\,\mu;\,\nu;\,\sigma} = -R^\lambda_{\rho\sigma\nu}\xi_{\lambda;\,\mu} - R^\lambda_{\mu\sigma\nu}\xi_{\rho;\,\lambda}.$$

Соотношение (13.1.9) удовлетворяет этому условию тогда и только тогда, когда

$$R^\lambda_{\sigma\rho\mu}\xi_{\lambda;\,\nu} - R^\lambda_{\nu\rho\mu}\xi_{\lambda;\,\sigma} + (R^\lambda_{\sigma\rho\mu;\,\nu} - R^\lambda_{\nu\rho\mu;\,\sigma})\xi_\lambda = -R^\lambda_{\rho\sigma\nu}\xi_{\lambda;\,\mu} - R^\lambda_{\mu\sigma\nu}\xi_{\rho;\,\lambda},$$

или, [см. (13.1.5)], когда

$$[-R^\lambda_{\rho\sigma\nu}\delta^\varkappa_\mu + R^\lambda_{\mu\sigma\nu}\delta^\varkappa_\rho - R^\lambda_{\sigma\rho\mu}\delta^\varkappa_\nu + R^\lambda_{\nu\rho\mu}\delta^\varkappa_\sigma]\,\xi_{\lambda;\,\varkappa} = [R^\lambda_{\sigma\rho\mu;\,\nu} - R^\lambda_{\nu\rho\mu;\,\sigma}]\,\xi_\lambda. \tag{13.1.12}$$

Эти условия, конечно, не накладывают никаких ограничений в случае плоского пространства, но они, вообще говоря, образуют линейные соотношения между ξ_λ и $\xi_{\lambda;\varkappa}$ в любой данной точке. И наоборот, если мы знаем что-нибудь о векторах Киллинга, допускаемых неизвестной метрикой, то мы можем с помощью (13.1.12) получить информацию о тензоре кривизны. Таким путем мы сможем в следующих параграфах найти зависимость максимально симметричных метрик от их изометрических свойств.

Следует подчеркнуть, что существование определенного числа независимых векторов Киллинга не связано с конкретным выбором системы координат. Если $\xi^{\mu}(x)$ есть вектор Киллинга метрики $g_{\mu\nu}(x)$, то, выполняя преобразование координат $x^{\mu} \to x'^{\mu}$, получаем метрику

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x),$$

а так как (13.1.5) общековариантно, то, очевидно, существует вектор Киллинга

$$\xi'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \xi^{\nu}(x).$$

Если M векторов Киллинга $\xi_{\mu}^{n}(x)$ являются независимыми, то независимы и M векторов Киллинга $\xi_{\mu}^{n'}(x')$, так как любое линейное соотношение между $\xi^{n'}$ предполагало бы линейное соотношение между ξ^{n}. Таким образом, максимальная симметрия данного пространства есть его внутреннее свойство, не зависящее от того, как мы выбираем систему координат. В частности, отсюда следует, что любое пространство с нулевым тензором кривизны максимально симметрично; обратное, однако, не верно. Легко также видеть, что свойство однородности и изотропности данного пространства не зависит от выбора координат. Таким образом мы выполнили задачу, поставленную во введении к этой главе для простых типов симметрии, т. е. описали свойства симметрии метрики общековариантным образом.

§ 2. Максимально симметричные пространства. Единственность

Покажем теперь, что максимально симметричные пространства определяются единственным образом «скалярной кривизной» K и собственными значениями метрики, которые могут быть положительными или отрицательными. Другими словами, *для двух заданных максимально симметричных метрик с одинаковыми K и одинаковым числом собственных значений каждого знака всегда можно отыскать преобразование координат*, которое переводит одну метрику в другую. Зная эту теорему, мы сможем выполнить в следующем параграфе исчерпывающее исследование максимально симметричных пространств, просто строя метрику в удобной системе координат.

В предыдущем параграфе мы показали, что в любой данной точке x максимально симметричного пространства можно найти векторы Киллинга, для которых $\xi_{\lambda}(x)$ исчезает, а $\xi_{\lambda;\,\varkappa}(x)$ является произвольной антисимметричной матрицей. Отсюда следует, что

коэффициент при $\xi_{\lambda;\,\varkappa}(x)$ в соотношении (13.1.12) должен иметь равную нулю антисимметричную часть, т. е.

$$-R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}\delta^{\varkappa}_{\mu}+R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}\delta^{\varkappa}_{\rho}-R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\delta^{\varkappa}_{\nu}+R^{\lambda}_{\nu\rho\mu}\delta^{\varkappa}_{\sigma}=$$
$$=-R^{\varkappa}_{\rho\sigma\nu}\delta^{\lambda}_{\mu}+R^{\varkappa}_{\mu\sigma\nu}\delta^{\lambda}_{\rho}-R^{\varkappa}_{\sigma\rho\mu}\delta^{\lambda}_{\nu}+R^{\varkappa}_{\nu\rho\mu}\delta^{\lambda}_{\sigma}. \quad (13.2.1)$$

Мы также показали, что в любой данной точке x максимально симметричного пространства существуют векторы Киллинга, для которых $\xi_{\lambda}(x)$ принимает любые значения, какие мы зададим, так что (13.1.12) и (13.2.1) требуют, чтобы

$$R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu;\,\nu}=R^{\lambda}_{\nu\rho\mu;\,\sigma}. \quad (13.2.2)$$

Нам в действительности необходимо использовать лишь (13.2.1), поскольку мы в последнем параграфе показали, что пространство, изотропное в окрестности каждой точки и, следовательно, удовлетворяющее (13.2.1), должно быть однородным, а потому должно также удовлетворять и (13.2.2).

В качестве первого шага в этом доказательстве получим формулу для тензора кривизны с помощью соотношения (13.2.1). Свертывая $\varkappa$ и μ в (13.2.1), получаем

$$-NR^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}+R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}-R^{\lambda}_{\sigma\rho\nu}+R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma}=-R^{\nu}_{\rho\sigma\nu}+R_{\sigma\rho}\delta^{\lambda}_{\nu}-R_{\nu\rho}\delta^{\lambda}_{\sigma}.$$

(Напомним, что $R^{\varkappa}_{\varkappa\sigma\nu}=0$; $-R^{\varkappa}_{\sigma\rho\varkappa}$ есть тензор Риччи $R_{\sigma\rho}$, и при N измерениях $\delta^{\varkappa}_{\varkappa}=N$.) Используя правило циклических перестановок индексов (6.6.5) и свойство антисимметрии $R^{\lambda}_{\sigma\rho\nu}$, находим

$$(N-1)\,R_{\lambda\rho\sigma\nu}=R_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}-R_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}. \quad (13.2.3)$$

Но это выражение должно быть антисимметрично и по λ и ρ, а потому

$$R_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}-R_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}=-R_{\nu\lambda}g_{\rho\sigma}+R_{\sigma\lambda}g_{\rho\nu}.$$

Свертывая далее λ и ν, находим

$$R_{\sigma\rho}-NR_{\sigma\rho}=-R^{\lambda}{}_{\lambda}g_{\sigma\rho}+R_{\rho\sigma}.$$

Таким образом, тензор Риччи принимает вид

$$R_{\sigma\rho}=\frac{1}{N}\,g_{\sigma\rho}R^{\lambda}{}_{\lambda}. \quad (13.2.4)$$

Подставляя это в (13.2.3), находим выражение для тензора кривизны

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu}=\frac{R^{\lambda}{}_{\lambda}}{N(N-1)}\{g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}-g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}\}. \quad (13.2.5)$$

Это выражение удовлетворяет соотношению (13.2.1), и ничего более с помощью (13.2.1) мы получить не можем.

В пространстве, которое изотропно в окрестности *каждой* точки, выражения (13.2.4) и (13.2.5) будут справедливы везде, и мы можем использовать тождества Бианки, чтобы исследовать зависимость скалярной кривизны $R^{\lambda}{}_{\lambda}$ от положения. Подставляя (13.2.4) в (6.8.4), получаем

$$\left[R^{\sigma}{}_{\rho}-\frac{1}{2}\,\delta^{\sigma}{}_{\rho}R^{\lambda}{}_{\lambda}\right]_{;\,\sigma}=\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{2}\right)(R^{\lambda}{}_{\lambda});_{\,\sigma}=0,$$

или

$$\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}R^{\lambda}{}_{\lambda}=0. \tag{13.2.6}$$

Следовательно, в любом пространстве трех или более измерений, в котором (13.2.4) справедливо повсюду, $R^{\lambda}{}_{\lambda}$ *постоянно*. Вместо $R^{\lambda}{}_{\lambda}$ удобно ввести постоянную кривизны K с помощью соотношения

$$R^{\lambda}{}_{\lambda}\equiv -N(N-1)K. \tag{13.2.7}$$

Подставляя последнее выражение в (13.2.4), перепишем тензор Риччи и тензор Римана — Кристоффеля в виде

$$R_{\sigma\rho}\equiv -(N-1)Kg_{\sigma\rho}, \tag{13.2.8}$$

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu}=K\{g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}-g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}\}. \tag{13.2.9}$$

В дифференциальной геометрии пространство, обладающее такими свойствами, называют *пространством постоянной кривизны*.

Кроме того, в § 7 гл. 6 мы показали, что тензор кривизны в двух измерениях всегда имеет форму (13.2.5), а потому не удивительно, что в данном случае (13.2.6) не позволяет нам сделать никаких заключений о постоянстве $K^{\lambda}{}_{\lambda}$. Однако, используя (13.2.2), можно показать, что величина K в (13.2.9) постоянна и для максимально симметричных пространств с числом измерений $N=2$.

Предположим теперь, что даны две метрики $g_{\mu\nu}(x)$ и $g'_{\mu\nu}(x')$, обе имеющие одинаковое число положительных и отрицательных собственных значений и обе удовлетворяющие условию (13.2.9) максимально симметричного пространства, т. е.

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu}=K(g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}-g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}), \tag{13.2.10}$$

$$R'_{\lambda\rho\sigma\nu}=K(g'_{\sigma\rho}g'_{\lambda\nu}-g'_{\nu\rho}g'_{\lambda\sigma}), \tag{13.2.11}$$

где скалярная кривизна одна и та же в обоих случаях. Покажем, что $g_{\mu\nu}(x)$ и $g'_{\mu\nu}(x')$ должны быть эквивалентными в том смысле, что существует преобразование $x\to x'$, которое превращает $g_{\mu\nu}(x)$ и $g'_{\mu\nu}(x')$, т. е.

$$g'_{\mu\nu}(x')\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}=g_{\rho\sigma}(x). \tag{13.2.12}$$

Докажем это путем реального построения $x'^{\mu}(x)$ в виде степенного ряда по x^{μ}. Прежде всего заметим, что равенство числа положительных и отрицательных собственных значений $g_{\mu\nu}$ и $g'_{\mu\nu}$ означает, что можно найти несингулярную матрицу $d^{\mu}{}_{\rho}$, для которой

$$g'_{\mu\nu}(0)\, d^{\mu}{}_{\rho}\, d^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma}(0). \tag{13.2.13}$$

(Обоснование здесь то же, что и в § 4 гл. 6.) Таким образом, мы можем удовлетворить (13.2.12) в *нулевом* порядке по x с помощью

$$x'^{\mu} = d^{\mu}{}_{\rho} x^{\rho}.$$

Теперь воспользуемся математической индукцией. Предположим, что нам удалось удовлетворить (13.2.12) в порядке $n-1$ по x^{μ} полиномом

$$x'^{\mu}(x) = d^{\mu}{}_{\rho} x^{\rho} + \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m!}\, d^{\mu}_{\rho_1 \ldots \rho_m} x^{\rho_1} \ldots x^{\rho_m}. \tag{13.2.14}$$

Добавим член порядка $n+1$ по x^{μ}, чтобы (13.2.12) было установлено в n-м порядке. Это условие будет удовлетворено, если производная (13.2.12) установлена в порядке $n-1$, т. е. если

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g'_{\mu\nu}(x') + \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} g'_{\mu\nu}(x') +$$

$$+ \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial g'_{\mu\nu}(x')}{\partial x'^{\varkappa}} = \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^{\lambda}} \text{ в порядке } x^{n-1}.$$

Это будет выполняться тогда (и, по существу, только тогда), когда справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g'_{\mu\nu}(x') = g_{\sigma\tau}(x)\, \Gamma^{\tau}_{\lambda\rho}(x) -$$

$$- \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} g'_{\nu\eta}(x)\, \Gamma'^{\eta}_{\mu\varkappa}(x') \text{ в порядке } x^{n-1}.$$

Это необходимо доказать лишь в порядке $n-1$ по x^{μ}, так что мы можем использовать (13.2.12), предполагая, что оно установлено в этом порядке, и превратить его в эквивалентное требование

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}\, \partial x^{\lambda}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} \Gamma^{\varkappa}_{\lambda\rho}(x) - \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma'^{\mu}_{\nu\varkappa}(x') \text{ в порядке } x^{n-1}. \tag{13.2.15}$$

Мы можем использовать (13.2.14), которое справедливо в порядке x^n, чтобы вычислить член порядка x^{n-1} в правой части. Выпишем член

порядка $n-1$:

$$\left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\rho}(x)-\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma'^{\mu}_{\nu\varkappa}(x')\right]=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}c^{\mu}_{\lambda\rho\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}}x^{\sigma_1}\ldots x^{\sigma_{n-1}}, \qquad (13.2.16)$$

причем коэффициенты $c^{\mu}_{\lambda\rho\ldots}$ зависят весьма сложным образом от функций $g_{\mu\nu}(x)$ и $g'_{\mu\nu}(x')$ и от ранее найденных коэффициентов $d^{\mu}_{\rho_1\ldots\rho_m}$. Тогда (13.2.15) будет удовлетворено в порядке $n-1$, если мы прибавим к (13.2.14) член порядка $n+1$

$$[x'^{\mu}(x)]=\frac{1}{(n+1)!}c^{\mu}_{\lambda\rho\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}}x^{\lambda}x^{\rho}x^{\sigma_1}\ldots x^{\sigma_{n-1}} \qquad (13.2.17)$$

при условии, что коэффициент $c^{\mu}_{\lambda\rho\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}}$ полностью симметричен по всем его нижним индексам. Эти коэффициенты, очевидно, симметричны при перестановке λ и ρ или индексов среди σ_m, так что единственное условие, которому надо удовлетворить,— это чтобы данный коэффициент был симметричен по λ и любому σ_m или, эквивалентно, чтобы производная (13.2.16) по x^{σ} была симметрична по λ и σ:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\rho}(x)-\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma'^{\mu}_{\nu\varkappa}(x')\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}}\Gamma^{\varkappa}_{\sigma\rho}(x)-\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\sigma}}\Gamma'^{\mu}_{\nu\varkappa}(x')\right)\text{ в порядке }x^{n-2}. \qquad (13.2.18)$$

Так как предполагается, что выражение (13.2.12) установлено в порядке x^{n-1}, выражение для его производной (13.2.15) будет справедливо в порядке x^{n-2}, а потому мы можем воспользоваться (13.2.12) и (13.2.15), чтобы переписать (13.2.18) в виде эквивалентного требования:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}}R^{\varkappa}_{\rho\lambda\eta}(x)=\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\eta}}R'^{\mu}_{\nu\varkappa\sigma}(x')\text{ в порядке }x^{n-2}. \qquad (13.2.19)$$

Теперь воспользуемся выражениями (13.2.10) и (13.2.11), которые позволяют ввести вместо (13.2.19) эквивалентное требование:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\eta}}g_{\lambda\rho}(x)-\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}g_{\rho\eta}(x)=$$

$$=\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}\left(\frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\eta}}g'_{\nu\varkappa}(x')-\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\eta}}g'_{\nu\sigma}(x')\right)\text{ в порядке }x^{n-2}. \qquad (13.2.20)$$

Это условие действительно удовлетворено, ибо предполагалось, что (13.2.12) установлено в порядке x^{n-1}. Как уже говорилось, это означает, что (13.2.19) установлено в порядке x^{n-2}. Отсюда

следует, что (13.2.18) справедливо в порядке x^{n-2}, что в свою очередь означает полную симметрию коэффициентов $c^{\mu}{}_{\lambda\rho\sigma_1\ldots\sigma_m}$ по их нижним индексам. Из симметрии вытекает, что (13.2.17) удовлетворяет (13.2.15), откуда следует, что путем прибавления (13.2.17) к (13.2.14) мы можем удовлетворить (13.2.12) в порядке x^n. Таким образом, если (13.2.12) может быть удовлетворено в порядке x^{n-1} полиномом $x'(x)$ порядка $n+1$, то его можно удовлетворить в порядке x^n полиномом $x'(x)$ порядка $n+1$, и, следовательно, функция $x'(x)$, удовлетворяющая (13.2.12), действительно может быть построена как степенной ряд, что и требовалось доказать.

§ 3. Максимально симметричные пространства. Построение

Максимально симметричные пространства, по существу, единственны, так что мы можем узнать о них все путем построения любых примеров пространства произвольной кривизны K. Имеется довольно очевидный путь выполнения такого построения (фиг. 13.1). Рассмотрим плоское $(N+1)$-мерное пространство с метрикой

$$-d\tau^2 \equiv g_{AB}\,dx^A\,dx^B = C_{\mu\nu}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu} + K^{-1}\,dz^2, \qquad (13.3.1)$$

где $C_{\mu\nu}$ — постоянная $N \times N$-матрица, а K — некая константа. Можно вложить неевклидово N-мерное пространство в это более широкое пространство, ограничивая значения переменных x^{μ} и z поверхностью сферы (или псевдосферы):

$$KC_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} + z^2 = 1. \qquad (13.3.2)$$

На этой поверхности dz^2 выражается следующим образом:

$$dz^2 = \frac{K^2\,(C_{\mu\nu}x^{\mu}\,dx^{\nu})^2}{z^2} = \frac{K^2\,(C_{\mu\nu}x^{\mu}\,dx^{\nu})^2}{(1-KC_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu})},$$

и, следовательно, (13.3.1) имеет вид

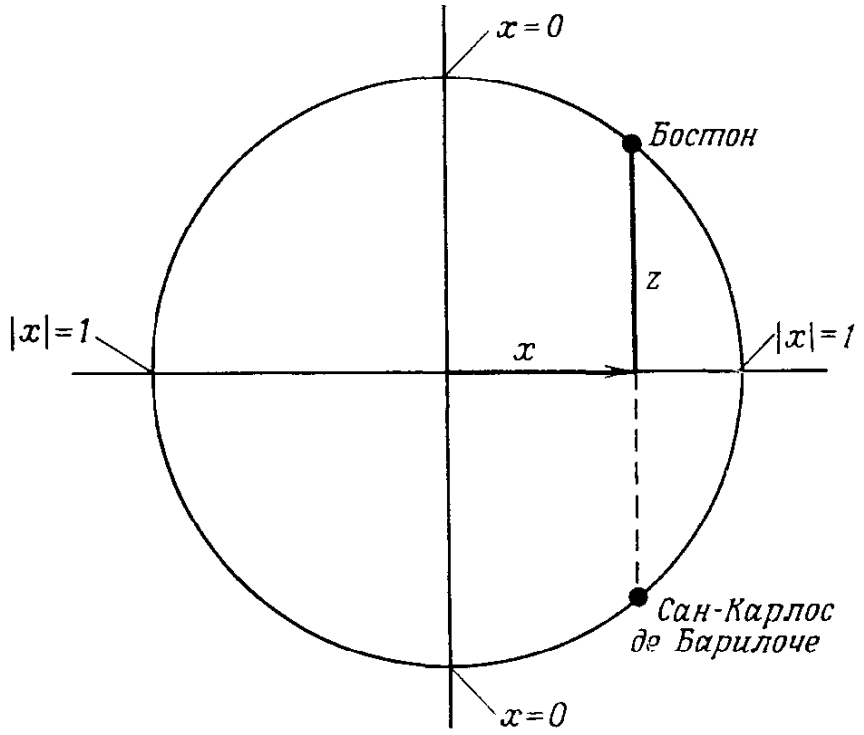
$$-d\tau^2 = C_{\mu\nu}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu} + \frac{K\,(C_{\mu\nu}x^{\mu}\,dx^{\nu})^2}{(1-KC_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma})}. \qquad (13.3.3)$$

Тогда метрика имеет вид

$$g_{\mu\nu}(x) = C_{\mu\nu} + \frac{K}{(1-KC_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma})}\,C_{\mu\lambda}x^{\lambda}C_{\nu\varkappa}x^{\varkappa}. \qquad (13.3.4)$$

Плоское пространство оказывается частный случай при $K = 0$.

Из этого построения следует очевидный вывод, что (13.3.4) допускает $[N(N+1)/2]$-параметрическую группу изометрий (13.3.1), так как и $(N+1)$-мерный линейный элемент (13.3.1) и условие «вложения» (13.3.2) явно инвариантны относительно



Фиг. 13.1. Представление точек сферы путем проектирования их на экваториальную плоскость.

Отметим, что каждой спроецированной точке с данными координатами x^i соответствуют две точки на сфере.

жестких «вращений» $(N+1)$-мерного пространства, т. е. относительно преобразований

$$x^\mu \to x'^\mu = R^\mu{}_\nu x^\nu + R^\mu{}_z z, \tag{13.3.5}$$

$$z \to z' = R^z{}_\mu z^\mu + R^z{}_z z, \tag{13.3.6}$$

где $R^A{}_B$ — постоянные, удовлетворяющие соотношениям

$$C_{\mu\nu} R^\mu{}_\rho R^\nu{}_\sigma + K^{-1} R^z{}_\rho R^z{}_\sigma = C_{\rho\sigma}, \tag{13.3.7}$$

$$C_{\mu\nu} R^\mu{}_\rho R^\nu{}_z + K^{-1} R^z{}_\rho R^z{}_z = 0, \tag{13.3.8}$$

$$C_{\mu\nu} R^\mu{}_z R^\nu{}_z + K^{-1} (R^z{}_z)^2 = K^{-1}. \tag{13.3.9}$$

Удобно различать два класса простых преобразований, задаваемых (13.3.7) — (13.3.9):

А. $$R^\mu{}_\nu = \mathcal{R}^\mu{}_\nu, \quad R^\mu{}_z = R^z{}_\mu = 0, \quad R^z{}_z = 1, \tag{13.3.10}$$

где $\mathcal{R}^\mu{}_\nu$ — любая $N \times N$-матрица, подчиняющаяся соотношению

$$C_{\mu\nu} \mathcal{R}^\mu{}_\rho \mathcal{R}^\nu{}_\sigma = C_{\rho\sigma}. \tag{13.3.11}$$

Это условие соответствует жестким «вращениям» относительно начала координат

$$x'^\mu = \mathcal{R}^\mu{}_\nu x^\nu; \tag{13.3.12}$$

Б. $R^{\mu}{}_{z}=a^{\mu}$, $R^{z}{}_{\mu}=-KC_{\mu\nu}a^{\nu}$, $R^{z}{}_{z}=(1-KC_{\rho\sigma}a^{\rho}a^{\sigma})^{1/2}$, (13.3.13)

$$R^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}{}_{\nu}-bKC_{\nu\rho}a^{\rho}a^{\mu}, \tag{13.3.14}$$

где a^{μ} произвольно, за исключением того, что, так как R^{z}_{z} должно быть действительным, должны выполняться соотношения

$$KC_{\rho\sigma}a^{\rho}a^{\sigma}\leqslant 1 \tag{13.3.15}$$

и

$$b\equiv\frac{1-(1-KC_{\rho\sigma}a^{\rho}a^{\sigma})^{1/2}}{KC_{\rho\sigma}a^{\rho}a^{\sigma}}. \tag{13.3.16}$$

Эти преобразования можно назвать «квазитрансляциями», поскольку

$$x'^{\mu}=x^{\mu}+a^{\mu}[(1-KC_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma})^{1/2}-bKC_{\rho\sigma}x^{\rho}a^{\sigma}]. \tag{13.3.17}$$

В частности, они переводят начало координат $x^{\mu}=0$ в точку a^{μ}.

Существование изометрий (13.3.17), которые переводят начало координат в любую точку (по крайней мере внутри конечной области), означает, что рассматриваемое пространство *однородно*, т. е. любая точка геометрически подобна любой другой точке. (Это свойство явно не видно в нашей системе координат, точно так же как на карте Земли в полярной проекции не видно, что кривизна Земли одна и та же как в Массачусетсе, так и на Северном полюсе.) Существование изометрий (13.3.10), которые включают все жесткие «вращения» относительно начала координат, означает, что рассматриваемое пространство *изотропно* относительно начала координат. Если же учесть, что метрика однородна, то пространство является изотропным в каждой точке, т. е. максимально симметричным.

Можно построить векторы Киллинга для этой метрики, устремляя конечные преобразования (13.3.5) и (13.3.6) к тождественным Сначала рассмотрим преобразования А и положим

$$\mathscr{R}^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}{}_{\nu}+\varepsilon\Omega^{\mu}{}_{\nu}, \qquad |\varepsilon|\ll 1,$$

$$C_{\mu\sigma}\Omega^{\mu}{}_{\rho}+C_{\rho\mu}\Omega^{\mu}{}_{\sigma}=0. \tag{13.3.18}$$

Сравнивая это с (13.1.3), получаем векторы Киллинга в виде

$$\xi^{\mu}_{\Omega}(x)=\Omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}. \tag{13.3.19}$$

Рассмотрим теперь преобразование Б и положим

$$a^{\mu}=\varepsilon\alpha^{\mu}, \qquad |\varepsilon|\ll 1.$$

Сравнивая последнее с (13.1.3), находим соответствующий вектор Киллинга

$$\xi^{\mu}_{\alpha}(x)=\alpha^{\mu}[1-KC_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}]^{1/2}. \tag{13.3.20}$$

Читатель может убедиться в том, что (13.3.19) и (13.3.20) действительно удовлетворяют условиям Киллинга (13.1.5). Имеется $N(N-1)/2$ независимых параметров [т. е. N^2 элементов $\Omega^{\mu}{}_{\nu}$, отвечающих $N(N+1)/2$ условиям (13.3.18)] и N параметров a^{μ}, так что рассматриваемая метрика позволяет построить $N(N+1)/2$ независимых векторов Киллинга, подтверждающих наличие максимальной симметрии.

Геодезические, соответствующие этой метрике, имеют замечательно простой вид. С помощью (13.3.4) легко вычислить, что аффинная связность равна

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = Kx^{\mu}g_{\nu\lambda}, \tag{13.3.21}$$

так что дифференциальное уравнение для геодезических выглядит так:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + Kx^{\mu} = 0. \tag{13.3.22}$$

Решение его — это линейные комбинации $\sin(\tau\sqrt{K})$ и $\cos(\tau\sqrt{K})$ для $K>0$ или $\operatorname{sh}(\tau\sqrt{-K})$ и $\operatorname{ch}(\tau\sqrt{-K})$ для $K<0$.

Можно выявить внутренние свойства данного пространства, вычисляя его тензор кривизны. Непосредственные вычисления, использующие выражения (6.6.2) и (13.2.21), дают тензор Римана — Кристоффеля для метрики (13.3.4) в виде

$$R_{\varkappa\nu\rho\sigma} = K[C_{\varkappa\sigma}C_{\nu\rho} - C_{\varkappa\rho}C_{\nu\sigma}] + \\ + K^2[1 - KC_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda}]^{-1}[C_{\varkappa\sigma}x_{\nu}x_{\rho} - C_{\varkappa\rho}x_{\nu}x_{\sigma} + C_{\nu\rho}x_{\varkappa}x_{\sigma} - C_{\nu\sigma}x_{\rho}x_{\varkappa}]$$

(где $X_{\nu} \equiv C_{\nu\mu}X^{\mu}$) или

$$R_{\varkappa\nu\rho\sigma} = K[g_{\rho\nu}g_{\varkappa\sigma} - g_{\sigma\nu}g_{\varkappa\rho}]$$

в соответствии с выражением (13.2.9). Поэтому постоянная K в выражениях (13.3.1) и (13.3.2) та же самая, что и постоянная кривизны, используемая в предыдущем параграфе.

Так как K — инвариантный параметр, мы не можем заменить метрику (13.3.4) подобной метрикой с отличным K с помощью преобразований координат. Напротив, из выражения (13.3.3) следует, что с помощью линейной трансформации

$$x^{\mu} = A^{\mu}{}_{\nu}x'^{\nu}$$

можно преобразовать метрику (13.3.4) в подобную метрику с тем же самым K и $C_{\mu\nu}$, замененным на

$$C'_{\mu\nu} = A^{\rho}{}_{\mu}A^{\sigma}{}_{\nu}C_{\rho\sigma}.$$

Из обсуждения, проведенного в § 6 гл. 3, вытекает, что таким способом можно заменить $C_{\mu\nu}$ любой действительной симметричной матрицей по нашему желанию, имеющей, однако, те же самые числа положительных и отрицательных собственных значений Числа собственных значений каждого знака матрицы $C_{\mu\nu}$ те же самые, что и у матрицы $g_{\mu\nu}$ в точке $x = 0$, и, следовательно, те же самые, что и во всем пространстве, поскольку все его точки эквивалентны.

N-мерная метрика, позволяющая ввести локальные евклидовы системы координат (в противоположность, скажем, системе Минковского), будет иметь все собственные значения положительными, а потому для $K \neq 0$ можно считать $C_{\mu\nu}$ равной $|K|^{-1}$, умноженной на единичную матрицу. В этом случае (13.3.3) примет вид

$$ds^2 = K^{-1}\left[d\mathbf{x} + \frac{(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})^2}{1-\mathbf{x}^2}\right] \text{ для } K > 0 \qquad (13.3.23)$$

или

$$ds^2 = |K|^{-1}\left[d\mathbf{x}^2 - \frac{(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})^2}{1+\mathbf{x}^2}\right] \text{ для } K < 0. \qquad (13.3.24)$$

Для $K = 0$ можно положить $C_{\mu\nu}$ равной просто единичной матрице; тогда (13.3.3) дает

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 \quad \text{для} \quad K = 0. \qquad (13.3.25)$$

(Здесь используются N-мерные обозначения векторов. Мы заменили также $-d\tau^2$ собственной длиной ds^2, поскольку в данном примере интересуемся скорее геометрией, чем физикой.) Перейдем теперь к исследованию *глобальных* свойств этих пространств.

Для $K > 0$ удобнее вернуться к интерпретации (13.3.23) как метрики кривого пространства, вложенного с помощью (13.3.2) в плоское пространство (13.3.1). Будем считать, что (13.3.23) описывает поверхность

$$\mathbf{x}^2 + z^2 = 1 \qquad (13.3.26)$$

в плоском пространстве, где интервал имеет вид

$$ds^2 = K^{-1}\,[d\mathbf{x}^2 + dz^2]. \qquad (13.3.27)$$

Очевидно, что эта метрика соответствует просто поверхности сферы с радиусом $K^{-1/2}$ в $(N+1)$-мерном пространстве. [Чтобы сделать координаты $\mathbf{x}$ и z истинно евклидовыми, произведем замены $\mathbf{x}' = K^{-1/2}\mathbf{x}$ и $z' = K^{-1/2}z$. Тогда (13.3.26) будет выглядеть так: $\mathbf{x}'^2 + z'^2 = K^{-1}$.] Так, в двумерном пространстве можно ввести угловые координаты θ, φ, задавая

$$x_1 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad x_2 = \sin\theta\sin\varphi,$$

и (13.3.27) тогда принимает известный вид линейного элемента на сфере с радиусом $K^{-1/2}$:

$$ds^2 = K^{-1}\,[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2]. \qquad (13.3.28)$$

Вообще говоря, значения переменных $\mathbf{x}$ ограничены следующим образом:

$$\mathbf{x}^2 \leqslant 1.$$

Однако в действительности каждое $\mathbf{x}$ соответствует *двум* точкам, по числу корней уравнения (13.3.26) для z. (Например, в двумерном пространстве компоненты $\mathbf{x}$ — это координаты точек сферы, спроецированные на касательную плоскость. На карте Земли в полярной проекции Бостон, таким образом, оказывается в той же самой точке, что и Сан-Карлос де Барилоче в Аргентине.) Объем N-мерного пространства описывается (13.3.23) и, следовательно, равняется

$$V_N = 2\int\limits_{\mathbf{x}^2\leqslant 1} \sqrt{g}\, dx_1 \ldots dx_N = 2K^{-N/2}\int\limits_{\mathbf{x}^2\leqslant 1} \frac{dx_1 \ldots dx_N}{[1-\mathbf{x}^2]^{1/2}}.$$

Непосредственное вычисление дает

$$V_N = \frac{2\pi^{(N+1)/2}}{\Gamma((N+1)/2)} K^{-N/2}. \qquad (13.3.29)$$

Например, $V_1 = 2\pi K^{-1/2}$ есть периметр окружности радиусом $K^{-1/2}$, а $V_2 = 4\pi K^{-1}$ есть площадь сферы радиусом $K^{-1/2}$. Трехмерное пространство постоянной положительной кривизны имеет объем

$$V_3 = 2\pi^2 K^{-3/2}.$$

Можно также вычислить длину окружности на такой сфере, используя в качестве геодезических решения уравнения (13.3.22), которое теперь имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} + K\mathbf{x} = 0. \qquad (13.3.30)$$

Решения, проходящие через точку $\mathbf{x} = 0$, запишутся в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}\sin(sK^{1/2}), \qquad (13.3.31)$$

где для того, чтобы удовлетворить (13.3.23), положено

$$\mathbf{e}^2 = 1. \qquad (13.3.32)$$

Если мы начнем двигаться с «Северного полюса» $\mathbf{x} = 0$ вдоль геодезической, мы достигнем «экватора» $\mathbf{x} = \mathbf{e}$ при $s = \pi K^{-1/2}/2$, «Южного полюса» $\mathbf{x} = 0$ при $s = \pi K^{-1/2}$, достигнем противоположной точки $\mathbf{x} = -\mathbf{e}$ на «экваторе» при $s = 3\pi K^{-1/2}/2$ и вернемся в начальную точку при $s = 2\pi K^{-1/2}$. Таким образом, длина геодезической, охватывающей все пространство и возвращающейся

в ту же точку, равняется

$$L = 2\pi K^{-1/2} \tag{13.3.33}$$

в пространстве произвольного числа измерений с постоянной положительной кривизной. Это вычисление наглядно показывает, что пространство, задаваемое (13.3.23), *конечно*, но не *ограничено*; когда мы достигаем кажущейся сингулярности при $\mathbf{x}^2 = 1$, то мы просто проходим через нее, но уже с z, равным корню того же уравнения (13.3.26) с обратным знаком.

При $K < 0$ метрика (13.3.24) не имеет даже кажущейся сингулярности и ничто не ограничивает координаты $\mathbf{x}$. В этом можно убедиться, вычисляя геодезические, которые, согласно уравнениям (13.3.30) и (13.3.24), имеют в данном случае следующий вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}\,\mathrm{sh}\,(s\,(-K)^{1/2}), \tag{13.3.34}$$

$$\mathbf{e}^2 = 1. \tag{13.3.35}$$

Можно, очевидно, пройти вдоль этой геодезической неограниченное расстояние, выйдя из начала координат. Для $N = 2$ это пространство совпадает с тем, что было открыто Гауссом, Бойяи и Лобачевским. [См. § 1 гл. 1. Для того чтобы задать метрику в форме (1.1.9) модели Клейна, необходимо ввести новый набор координат x'^i, определяемый $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\,(1 + \mathbf{x}^2)^{-1/2}$.] Из (13.3.1) и (13.3.2) видно, что эта геометрия отвечает следующей поверхности в плоском пространстве:

$$-\mathbf{x}^2 + z^2 = 1, \tag{13.3.36}$$

где

$$ds^2 = |\,K\,|^{-1}\,[d\mathbf{x}^2 - dz^2]. \tag{13.3.37}$$

Знак минус в (13.3.37) означает, что это плоское пространство не является евклидовым. Теперь понятно, что геометрия Гаусса — Бойяи — Лобачевского не могла быть открыта до тех пор, пока геометры не научились думать о кривых поверхностях не как о подпространствах обычного евклидова пространства, но как о пространствах, характеризуемых их собственными внутренними метрическими соотношениями.

Наконец, возвратимся к пространству-времени и исследуем структуру четырехмерной максимально симметричной метрики с тремя положительными и одним отрицательным собственными значениями. В этом случае можно положить

$$C_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \tag{13.3.38}$$

Тогда метрика примет вид

$$-d\tau^2 = d\mathbf{x}^2 - dt^2 + \frac{K\,(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} - t\,dt)^2}{1 - K\,(\mathbf{x}^2 - t^2)}. \tag{13.3.39}$$

При $K > 0$ можно ввести координаты, в которых *пространственная* часть метрики оказывается плоской, а именно

$$t = \frac{1}{\sqrt{K}}\left[\frac{Kr'^2}{2}\operatorname{ch}(K^{1/2}t') + \left(1 + \frac{Kr'^2}{2}\right)\operatorname{sh}(K^{1/2}t')\right], \quad (13.3.40)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' \exp(K^{1/2}t').$$

Тогда (13.3.39) записывается следующим образом:

$$d\tau^2 = dt'^2 - \exp(2K^{1/2}t')\, d\mathbf{x}'^2. \quad (13.3.41)$$

Можно также ввести координаты, в которых метрика оказывается не зависящей от времени, т. е.

$$t'' = t' - \frac{1}{2K^{1/2}} \ln[1 - K\mathbf{x}'^2 \exp(2K^{1/2}t')],$$

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' \exp(K^{1/2}t'). \quad (13.3.42)$$

Тогда (13.3.41) принимает вид

$$d\tau^2 = (1 - K\mathbf{x}''^2)\, dt''^2 - d\mathbf{x}''^2 - \frac{K(\mathbf{x}'' \cdot d\mathbf{x}'')^2}{1 - K\mathbf{x}''^2}. \quad (13.3.43)$$

Такую метрику впервые обсуждал де Ситтер [2], она явится основой нашего рассмотрения стационарной космологической модели в гл. 14.

Следует еще раз подчеркнуть, что хотя и кажется, что максимально симметричная метрика (13.3.4) возникает произвольным образом, в действительности она представляет собой наиболее общий возможный случай максимально симметричной метрики, поскольку теорема единственности из предыдущего параграфа утверждает, что любая другая максимально симметричная метрика может быть приведена к виду (13.3.4) с помощью надлежащего преобразования координат.

§ 4. Тензоры в максимально симметричном пространстве

Предположение о максимальной симметрии может быть отнесено не только к метрике пространства, но и к любому тензорному полю, содержащемуся в пространстве. Говорят, что тензорное поле $T_{\mu\nu\ldots}$ является *форминвариантным* относительно преобразования $x \to x'$, если $T'_{\mu\nu}\ldots(x')$ — та же самая функция его аргумента x'^{μ}, что и $T_{\mu\nu\ldots}(x)$ ее аргумента x^{μ}, т. е.

$$T'_{\mu\nu}\ldots(y) = T_{\mu\nu}\ldots(y) \quad \text{для всех } y. \quad (13.4.1)$$

В любой данной точке преобразованный тензор задается обычной формулой

$$T_{\mu\nu\ldots}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \ldots T'_{\rho\sigma\ldots}(x'),$$

а потому условие форминвариантности (13.4.1) выглядит так:

$$T_{\mu\nu\ldots}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \ldots T_{\rho\sigma\ldots}(x'). \tag{13.4.2}$$

При инфинитезимальном преобразовании

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon\xi^{\mu}(x), \qquad |\varepsilon| \ll 1,$$

условие (13.4.2) в первом порядке по ε принимает вид

$$0 = \frac{\partial\xi^{\rho}(x)}{\partial x^{\mu}} T_{\rho\nu\ldots}(x) + \frac{\partial\xi^{\sigma}(x)}{\partial x^{\nu}} T_{\mu\sigma\ldots}(x) + \\ + \ldots + \xi^{\lambda}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} T_{\mu\nu\ldots}(x) \tag{13.4.3}$$

(т. е. *производная Ли* от $T_{\mu\nu\ldots}$ по ξ^{λ} равняется нулю; см. § 9 гл. 10). Тензор в максимально симметричном пространстве, удовлетворяющий (13.4.3) для всех $N(N+1)/2$ независимых векторов Киллинга $\xi^{\lambda}(x)$, будет называться *максимально форминвариантным*.

Для скаляра $S(x)$ соотношение (13.4.3) выглядит просто как

$$\xi^{\lambda}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} S(x) = 0. \tag{13.4.4}$$

Если скаляр является максимально форминвариантным, то $\xi^{\lambda}(x)$ в любой данной точке может принимать любое значение и, следовательно, (13.4.4) требует, чтобы S было постоянным:

$$\frac{\partial S}{\partial x^{\lambda}} = 0. \tag{13.4.5}$$

Для любого другого максимально форминвариантного тензора удобно сначала выбрать векторы Киллинга $\xi^{\lambda}(x)$, которые в данной точке X удовлетворяют условию

$$\xi^{\lambda}(X) = 0$$

и для которых величины

$$\xi_{\sigma;\,\mu}(X) = g_{\sigma\rho}(X) \left(\frac{\partial\xi^{\rho}(x)}{\partial x^{\mu}}\right)_{x=X}$$

образуют произвольную антисимметричную матрицу. Тогда в точке $x = X$ уравнение (13.4.3) записывается следующим образом:

$$0 = \xi_{\sigma;\,\tau}\{\delta^{\tau}_{\mu} T^{\sigma}{}_{\nu\ldots} + \delta^{\tau}_{\nu} T_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\ldots} + \ldots\}.$$

Так как $\xi_{\sigma;\,\tau}$ — произвольная антисимметричная матрица, коэффициент при ней должен быть симметричным по σ и τ:

$$\delta^{\tau}_{\mu}T^{\sigma}{}_{\nu}\ldots+\delta^{\tau}_{\nu}T_{\mu}{}^{\sigma}\ldots+\ldots=\delta^{\sigma}_{\mu}T^{\tau}{}_{\nu}\ldots+\delta^{\sigma}_{\nu}T_{\mu}{}^{\tau}\ldots+\ldots. \quad (13.4.6)$$

Поскольку X было произвольным, это условие должно выполняться повсюду.

Для максимально форминвариантного вектора $A_{\mu}(x)$ соотношение (13.4.6) принимает вид

$$\delta^{\tau}_{\mu}A^{\sigma}=\delta^{\sigma}_{\mu}A^{\tau}.$$

Свертывая μ и τ, находим, что в N-мерном пространстве выполняется

$$NA^{\sigma}=A^{\sigma}.$$

Отсюда, исключая тривиальный случай $N=1$, следует

$$A^{\sigma}=0. \quad (13.4.7)$$

Для максимально форминвариантного тензора второго ранга $B_{\mu\nu}$ уравнение (13.4.6) выглядит так:

$$\delta_{\mu}{}^{\tau}B^{\sigma}{}_{\nu}+\delta_{\nu}{}^{\tau}B_{\mu}{}^{\sigma}=\delta_{\mu}{}^{\sigma}B^{\tau}{}_{\nu}+\delta^{\sigma}{}_{\nu}B_{\mu}{}^{\tau}.$$

Свертывание τ с μ дает

$$NB^{\sigma}{}_{\nu}+B_{\nu}{}^{\sigma}=B^{\sigma}{}_{\nu}+\delta^{\sigma}{}_{\nu}B_{\mu}{}^{\mu},$$

а понижение индекса σ приводит к условию

$$(N-1)\,B_{\sigma\nu}+B_{\nu\sigma}=g_{\sigma\nu}B_{\mu}{}^{\mu}. \quad (13.4.8)$$

Вычитая отсюда подобное соотношение с переставленными ν и σ, получаем

$$(N-2)\,(B_{\sigma\nu}-B_{\nu\sigma})=0,$$

т. е., если $N\neq 2$, тензор $B_{\sigma\nu}$ должен быть симметричным:

$$B_{\sigma\nu}=B_{\nu\sigma}. \quad (13.4.9)$$

(При двух измерениях $B_{\sigma\nu}$ может иметь антисимметричную часть, пропорциональную $g^{-1/2}\varepsilon_{\mu\nu}$; см. § 4 гл. 4.) Подставляя (13.4.9) в (13.4.8), находим, что для $N\geqslant 3$ (и для симметричной части $B_{\sigma\nu}$ при $N=2$) выполняется соотношение

$$B_{\sigma\nu}=fg_{\sigma\nu}, \quad (13.4.10)$$

где

$$f\equiv\frac{1}{N}B_{\mu}{}^{\mu}.$$

Чтобы отыскать зависимость f от координат, можно подставить (13.4.10) снова в условие форминвариантности (13.4.3):

$$0 = \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} f g_{\rho\nu} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} f g_{\mu\rho} + \xi^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (f g_{\mu\nu}).$$

Но $g_{\mu\varphi}$ удовлетворяет условию Киллинга (13.1.4), что дает

$$0 = g_{\mu\nu} \xi^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}.$$

В максимально симметричном пространстве можно в любой данной точке придать ξ^λ любое значение и, следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x^\lambda} = 0. \tag{13.4.11}$$

Таким образом, *единственный максимально форминвариантный тензор второго ранга — это метрический тензор, возможно, умноженный на какую-нибудь постоянную.*

§ 5. Пространство с максимально симметричными подпространствами

Во многих физически важных случаях все пространство (или пространство-время) не является максимально симметричным, но может быть разложено на максимально симметричные подпространства. Например, сферически-симметричное трехмерное пространство может быть представлено как набор сферических поверхностей с центрами в начале координат, каждая из которых описывается метрикой (13.3.28). В гл. 14 мы рассмотрим такие типы пространства-времени, для которых метрика сферически-симметрична и однородна в каждой «плоскости» постоянного времени.

В этом параграфе мы увидим, что максимальная симметрия набора подпространств накладывает очень сильные ограничения на метрику всего пространства. Для того чтобы сформулировать и доказать это положение, прежде всего выберем удобную систему координат. Если все пространство имеет N измерений, а его максимально симметричные подпространства M-мерны, то мы можем маркировать эти подпространства $N - M$ координатами, обозначаемыми v^a, и задавать точки внутри каждого подпространства с M координатами u^i. Ряд примеров приведен в табл. 13.1.

Мы говорим, что подпространства с постоянными v^a являются максимально симметричными, если метрика всего пространства инвариантна относительно группы инфинитезимальных преобразований

$$u^i \to u'^i = u^i + \varepsilon \xi^i (u, v), \tag{13.5.1}$$

$$v^a \to v'^a = v^a, \tag{13.5.2}$$

Таблица 13.1

Примеры пространства с максимально симметричными подпространствами

Пример	v-координата	u-координата
Сферически-симметричное пространство	r	θ, φ
Сферически-симметричное пространство-время	r, t	θ, φ
Сферически-симметричное и однородное пространство-время	t	r, θ, φ

где ξ^i являются $M(M+1)/2$ независимыми векторами Киллинга. Это преобразования общего вида (13.1.3), но с той особенностью, что v^a являются инвариантами, а потому

$$\xi^a(u, v) = 0. \tag{13.5.3}$$

Заметим, что хотя эти преобразования действуют только на переменные u, нет никаких причин, по которым эти правила преобразований не могли бы зависеть параметрически от величин v^a, соответствующих данному трансформируемому подпространству. Наше утверждение о том, что имеется $M(M+1)/2$ «независимых» векторов Киллинга, следует понимать в том смысле, что существует $M(M+1)/2$ векторов Киллинга, не связанных никакими линейными соотношениями, в которых коэффициенты не зависят от u.

Общее положение, определяющее структуру таких пространств, формулируется в виде следующей теоремы. Всегда можно выбрать такие координаты, что метрика всего пространства задается формулой

$$-d\tau^2 \equiv g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu = g_{ab}(v)\,dv^a\,dv^b + f(v)\,\tilde{g}_{ij}(u)\,du^i\,du^j, \tag{13.5.4}$$

где $g_{ab}(v)$ и $f(v)$ — функции только v-координат, а $\tilde{g}_{ij}(u)$ — функция только u-координат и сама по себе является метрикой M-мерного максимально симметричного пространства. (Обозначение суммирования здесь прежнее, причем a, b. . . пробегают $N-M$ значений номеров координат v, а i, j, k, l. . . пробегают M значений номеров координат u.)

Начиная доказательство, запишем условие того, что (13.5.1) есть изометрия всего пространства $g_{\mu\nu}(x)$. Это условие удобно использовать здесь в его первоначальной форме (13.1.4), а не в более изящной ковариантной форме записи (13.1.5). Каждый индекс μ, ν, ρ . . . в (13.1.4) теперь пробегает $N-M$ значений номеров координат v^a и M значений номеров u^i, а потому (13.1.4) записывается теперь в виде трех отдельных уравнений.

Для $\rho = i$, $\sigma = j$ имеем

$$0 = \frac{\partial \xi^k(u, v)}{\partial u^i} g_{kj}(u, v) + \frac{\partial \xi^k(u, v)}{\partial u^j} g_{ki}(u, v) + \\ + \xi^k(u, v) \frac{\partial g_{ij}(u, v)}{\partial u^k}. \qquad (13.5.5)$$

Для $\rho = i$, $\sigma = a$ имеем

$$0 = \frac{\partial \xi^k(u, v)}{\partial u^i} g_{ka}(u, v) + \frac{\partial \xi^k(u, v)}{\partial v^a} \times \\ \times g_{ik}(u, v) + \xi^k(u, v) \frac{\partial g_{ia}(u, v)}{\partial u^k}. \qquad (13.5.6)$$

Для $\rho = a$, $\sigma = b$ имеем

$$0 = \frac{\partial \xi^k(u, v)}{\partial v^a} g_{kb}(u, v) + \frac{\partial \xi^k(u, v)}{\partial v^b} \times \\ \times g_{ka}(u, v) + \xi^k(u, v) \frac{\partial g_{ab}(u, v)}{\partial v^k}. \qquad (13.5.7)$$

Первое из этих трех уравнений говорит просто о том, что $g_{ij}(u, v)$ должно быть для каждого фиксированного набора v^a метрикой M-мерного пространства с координатами u^i, которая допускает существование векторов Киллинга ξ^i. Мы предполагаем здесь, что существует $M(M+1)/2$ таких независимых векторов Киллинга; из этого следует, что подматрица $g_{ij}(u, v)$ является в свою очередь максимально симметричной метрикой для каждого набора фиксированных v^a. Из обсуждения, проведенного в § 1 гл. 13, вытекает, что для любой данной точки u_0 можно найти векторы Киллинга $\xi^k(u, v)$, причем $\xi^k(u_0, v)$ и $\xi_{k;l}(u_0, v)$ принимают произвольные значения, удовлетворяющие единственному требованию, чтобы $\xi_{k;l} = -\xi_{l;k}$. Таким образом, метрика $g_{ij}(u, v)$ является для каждого v однородной по u и изотропной в любой точке.

Два других уравнения содержат информацию об остальных элементах g_{ai} и g_{ab}, а также о зависимости векторов Киллинга от v. (Зависимость от v не совсем произвольна. Например, справедливо следующее утверждение: переопределением координат u всегда можно добиться того, чтобы метрика $g_{ij}(u, v)$ имела независимые от v векторы Киллинга $\xi^i(u)$, а векторы Киллинга $\xi^i(u, v)$ всего пространства были бы, вообще говоря, линейными комбинациями $\xi^i(u)$, причем коэффициенты в них могли бы зависеть от координат v.) Для того чтобы извлечь информацию, содержащуюся в (13.5.6) и (13.5.7), очень удобно перейти к новому набору координат $u'^i(u, v)$ в максимально симметричных подпространствах так, чтобы g'_{ja} равнялись нулю. Предположим, что можно

найти функцию $U^k(v;\ u_0)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$g_{ik}(U,\ v)\frac{\partial U^k}{\partial v^a} = -g_{ia}(U,\ v) \tag{13.5.8}$$

с начальным условием

$$U^k(v_0;\ u_0) \equiv u_0{}^k \tag{13.5.9}$$

в некоторой точке $v_0{}^a$. Тогда координаты u'^i, v'^a определяются соотношением

$$u^i = U^i(v';\ u'), \tag{13.5.10}$$

$$v^a = v'^a. \tag{13.5.11}$$

В этой системе координат метрика имеет вид

$$g'_{ja}(u',\ v') = \frac{\partial u^l}{\partial u'^j}\frac{\partial u^k}{\partial v'^a}g_{lk}(u,\ v) + \frac{\partial u^l}{\partial u'^j}g_{la}(u,\ v) =$$

$$= \frac{\partial U^l(v';\ u')}{\partial u'^j}\left\{\frac{\partial U^k(v';\ u')}{\partial v'^a}g_{lk}(U,\ v') + g_{la}(U,\ v')\right\},$$

и, таким образом, уравнение (13.5.8) приводит к результату

$$g'_{ia} = 0. \tag{13.5.12}$$

Следовательно, можно построить координаты u', в которых g'_{ia} равняется нулю, если существуют решения дифференциального уравнения (13.5.8) с произвольными начальными условиями (13.5.9).

Перепишем (13.5.8) в эквивалентной форме:

$$\frac{\partial U^k}{\partial v^a} = -F^k{}_a(U,\ v), \tag{13.5.13}$$

где

$$F^k{}_a(U,\ v) \equiv \bar{g}^{ki}(U,\ v)\,g_{ia}(U,\ v), \tag{13.5.14}$$

а $\bar{g}^{ij}$ — матрица, обратная g_{ij}, т. е.

$$\bar{g}^{ij}g_{jk} = \delta^i_k. \tag{13.5.15}$$

(Черта должна напоминать, что ij-элемент матрицы $\bar{g}^{ij}$, обратной к g_{ij}, не равен ij-элементу g^{ij} матрицы $g^{\mu\nu}$, обратной к $g_{\mu\nu}$.) Когда имеется только одна координата v (как в случае, рассмотренном в главе, посвященной космологии), очевидно, что уравнение (13.5.13) может быть решено при произвольных начальных условиях. В общем случае для того, чтобы доказать, что (13.5.13) интегрируемо, надо проделать некоторую работу. Применим тот же метод, что и в § 2 этой главы. Попытаемся решить уравнение (13.5.13) в окрестности v_0 с помощью разложения

по степеням $v - v_0$:

$$U^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c^k_{a_1 \ldots a_n} (v - v_0)^{a_1} \ldots (v - v_0)^{a_n}. \qquad (13.5.16)$$

Ясно, что начальные условия (13.5.9) удовлетворяются, если выбрать коэффициент при $n = 0$ в виде

$$c^k = u_0{}^k,$$

и уравнение (13.5.13) удовлетворяется в нулевом порядке по $v - v_0$, если выбрать

$$c^k{}_a = -F^k{}_a (u_0, v_0).$$

Теперь, продолжая по индукции, предположим, что можно выбрать члены из (13.5.16), вплоть до членов порядка $(v - v_0)^n$, так что (13.5.13) удовлетворяется с точностью до $(v - v_0)^{n-1}$. Тогда можно использовать эти члены для вычисления вклада порядка $(v - v_0)^n$ в $F^k{}_a(U, v)$. Запишем его в виде

$$[F^k{}_a (U (v; u_0), v]_{\text{порядка } n} = \frac{1}{n!} f^k_{ab_1 \ldots b_n} (v - v_0)^{b_1} \ldots (v - v_0)^{b_n}.$$

В этом случае (13.5.16) будет удовлетворять (13.5.13) с точностью до членов порядка $(v - v_0)^n$, если представить вклад в U порядка $n + 1$ как

$$[U^k (v; u_0)]_{\text{порядка } n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^k_{ab_1 \ldots b_n} (v - v_0)^a (v - v_0)^{b_1} \ldots (v - v_0)^{b_n},$$

с условием, что f симметрично по всем его индексам. Так как $f^k_{ab_1 \ldots b_n}$ можно, очевидно, выбрать симметричным по индексам b, достаточно потребовать, чтобы оно было также симметричным при перестановках a и любого b или, эквивалентно, чтобы величина

$$\left[\frac{\partial}{\partial v^b} F^k{}_a (U (v; u_0), v)\right]_{\text{порядка } n-1}$$

была симметричной по a и b. Но предполагается, что U удовлетворяет (13.5.13) в порядке $(v - v_0)^{n-1}$, а потому предыдущее требование выполняется, если величина

$$\left[-\frac{\partial F^k{}_a (u, v)}{\partial u^l} F^l{}_b (u, v) + \frac{\partial F^k{}_a (u, v)}{\partial v^b}\right]_{u = U(v, u_0)}$$

симметрична по a и b. Итак, приходим к выводу, что (13.5.13) интегрируемо, если выполняется соотношение

$$\frac{\partial F^k{}_a (u, v)}{\partial u^l} F^l{}_b (u, v) - \frac{\partial F^k{}_a (u, v)}{\partial v^b} = \frac{\partial F^k{}_b (u, v)}{\partial u^l} F^l{}_a (u, v) - \frac{\partial F^k{}_b (u, v)}{\partial v^a} \qquad (13.5.17)$$

при всех u и v.

Для того чтобы доказать, что (13.5.17) действительно справедливо, вспомним условие (13.5.6) для вектора Киллинга. Умно-

жая его на $\bar{g}^{il}$, получаем

$$\frac{\partial \xi^l}{\partial v^a} = -\bar{g}^{il}\frac{\partial \xi^m}{du^i} g_{ma} - \bar{g}^{il}\xi^k \frac{\partial g_{ia}}{\partial u^k}.$$

Умножая далее (13.5.5) на $\bar{g}^{il}\cdot\bar{g}^{jm}$, имеем

$$\bar{g}^{il}\frac{\partial \xi^m}{\partial u^i} + \bar{g}^{jm}\frac{\partial \xi^l}{\partial u^j} = -\xi^k \bar{g}^{il}\bar{g}^{jm}\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = \xi^k \frac{\partial \bar{g}^{lm}}{\partial u^k},$$

а потому

$$\frac{\partial \xi^l}{\partial v^a} = \bar{g}^{jm}\frac{\partial \xi^l}{\partial u^j} g_{ma} - \xi^k \frac{\partial \bar{g}^{lm}}{\partial u^k} g_{ma} - \xi^k \bar{g}^{lm}\frac{\partial g_{ma}}{\partial u^k}.$$

Привлекая (13.5.14), можно переписать это выражение так:

$$\frac{\partial \xi^l}{\partial v^a} = F^j{}_a \frac{\partial \xi^l}{du^j} - \xi^k \frac{\partial F^l{}_a}{\partial u^k}. \tag{13.5.18}$$

Теперь продифференцируем его по v^b и найдем

$$\frac{\partial^2 \xi^l}{\partial v^b\, \partial v^a} = F^j{}_a \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{\partial \xi^l}{\partial v^b}\right) + \frac{\partial F^j{}_a}{\partial v^b}\frac{\partial \xi^l}{\partial u^j} - \frac{\partial \xi^k}{\partial v^b}\frac{\partial F^l{}_a}{\partial u^k} - \xi^k \frac{\partial^2 E^l{}_a}{\partial v^b\, \partial u^k},$$

а подставляя (13.5.18) в правую часть, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi^l}{\partial v^b\, \partial v^a} = {} & F^j{}_a F^i{}_b \frac{\partial^2 \xi^l}{\partial u^j\, \partial u^i} + F^j{}_a \frac{\partial F^i{}_b}{\partial u^j}\frac{\partial \xi^l}{du^i} - F^j{}_a \frac{\partial F^l{}_b}{\partial u^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} - \\ & - F^j{}_a \frac{\partial^2 F^l{}_b}{\partial u^k\, \partial u^j}\xi^k + \frac{\partial F^j{}_a}{\partial v^b}\frac{\partial \xi^l}{\partial u^j} - F^i{}_b \frac{\partial F^l{}_a}{\partial u^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial u^i} + \\ & + \frac{\partial F^k{}_b}{\partial u^i}\frac{\partial F^l{}_a}{\partial u^k}\xi^i - \frac{\partial^2 F^l{}_a}{\partial v^b\, \partial u^k}\xi^k.\end{aligned}$$

Но это последнее выражение должно быть симметрично по a и b; следовательно, справедливо

$$\begin{aligned}0 = {} & \left\{F^j{}_a \frac{\partial F^i{}_b}{\partial u^j} - F^j{}_b \frac{\partial F^i{}_a}{\partial u^j} + \frac{\partial F^i{}_a}{\partial v^b} - \frac{\partial F^i{}_b}{\partial v^a}\right\}\frac{\partial \xi^l}{\partial u^i} + \\ & + \left\{-F^j{}_a \frac{\partial^2 F^l{}_b}{\partial u^k\, \partial u^j} + F^j{}_b \frac{\partial^2 F^l{}_a}{\partial u^k\, \partial u^j} + \frac{\partial F^i{}_b}{\partial u^k}\frac{\partial F^l{}_a}{\partial u^i} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial F^i{}_a}{\partial u^k}\frac{\partial F^l{}_b}{\partial u^i} - \frac{\partial^2 F^l{}_a}{\partial v^b\, \partial u^k} + \frac{\partial^2 F^l{}_b}{\partial v^a\, \partial u^k}\right\}\xi^k.\end{aligned} \tag{13.5.19}$$

Мы уже отмечали, что наше предположение о существовании $M(M+1)/2$ независимых векторов Киллинга позволяет в любой данной точке найти векторы Киллинга, для которых ξ^k исчезают и $\xi_{k;\,j} = g_{kl}\partial \xi^l/\partial u^i$ является произвольной антисимметричной матрицей. В частности, можно в любой данной точке выбрать ξ^i так, чтобы выполнялось условие

$$\xi^k = 0,$$

$$\xi_{k;\,i} = g_{kl}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} = \delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im}.$$

Поэтому, умножая (13.4.19) на g_{kl} и полагая $k = n \neq m$, находим

$$F^j{}_a \frac{\partial F^m{}_b}{\partial u^j} - F^j{}_b \frac{\partial F^m{}_a}{\partial u^j} = \frac{\partial F^m{}_b}{\partial v^a} - \frac{\partial F^m{}_a}{\partial v^b},$$

что и является искомым соотношением (13.5.17). Коэффициент при ξ^i в (13.5.19) также должен равняться нулю, но здесь это не существенно.

Возвратимся теперь к главной линии нашего доказательства. Показав справедливость (13.5.17), мы теперь знаем, что (13.5.13) интегрируемо. Поэтому можно построить координаты u'^i и v'^a, определяемые (13.5.10) и (13.5.11), в которых компоненты метрики g_{ia} равны нулю. Выполнив это и опустив штрихи, запишем

$$g_{ia} = 0. \tag{13.5.20}$$

Условия для векторов Киллинга (13.5.6) и (13.5.7) теперь выглядят так:

$$0 = \frac{\partial \xi^k}{\partial v^a} g_{ik}, \tag{13.5.21}$$

$$0 = \xi^k \frac{\partial g_{ab}}{\partial u^k}. \tag{13.5.22}$$

Так как g_{ik} несингулярно, из условия (13.5.21) следует, что

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial v^a} = 0. \tag{13.5.23}$$

Мы отмечали также, что в каждой точке можно найти векторы Киллинга, для которых ξ_k принимают любые произвольные значения, а потому коэффициент при ξ^k в (13.5.22) должен равняться нулю:

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial u^k} = 0. \tag{13.5.24}$$

Теперь остается только показать, что $g_{ij}(u, v)$ не зависят от v или эта зависимость определяется множителем $f(v)$. Воспользуемся тем фактом, что для любого фиксированного v_0 имеется $M(M+1)/2$ независимых векторов Киллинга, соответствующих метрике $g_{ij}(u, v_0)$, которые, согласно (13.5.23), являются также векторами Киллинга для $g_{ij}(u, v)$ при любом v. Каждый из этих векторов Киллинга $\xi^i(u)$ будет тогда удовлетворять (13.5.5) для $v = v_0$ и при любом v:

$$0 = \frac{\partial \xi^k(u)}{\partial u^i} g_{kj}(u, v_0) + \frac{\partial \xi^k(u)}{\partial u^j} g_{ki}(u, v_0) + \xi^k(u) \frac{\partial g_{ij}(u, v_0)}{\partial u^k},$$

$$0 = \frac{\partial \xi^k(u)}{\partial u^i} g_{kj}(u, v) + \frac{\partial \xi^k(u)}{\partial u^j} g_{ki}(u, v) + \xi^k(u) \frac{\partial g_{ij}(u, v)}{\partial u^k}.$$

Можно интерпретировать эти два уравнения, сказав, что $g_{ij}(u, v)$ — максимально форминвариантный тензор [в смысле

формулы (13.4.3)] в максимально симметричном пространстве с метрикой $g_{ij}(u, v_0)$. Тогда из этого следует, согласно выражениям (13.4.10) и (13.4.11), что тензор $g_{ij}(u, v)$ пропорционален метрике $g_{ij}(u, v_0)$, причем коэффициент пропорциональности не зависит от u, т. е.

$$g_{ij}(u, v) = f(v, v_0)\, g_{ij}(u, v_0).$$

Значение v_0 может быть фиксировано произвольным образом, так что мы можем его вообще не писать:

$$g_{ij}(u\ \ v) = f(v)\, \tilde{g}_{ij}(u), \tag{13.5.25}$$

где

$$f(v) \equiv f(v, v_0), \quad \tilde{g}_{ij}(u) \equiv g_{ij}(u, v_0). \tag{13.5.26}$$

Собирая (13.5.20), (13.5.24) и (13.5.25), убеждаемся, что метрика $g_{\mu\nu}(u, v)$ действительно имеет форму, задаваемую (13.5.4), (13.5.26) и (13.5.5), где $v = v_0$ показывает, что $\tilde{g}_{ij}(u)$ — максимально симметричная метрика, как было доказано.

Эту теорему можно было бы также доказать при явно более слабом предположении, что все пространство разбивается на подпространства, изотропные в каждой точке. Это предположение означает, что в любой точке u_0, v можно найти векторы Киллинга всего пространства с $\xi^a = 0$, для которых ξ^i исчезают в точке u_0, v и для которых $\xi_{i;k}$ в точке u_0, v — это произвольная антисимметричная матрица. В частности, можно найти $M(M-1)/2$ векторов Киллинга $\xi^{(lm)}(u, v; u_0)$, причем

$$\xi^{a(lm)}(u, v; u_0) = 0$$
$$\xi^{i(lm)}(u, v; u_0) = -\xi^{i(ml)}(u, v; u_0),$$

для которых справедливо соотношение

$$\xi^{(lm)}_{i;j}(u_0, v; u_0) \equiv g_{ik}(u_0, v)\left(\frac{\partial \xi^{k(lm)}(u, v; u_0)}{\partial u^j}\right)_{u=u_0} = \delta_i{}^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l .$$

Можно затем ввести

$$\xi^{\mu(l)}(u, v; u_0) \equiv \frac{\partial}{\partial {u_0}^m}\, \xi^{\mu(lm)}(u, v; u_0),$$

и аргументы, приведенные в § 1 этой главы, указывают на то, что это векторы Киллинга *всего пространства*, причем

$$\xi^{a(l)}(u, v; u_0) = 0$$

а

$$\xi^{i(l)}(u_0, v; u_0) = -\frac{1}{(N-1)}\, \bar{g}^{il}(u_0, v).$$

Существование $M(M+1)/2$ независимых векторов Киллинга $\xi^{\mu(lm)}$ и $\xi^{\mu(l)}$ показывает, что пространство действительно обладает максимально симметричными подпространствами.

Во всех практически важных случаях максимально симметричные подпространства являются *пространствами*, которые в противоположность пространству-времени имеют положительные собственные значения подматрицы g_{ij}. В этом случае для того, чтобы вычислить $\tilde{g}_{ij}\,du^i\,du^j$, можно использовать (13.3.23), (13.3.24) или (13.3.25), что дает

$$-d\tau^2 = g_{ab}(v)\,dv^a\,dv^b + f(v)\left\{d\mathbf{u}^2 + \frac{k(\mathbf{u}\cdot d\mathbf{u})^2}{1-k\mathbf{u}^2}\right\}, \qquad (13.5.27)$$

где $f(v)$ положительно и

$$k = \begin{cases} +1, & \text{если } K>0, \\ -1, & \text{если } K<0, \\ 0, & \text{если } K=0, \end{cases} \qquad (13.5.28)$$

где K — скалярная кривизна максимально симметричного подпространства. [Ранее в (13.3.23) и (13.3.24) мы включили скалярную кривизну $|K|^{-1}$ в функцию $f(v)$.] Воспользуемся теперь полученным выражением для рассмотрения частных случаев, перечисленных в табл. 13.1.

А. Сферически-симметричное пространство. Предположим, что размерность пространства $N = 3$, что все собственные значения его метрики положительны и что оно имеет максимально симметричные двумерные подпространства положительной кривизны. Тогда имеется одна координата v, которую обозначим r, и две координаты u, которые определим через углы θ и φ следующим образом:

$$u^1 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad u^2 = \sin\theta\sin\varphi. \qquad (13.5.29)$$

Тогда при $k = 1$ выражение (13.5.27) принимает вид

$$ds^2 = g(r)\,dr^2 + f(r)\{d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\}, \qquad (13.5.30)$$

где $f(r)$ и $g(r)$ — положительные функции от r.

Б. Сферически-симметричное пространство-время. Предположим, что размерность всего пространства-времени $N = 4$, что три собственных значения его метрики положительны и одно отрицательно и что пространство-время обладает максимально симметричными двумерными подпространствами, метрики которых имеют положительные собственные значения и положительную кривизну. Тогда имеются две координаты v, которые можно назвать r и t, и две координаты u, которые можно заменить на θ

и φ, как в (13.5.29). Тогда при $k = 1$ выражение (13.5.27) принимает вид

$$-d\tau^2 = g_{tt}(r, t)\,dt^2 + 2g_{rt}(r, t)\,dr\,dt + \\ + g_{rr}(r, t)\,dr^2 + f(r, t)\{d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\}, \quad (13.5.31)$$

где $f(r, t)$ — положительная функция, а $g_{ij}(r, t)$ — матрица 2×2 с одним положительным и одним отрицательным собственными значениями.

В. Сферически-симметричное однородное пространство-время. Предположим, что размерность всего пространства-времени $N = 4$, что три собственных значения его метрики положительны, а одно отрицательно и что имеются максимально симметричные трехмерные подпространства, метрики которых имеют положительные собственные значения и произвольную кривизну. Тогда существует одна координата v и три координаты u, и (13.5.27) выглядит так:

$$-d\tau^2 = g(v)\,dv^2 + f(v)\left\{d\mathbf{u}^2 + \frac{k(\mathbf{u}\cdot d\mathbf{u})^2}{1 - k\mathbf{u}^2}\right\}.$$

Здесь $f(v)$ — положительная функция, а $g(v)$ — отрицательная функция от v. Очень удобно ввести новые координаты t, v, θ, φ с помощью соотношений:

$$\int (-g(v))^{1/2}\,dv \equiv t,$$
$$u^1 \equiv r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$u^2 \equiv r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$u^3 \equiv r\cos\theta.$$

Получаем

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2\right\}, \quad (13.5.32)$$

где $R(t) \equiv \sqrt{f(v)}$.

Первые два примера показывают, как можно отразить сущность сферической симметрии с помощью качественного описания пространства (или пространства-времени), задавая размерность, знаки собственных значений, кривизны и максимальную симметрию подпространства. Метрики (13.5.30) и (13.5.31) — как раз те, что мы ожидали бы получить на основании более элементарных соображений: (13.5.31) служило даже отправным пунктом в § 7 гл. 11.

Однако наш третий пример приводит к выводу, который было не столь легко предвидеть. Конечно, выражение (13.5.32) уже

было получено в § 9 гл. 11 как метрика внутри сферически-симметричной коллапсирующей звезды с однородной плотностью и нулевым давлением. Здесь мы, однако, увидели удивительно красивый путь получения метрики, исходя лишь из предположения об однородности и изотропности, т. е. без явного использования уравнений поля Эйнштейна

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Eisenhart L. P., Continuous Groups of Transformations, Dover Publ., 1961 (см. перевод: *Эйзенхарт Л. П.*, Непрерывные группы преобразований, ИЛ, 1947).

Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton University Press, 1926 (см. перевод: *Эйзенхарт Л. П.*, Риманова геометрия, ИЛ, 1949).

Helgason S., Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, 1962.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Killing W.*, J. f. d. reine u. angew. Math. (Crelle), 109, 121 (1892).
2. *de Sitter W.*, Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam), 19, 1217 (1917); 20, 229 (1917); 20, 1309 (1917); Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 78, 3 (1917).

Хотим мы знать, о да, хотим мы знать,
Каким же может оказаться этот мир.

В. Ш. Джилберт, Микадо

Глава 14
КОСМОГРАФИЯ

Современная наука началась тогда, когда открыли, что Земля не есть центр Вселенной. Антиантропоцентризм стал частью научного мышления, и никто не станет теперь считать всерьез, что Земля, или Солнечная система, или наша Галактика, или наша Местная Группа галактик занимают какое-то выделенное положение в космосе. Интуиция ведет нас скорее в направлении прямо противоположном. Большая часть современной космологической теории строится на космологическом принципе, т. е. на гипотезе о том, что все положения во Вселенной, по существу, эквивалентны. Однородность Вселенной, конечно, нужно представлять себе по аналогии с однородностью газа: нельзя говорить об однородности в малых частях; однородна лишь «размазанная» Вселенная, усредненная по ячейкам размером 10^8—10^9 световых лет, которые настолько велики, что вмещают много скоплений галактик. Вместе с тем мы видим, что Вселенная сферически-симметрична относительно нас, а это в рамках космологического принципа приводит к предположению об изотропности «размазанной» Вселенной в каждой точке.

Все же остается вопрос: была ли Вселенная сферически-симметричной и однородной во все моменты времени или же это просто временное явление на данной фазе ее развития? Есть интересное предположение (оно обсуждается в § 11 гл. 15) о том, что, возможно, Вселенная была крайне анизотропна в течение некоторой ранней плотной фазы, но с тех пор эта анизотропия сильно уменьшилась из-за вязкости нейтринного газа и из-за других диссипативных процессов. Однако даже в такого рода теориях Вселенная в высшей степени изотропна и однородна на протяжении всей той части ее истории, которая непосредственно доступна астрономическим наблюдениям.

В этой главе будет построена и использована математическая схема описания Вселенной, целиком основанная на космологическом принципе и на тех разделах общей теории относительности, которые следуют только из принципа эквивалентности (они изложены в гл. 2—6 и 13). Сначала будет показано, что космологический принцип позволяет полностью выразить метрику космоса через «радиус» $R(t)$ и константу k, принимающую три значения,

как в (13.5.32). Затем мы увидим, что астрономические наблюдения можно интерпретировать как измерения $R(t)$ и k.

Этот по сути кинематический подход, пионерами которого в 30-е годы были Робертсон [1] и Уокер [2], не полон в том смысле, что он не помогает в установлении *априорного* вида функции $R(t)$. Чтобы вычислить $R(t)$, нужно сделать какое-либо допущение о том, из чего состоит Вселенная, и затем получить метрику Робертсона — Уокера в качестве решения уравнений поля Эйнштейна, как это было сделано впервые А. Фридманом [3] в 1922 г. Обсуждение материального содержимого Вселенной и использование уравнений Эйнштейна мы отложим до следующей главы, посвященной космологии.

Почему нужно различать космографию и космологию? Причина в том, что мы не знаем уравнения состояния материи и излучения во Вселенной на протяжении всей ее истории, а если бы даже и знали, то не могли бы быть уверены, что и уравнения Эйнштейна действительно применимы для космологических времен и расстояний. Модификации уравнений поля или уравнения состояния, такие, как введение поля Бранса — Дикке, космологической постоянной или высокой концентрации нейтрино и гравитонов, могут повлиять на вид функции $R(t)$ и забраковать простейшее решение Фридмана, но при этом от нас не потребуется никаких изменений в той описательной схеме, которая изложена в этой главе.

Остается еще возможность, что Вселенная все же не однородна и не изотропна. Она могла бы быть однородной, но не изотропной, как в модели Геделя [4] [1]). Однако космическое микроволновое излучение, о котором говорится в гл. 15, в высшей степени изотропно (как показано в предыдущей главе, Вселенная не может быть изотропной в каждой точке, не будучи однородной). Более радикальная точка зрения состоит в том, что «сглаженной» Вселенной вообще не существует, а есть только скопления галактик, скопления скоплений, скопления скоплений скоплений и т. д., как в иерархической модели, предложенной Шарлье [6] в 1908 г. Вокулёром [7] были выдвинуты эмпирические аргументы в пользу таких сверхскоплений, но из работ Цвикки [8, 9], Эйбела [10] и Оорта [11] вытекает, что эта иерархия завершается скоплениями галактик или, самое большее, скоплениями скоплений галактик, и нет никаких данных, свидетельствующих о неоднородностях большего масштаба.

Все же мы следуем здесь космологическому принципу, но не потому, что считаем его безусловно верным, а скорее потому, что он позволяет использовать крайне скудные данные, предоставляемые

---

[1]) Общая классификация однородных анизотропных пространств дана в работе [5].

космологии наблюдательной астрономией. Если бы мы сделали более слабые допущения, как в анизотропной или иерархической моделях, то метрика содержала бы столько неопределенных функций (независимо от того, используются или нет уравнения поля), что эти наблюдательные данные оказались бы безнадежно недостаточными для определения метрики. Напротив, следуя ограничительной математической схеме, изложенной в этой главе, мы будем располагать реальной возможностью сопоставить теорию и наблюдение. Если данные наблюдений не уложатся в эту схему, мы сможем прийти к выводу, что неверен или космологический принцип, или принцип эквивалентности. Нет ничего, что могло бы быть интереснее.

§ 1. Космологический принцип

Космологический принцип есть гипотеза о том, что Вселенная пространственно однородна и изотропна. Прежде чем применять этот принцип, следует сформулировать в точных математических понятиях наши интуитивные представления об однородности и изотропии.

Во-первых, остановимся на какой-нибудь конкретной пространственно-временной координатной системе типа тех, которые могли бы быть использованы земными космографами. Пространственные координаты x^i можно выбрать так, чтобы начало $x^i = 0$ было в центре Млечного Пути, координатные оси были направлены вдоль луча зрения от Млечного Пути к каким-либо типичным удаленным галактикам, а шкала расстояний определялась видимой светимостью удаленных галактик или других подходящих объектов при наблюдении с Млечного Пути. При определении временной координаты удобно использовать в качестве часов саму развивающуюся Вселенную. Считается, что некоторые космические скалярные поля, такие, как плотность собственной энергии ρ или температура излучения черного тела T_γ (гл. 15), везде монотонно убывают со временем; выберем любое из них, скажем скаляр S, и пусть временем события будет значение любой заданной убывающей функции $t(S)$ этого скаляра *в месте* и в момент события. (Мы должны будем вернуться к вопросу об определении времени, когда станем рассматривать стационарную модель Вселенной в § 8 этой главы.) Определенные таким образом координаты x, t будем называть *эталонной космической координатной системой.*

Космологический принцип может быть сформулирован как утверждение о существовании эквивалентных координатных систем. Допустим, что мы пользуемся эталонной космической координатной системой при выполнении астрономических наблюдений, определяющих (не важно как!) метрический тензор $g_{\mu\nu}$,

тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ и другие космические поля как функции стандартных космических координат x^μ. Некоторый другой набор пространственно-временных координат x'^μ можно считать *эквивалентным* космическим эталонным координатам x^μ, если вся история Вселенной выглядит в координатной системе x'^μ так же, как и в эталонной космической системе.

Это означает, что зависимость от x'^μ любого космического поля $g'_{\mu\nu}(x')$, $T'_{\mu\nu}(x')$ и т. д. должна выражаться той же функцией, что и зависимость соответствующих величин $g_{\mu\nu}(x)$, $T_{\mu\nu}(x)$ и т. д. от стандартных координат x^μ, т. е. в каждой *координатной* точке y^μ мы должны иметь

$$g_{\mu\nu}(y) = g'_{\mu\nu}(y), \tag{14.1.1}$$

$$T_{\mu\nu}(y) = T'_{\mu\nu}(y) \quad \text{и т. д.} \tag{14.1.2}$$

На языке предыдущей главы, (14.1.1) означает, что координатное преобразование $x \to x'$ должно быть *изометрией*, а (14.1.2) означает, что $T_{\mu\nu}$ и т. п. должны быть *форминвариантными* при этих преобразованиях.

В частности, равенство (14.1.2) должно выполняться и для скаляра S, использованного для определения нашего эталонного космического времени t. Поскольку S (по определению) — функция только от t и скаляр, то (14.1.2) для S при $y = x'$ запишется в виде

$$S(t') = S'(x') \equiv S(x) = S(t),$$

и, таким образом,

$$t' = t. \tag{14.1.3}$$

Во всех системах координат, эквивалентных эталонной космической системе, с необходимостью используется эталонное космическое время.

Предположение о пространственной изотропии может быть сформулировано теперь как требование существования зависящего от трех независимых параметров θ^1, θ^2, θ^3 семейства координатных систем $x'^\mu(x; \theta)$, эквивалентных эталонной космической системе и имеющих общее начало, т. е.

$$x'^i(0, t; \theta) = 0. \tag{14.1.4}$$

Мы склонны воспринимать эти три параметра θ^n как углы Эйлера, определяющие ориентацию координатных осей x'^i относительно координатных осей x^i, но в такой определенности нет необходимости; важно лишь, чтобы было *три* независимых параметра. (При формулировании этого предположения мы неявно подразумеваем, что привилегированная лоренцева система отсчета, в которой Вселенная выглядит изотропной, случайно оказывается в какой-то мере совпадающей с нашей Галактикой.)

Несколько сложнее сформулировать предположение об однородности. Очевидно, однородность не означает, что любой объект можно выбрать в качестве начала: все-таки, для наблюдателя, удаляющегося от Млечного Пути со скоростью, равной половине скорости света, Вселенная выглядит иначе, чем для нас! Самое большее мы можем рассчитывать на то, что каждая точка в пространстве-времени лежит на некоторой «фундаментальной траектории» $x^i = X^i(t)$, которая может служить началом системы координат x'^μ, эквивалентной стандартной космической системе. (Это тесно связано с постулатом, называемым принципом Вейля, который используется в некоторых формулировках космологии.) Млечный Путь представляется довольно обычной галактикой, более или менее покоящейся относительно ближайших соседей, и поэтому можно ожидать, что фундаментальные траектории $\mathbf{X}(t)$ довольно хорошо определены движениями типичных составляющих космического газа галактик. Однако все это никак не является существенной частью предположения об однородности. Важно следующее: поскольку $\mathbf{X}(t)$ в каждый момент t заполняют все пространство, они задаются *тремя* независимыми параметрами a^i, за которые можно принять, например, значения $a^i \equiv \equiv X^i(t)$ функций $X^i(t)$ в некоторый заданный момент $t = T$. Таким образом, однородность означает, что имеется трехпараметрическое множество координат $\bar{x}'^\mu(x; a)$, которые эквивалентны стандартным космическим координатам x^μ и имеют началом траекторию $x^i = X^i(t; a)$, т. е.

$$\bar{x}'^i(\mathbf{X}(t; a), t; a) = 0. \tag{14.1.5}$$

Точнее, $\mathbf{X}(t; a)$ — это траектории привилегированных наблюдателей, для которых Вселенная выглядит изотропной.

Итак, мы видим, что космологический принцип приводит к двум независимым трехпараметрическим семействам координатных преобразований $x \to x'$, $x \to \bar{x}'$, которые являются изометриями в смысле равенства (14.1.1) и которые, согласно (14.1.3), оставляют временную координату инвариантной. Следовательно, Вселенная удовлетворяет требованиям, наложенным (§ 5 гл. 13) на четырехмерное пространство с максимально симметричным подпространством $t = \text{const}$.

Чтобы увидеть это в деталях, обратимся к случаю инфинитезимальных преобразований, полагая θ^i и a^i близкими нулю. Тогда имеются две тройки «векторов Киллинга» $\xi^\mu_j(x)$ и $\bar{\xi}^\mu_j(x)$:

$$\xi^i_j(x) \equiv \frac{\partial x'^i(x; \theta)}{\partial \theta^j}\bigg|_{\theta=0}, \quad \xi^t_j(x) \equiv 0, \tag{14.1.6}$$

$$\bar{\xi}^i_j(x) \equiv \frac{\partial \bar{x}'^i(x; a)}{\partial a^j}\bigg|_{a=0}, \quad \bar{\xi}^t_j(x) \equiv 0. \tag{14.1.7}$$

Нужно только показать, что эти шесть векторов независимы. Допустим, что они удовлетворяют линейному соотношению

$$\sum_j c^j(t)\,\xi^i_j(x) + \sum_j \bar{c}^j(t)\,\bar{\xi}^i_j(x) = 0. \tag{14.1.8}$$

Согласно уравнениям (14.1.4) и (14.1.5), имеем

$$\xi^i_j(0,\ t) = 0, \tag{14.1.9}$$

$$\bar{\xi}^i_j(0,\ t) = -\left.\frac{\partial X^i(t,\ a)}{\partial a^j}\right|_{a=0}, \tag{14.1.10}$$

так что при $x^i = 0$ соотношение (14.1.8) имеет вид

$$\sum_j \bar{c}^j(t)\left(\frac{\partial X^i(t,\ a)}{\partial a^j}\right)_{a=0} = 0.$$

Поскольку a^i — независимые параметры, отсюда следует, что

$$\bar{c}^j(t) = 0. \tag{14.1.11}$$

Вновь обращаясь к (14.1.8) и (14.1.6), получаем теперь

$$\sum_j c^j(t)\left(\frac{\partial x'^i(x;\ \theta)}{\partial \theta^j}\right)_{\theta=0} = 0,$$

и, так как θ^i — независимые параметры, отсюда следует, что

$$c^j(t) = 0. \tag{14.1.12}$$

Таким образом, имеется шесть независимых векторов Киллинга с $\xi^t = 0$, т. е. максимально возможное число (§ 1 гл. 13) при трех измерениях.

В заключение можно сформулировать космологический принцип на языке гл. 13 следующим образом:

1. Гиперповерхности постоянного стандартного космического времени суть максимально симметричные подпространства всего пространства-времени в целом.

2. Не только метрика $g_{\mu\nu}$, но и все космические тензоры, такие, как $T_{\mu\nu}$, форминвариантны относительно изометрий этих подпространств.

§ 2. Метрика Робертсона — Уокера

Формулировка космологического принципа, данная в предыдущем параграфе, позволяет нам применить результаты, полученные в § 5 гл. 13, для пространств с максимально симметричными подпространствами. Ясно сразу, что можно выбрать такие координаты r, θ, ϕ, t, что метрика запишется в виде

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2\right\}, \tag{14.2.1}$$

где $R(t)$ — неизвестная функция времени и k — постоянная, значения которой при подходящем выборе единиц для r равны $+1$, 0 или -1. [Эти координаты не обязательно совпадают со стандартными космическими координатами, введенными в предыдущем параграфе, хотя t в (14.2.1) есть эталонное космическое время или его функция.] Метрика (14.2.1) известна в космологии как *метрика Робертсона — Уокера*.

Интересно рассмотреть геометрические свойства трехмерных пространств постоянного t. Они имеют метрику

$$ {}^3g_{rr} = \frac{R^2(t)}{1-kr^2}, \quad {}^3g_{\theta\theta} = r^2R^2(t), \quad {}^3g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta R^2(t) \qquad (14.2.2) $$

и ${}^3g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Сравнение с (13.3.23) — (13.3.25) показывает, что *трехмерная* скалярная кривизна равна

$$ {}^3K(t) = kR^{-2}(t). \qquad (14.2.3) $$

Для $k = -1$ или $k = 0$ пространство бесконечно, тогда как для $k = +1$ оно конечно (хотя и не ограничено), и в этом случае наибольшая длина окружности в нем и его собственный объем определяются соответственно формулами (13.3.33) и (13.3.29):

$$ {}^3L = 2\pi R(t), \qquad (14.2.4) $$

$$ {}^3V = 2\pi^2R^3(t). \qquad (14.2.5) $$

Для $k = +1$ пространство Вселенной можно рассматривать как поверхность сферы радиусом $R(t)$ в четырехмерном евклидовом пространстве (§ 3 гл. 13), и есть все основания называть $R(t)$ «радиусом Вселенной». Для $k = -1$ и $k = 0$ никакой интерпретации такого рода дать нельзя, но $R(t)$ по-прежнему характеризует геометрические размеры пространства, так что $R(t)$ во всех случаях будет именоваться *космическим масштабным фактором*.

Координаты r, θ, ϕ, t в § 5 гл. 13 были построены так, чтобы координатные преобразования, оставляющие форминвариантной четырехмерную метрику (14.2.1), были чисто пространственными преобразованиями, оставляющими форминвариантной метрику (14.2.2). Они состоят из вращений координатной системы как твердого тела вокруг начала

$$ x'^i = R^i{}_j x^j \qquad (i, j = 1, 2, 3), \qquad (14.2.6) $$

где R — произвольная ортогональная матрица (и как обычно, $x^1 \equiv r\sin\theta\cos\phi$, $x^2 \equiv r\sin\theta\sin\phi$, $x^3 \equiv r\cos\theta$) и из «квазитрансляций», которые получаются после приравнивания матрицы KC в (13.3.17) единичной матрице, умноженной на k:

$$ \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}\left\{(1-k\mathbf{x}^2)^{1/2} - [1-(1-k\mathbf{a}^2)^{1/2}]\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\right)\right\}, \qquad (14.2.7) $$

где $\mathbf{a}$ — произвольный 3-вектор.

Преобразование (14.2.7) переносит начало в точку **a**. Поэтому можно сделать вывод, что любая *фиксированная* точка может служить началом координат, эквивалентных координатной системе, используемой в (14.2.1). Иначе говоря, равенство $\mathbf{X}(t;\ \mathrm{a}) = \mathbf{a}$ определяет «фундаментальные траектории» наблюдателей, для которых Вселенная выглядит так же, как для нас. В предыдущем параграфе уже отмечалось, что фундаментальные траектории должны быть близки к путям движения типичных галактик. Поэтому мы можем приближенно полагать, что пространственные координаты r, θ, ϕ образуют *сопутствующую систему* в том смысле, что *типичные галактики имеют постоянные пространственные координаты* r, θ, ϕ. Можно представить себе сопутствующую координатную сеть в виде линий, проведенных на поверхности воздушного шарика, а типичные галактики — в виде точек, нанесенных на нее. Когда шарик раздувается или сжимается, его точки движутся, но вместе с ними движутся и линии, так что каждая точка имеет те же самые координаты.

Важно отметить, что фундаментальные траектории $\mathbf{x} = \mathrm{const}$ являются геодезическими, поскольку в силу (14.2.1)

$$\Gamma^{\mu}_{tt} = 0. \tag{14.2.8}$$

Таким образом, утверждение, что галактика имеет постоянные r, θ, ϕ, вполне согласуется с предположением, что галактики находятся в свободном падении. Заметим также, что t в (14.2.1) — не только возможное эталонное космическое время, но оно также есть собственное время, показываемое покоящимися часами в каждой типичной свободно падающей галактике. Координаты x, t являются, таким образом, сопутствующими в точно том же смысле, что и «нормальные гауссовы» координаты, введенные в § 8 гл. 11.

Применение космологического принципа к тензорам, описывающим усредненное состояние космической материи, таким, как тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ и ток галактик J^{μ}_{G} [J^{μ}_{G} определяется точно так же, как электрический ток (5.2.13), только сумма берется по галактикам, а не по частицам и множитель e_n берется равным 1], помогает лучше понять поведение материи во вселенной Робертсона — Уокера. Требуется, чтобы все такие тензоры были форминвариантны [в смысле рассуждений § 4 гл. 13 и формулы (14.1.2)] относительно преобразований координат, таких, как (14.2.6), (14.2.7), которые оставляют форминвариантной метрику (14.2.1). Эти «изометрии», будучи чисто пространственными, преобразуют J^{t}_{G} и T^{tt} как 3-скаляры, J^{i}_{G} и T^{it} как 3-векторы, а T^{ij} как 3-тензор. Отсюда следует, согласно теоремам, доказанным в § 4 гл. 13, что

$$J_G{}^{t} = n_G(t), \qquad J_G{}^{i} = 0 \tag{14.2.9}$$

и

$$T_{tt} = \rho(t), \quad T_{it} = 0, \qquad T_{ij} = {}^3g_{ij}p(t), \tag{14.2.10}$$

где n_G, ρ и p — неизвестные величины, которые могут зависеть от t, но *не* от r, θ или ϕ. Эти результаты можно записать изящнее:

$$J_G{}^{\mu} = n_G U^{\mu}, \tag{14.2.11}$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\, U_{\mu}U_{\nu} + p g_{\mu\nu}, \tag{14.2.12}$$

где U_{μ} — «вектор 4-скорости»:

$$U^t \equiv 1, \tag{14.2.13}$$

$$U^i \equiv 0. \tag{14.2.14}$$

Из равенства (14.2.14) следует, что *содержимое Вселенной*, как и ожидалось, *в среднем покоится в системе* r, θ, ϕ. Кроме того, сравнение (14.2.12) с (5.4.2) показывает, что *тензор энергии-импульса Вселенной с необходимостью принимает форму такую же, как для идеальной жидкости.*

Полезно выписать сразу дифференциальные уравнения для $n_G(t)$, $\rho\,(t)$ и $p\,(t)$, вытекающие из законов сохранения. Если галактики не возникают и не распадаются, то J^{μ}_G подчиняются уравнению непрерывности (5.2.14):

$$0 = (J_G{}^{\mu})_{;\,\mu} = g^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(g^{1/2}J_G{}^{\mu}) = g^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t}(g^{1/2}n_G). \tag{14.2.15}$$

Детерминант метрики (14.2.1) равен $-g$, причем

$$g = R^6\,(t)\, r^4\,(1 - kr^2)^{-1}\sin^2\theta, \tag{14.2.16}$$

и, следовательно, сохранение числа галактик сводится к равенству

$$n_G(t)\, R^3\,(t) = \text{const}. \tag{14.2.17}$$

(Заметим, что n_G есть число галактик в единице собственного объема, которая увеличивается или уменьшается в зависимости от того, сжимается или расширяется Вселенная, в то время как $n_G R^3$ — число галактик в единице *координатного* объема и оно остается постоянной в сопутствующей системе координат.) Тензор энергии-импульса (14.2.12) подчиняется уравнению непрерывности (5.4.3):

$$0 = T^{\mu\nu}{}_{;\,\nu} = \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}}g^{\mu\nu} + g^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}[g^{1/2}(\rho + p)\, U^{\mu}U^{\nu}] + \\ + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}(\rho + p)\, U^{\nu}U^{\lambda}. \tag{14.2.18}$$

Используя (14.2.8) и (14.2.14), находим, что это уравнение тривиально удовлетворяется при $\mu = r$, θ, ϕ, а при $\mu = t$ имеет вид

$$R^3\,(t)\frac{dp\,(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\{R^3\,(t)\,[\rho\,(t) + p\,(t)]\}. \tag{14.2.19}$$

Например, если давление космической материи пренебрежимо мало, то (14.2.19) дает результат, аналогичный (14.2.17):

$$\rho\,(t)\,R^3\,(t) = \text{const}. \qquad (14.2.20)$$

Исключительное удобство сопутствующих координат не должно заслонять от нас того факта, что на самом деле типичные галактики удаляются друг от друга или сближаются при увеличении или уменьшении $R\,(t)$. Чтобы уяснить это, нужно более четко определить, что мы подразумеваем под расстоянием между галактиками. Представим себе цепочку галактик, расположенных близко друг к другу на луче зрения между нами и некоторой удаленной галактикой с координатами r_1, θ_1, ϕ_1, и предположим, что *в один и тот же момент t космического времени* наблюдатели на каждой галактике измеряют расстояние до соседней, скажем, измеряя время хода светового сигнала. (Заметьте, что это не то же самое, что измерение времени хода одного светового сигнала от $r = 0$ до $r = r_1$.) Сложение всех отдельных расстояний дает *собственное расстояние*:

$$d_{\text{соб}}\,(t) = \int_0^{r_1} \sqrt{g_{rr}}\,dr = R\,(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \qquad (14.2.21)$$

Очевидно, никто не собирается организовывать подобного рода космический заговор, а потому, с точки зрения наблюдательной космологии, нет необходимости иметь дело с понятием *собственное расстояние*. Однако мы увидим в § 4 этой главы, что более привычные способы измерения расстояний, основанные на видимых светимостях и угловых диаметрах при $r_1 \ll 1$, приближают нас к собственному расстоянию (14.2.21). Следовательно, в том или ином смысле галактики разбегаются, если $R\,(t)$ растет, или сближаются, если $R\,(t)$ уменьшается.

Космологическая теория выдвигает перед наблюдательной астрономией проблему измерения функции $R\,(t)$ и определения значения постоянной k — равна ли она $+1$, 0 или -1. Это не единственные данные, нужные космологии, но их получение является одной из центральных проблем, которые необходимо решить, если мы стремимся понять Вселенную. В оставшейся части главы говорится о том, в какой степени возможен ответ на этот вопрос.

§ 3. Красное смещение

Наиболее важную информацию о космическом масштабном факторе $R\,(t)$ мы получаем из наблюдения сдвигов частоты света, излучаемого удаленными источниками. Чтобы вычислить такие сдвиги частот, мы расположимся в начале ($r = 0$) координат (согласно космологическому принципу, это лишь вопрос удоб-

ства) и рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль направления $-r$, когда θ и ϕ фиксированы. Тогда уравнение движения заданного гребня волны имеет вид

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t)\frac{dr^2}{1-kr^2} = 0.$$

Отсюда, если волна покидает типичную галактику, расположенную в точке r_1, θ_1, ϕ_1, в момент t_1, то она достигает нас в момент t_0, определяемый равенством

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = f(r_1), \tag{14.3.1}$$

где

$$f(r_1) \equiv \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \begin{cases} \arcsin r_1, & k = +1, \\ r_1, & k = 0, \\ \operatorname{Ar\,sh} r_1, & k = -1. \end{cases} \tag{14.3.2}$$

В предыдущем параграфе было установлено, что типичные галактики имеют постоянные r_1, θ_1, ϕ_1 и поэтому $f(r_1)$ не зависит от времени. Следовательно, если следующий гребень волны покидает r_1 в момент $t_1 + \delta t_1$, он придет к нам в момент $t_0 + \delta t_0$, который снова определяется соотношением вида (14.3.1)

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = f(r_1). \tag{14.3.3}$$

Вычитая (14.3.1) из (14.3.3) и пользуясь тем, что $R(t)$ очень мало изменяется за время порядка 10^{-14} с (период типичного светового сигнала), получаем

$$\frac{\delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\delta t_1}{R(t_1)}.$$

Таким образом, наблюдаемая нами частота ν_0 связана с частотой в момент излучения ν_1 соотношением

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)}. \tag{14.3.4}$$

Эта связь выражается обычно через *параметр красного смещения* z, определяемый как относительное увеличение длины волны:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}. \tag{14.3.5}$$

Поскольку $\lambda_0/\lambda_1 = \nu_1/\nu_0$, из (14.3.4) следует, что

$$z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1. \tag{14.3.6}$$

Во избежание путаницы следует помнить, что ν_1 и λ_1 — это значения частоты и длины волны света, измеренные вблизи от излучателя сразу после излучения, и можно предполагать, что

они равны частоте и длине волны излучения при наблюдении тех же самых атомных переходов в земных лабораториях, тогда как ν_0 и λ_0 — частота и длина волны света, наблюдаемые в конце его длинного пути к нам. Если $z > 0$, то $\lambda_0 > \lambda_1$, и мы говорим о *красном* смещении; если $z < 0$, то $\lambda_0 < \lambda_1$, и тогда мы говорим о *фиолетовом* смещении.

Если Вселенная расширяется, то $R(t_0) > R(t_1)$ и, согласно (14.3.6), возникает красное смещение, тогда как при сжатии Вселенной $R(t_0) < R(t_1)$ и из (14.3.6) следует фиолетовое смещение. Эти сдвиги частоты естественно объясняются эффектом Доплера, обсуждаемым в § 2 гл. 2. Из (14.2.21) вытекает, что сравнительно близкие галактики движутся относительно Млечного Пути с радиальной скоростью

$$v_r \approx \dot{R}(t_0)\, r_1. \tag{14.3.7}$$

Из (14.3.6) и (14.3.1) при $r_1 \to 0$, $t_0 \to t_1$ получаем

$$z \to \frac{\dot{R}(t_0)(t_0 - t_1)}{R(t_0)} \to r_1 \dot{R}(t_0) \to v_r \tag{14.3.8}$$

в согласии с (2.2.2). Однако на частоту света влияет также и гравитационное поле Вселенной, и поэтому объяснение сдвигов частоты света очень далеких источников только релятивистским эффектом Доплера не является вполне строгим или достаточным. [Тем не менее следует иметь в виду, что астрономы обычно даже очень большие сдвиги частот выражают через скорость убегания, т. е. говорят о «красном смещении» в v км/с, подразумевая под этим, что $z = v/(3 \cdot 10^5)$.]

Первые данные о систематическом красном смещении спектральных линий были получены в результате наблюдений, выполненных В. Слайфером на 24-дюймовом рефракторе Лоуэллской обсерватории в период между 1910 г. и серединой 20-х годов. В 1922 г. Слайфер подытожил данные для сорока одной спиральной туманности [1]), причем тридцать шесть из них имели линии поглощения, сдвинутые в красную сторону на величины до $z \approx 0{,}006$, и только у пяти, самая большая из которых — туманность Андромеды, наблюдалось голубое смещение с $z \approx -0{,}001$.

С самого начала эти сдвиги частот объясняли эффектом Доплера, но при этом ожидали, что их можно приписать движению Солнечной системы, а не галактик. Преобладание красного смещения во всех частях неба делало это объяснение все более шатким, и к 1918 г. Виртц [13] выдвинул предположение о том, что в дополнение к указанному движению Солнца имеется еще общее разбегание спиральных туманностей (названное «K-член») во всех направлениях от нас. Конечно, возможны были и другие

[1]) См. таблицу в книге [12].

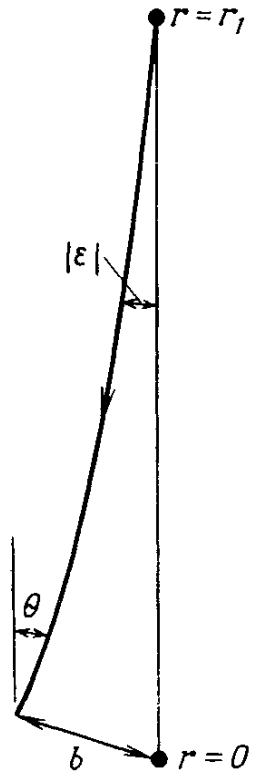
объяснения, как, например, гравитационное красное смещение, вызванное очень сильными локальными гравитационными полями. (Такое объяснение могло быть особенно привлекательным ввиду триумфа общей теории относительности во время экспедиции 1919 г. по наблюдению солнечного затмения.) Однако в серии статей, относящейся к 20-м годам, Виртц [13, 14] и К. Лундмарк [15] показали, что красное смещение Слайфера возрастает с ростом расстояния до спиральной туманности, а потому этот факт проще всего интерпретировать как разбегание удаленных галактик, причем более удаленными, естественно, являются те галактики, у которых скорость больше. Интерпретация красного смещения как космологического эффекта Доплера окончательно установилась в мнении большинства астрономов после сообщения Э. Хаббла [16] в 1929 г. о «приблизительном линейном соотношении между скоростями и расстояниями». Эта интерпретация пережила десятилетия и действует поныне.

Обсуждение этого вопроса нельзя продолжить, не уяснив сначала, как определяются космологические расстояния и как они связаны с координатным расстоянием r_1. Мы вернемся к красному смещению в § 6 этой главы.

§ 4. Измерения расстояний

В настоящее время есть только два (не считая измерений красного смещения) способа определения расстояний до объекта вне нашей Галактики. Когда известна абсолютная светимость[1]) объекта, мы можем сравнить ее с наблюдаемой видимой светимостью, или когда мы знаем истинный диаметр объекта, мы можем сравнить его с наблюдаемым угловым диаметром. Кроме того, расстояние до достаточно близкого объекта можно определить, измеряя его *параллакс*, т. е. изменение его видимого положения на небе вследствие вращения Земли вокруг Солнца, или измеряя его *собственное движение*, т. е. смещение его видимого положения вследствие реального движения относительно Солнца. Для объектов, расположенных ближе чем 10^9 световых лет, расстояния, измеряемые всеми четырьмя методами, совпадают, но при бóльших расстояниях они отличаются друг от друга и от «собственного расстояния», рассмотренного в § 2 этой главы. Таким образом, для того чтобы использовать корреляцию между красными смещениями и видимыми светимостями или угловыми диаметрами для измерения $R(t)$ и k, необходимо будет в первую очередь выразить расстояния, определенные в видимых светимостях или угловых диаметрах, через r_1 и t. Поучительно сделать то же самое и для

[1]) Термины «абсолютная светимость» (absolute luminosity) и «видимая светимость» (apparent luminosity) определены на стр. 448. Они не вполне отвечают принятым в астрономии. —*Прим. перев.*



Фиг. 14.1. Величины, используемые при вычислении параллаксов и видимых светимостей.
Углы и кривизна луча света сильно увеличены.

расстояний, определенных путем измерения параллакса или собственного движения.

Для вычисления параллаксов и видимых светимостей нужно знать уравнения, определяющие лучи света, исходящие из точки r_1, θ_1, ϕ_1, где расположен источник, и проходящие вблизи точки $r = 0$ (фиг. 14.1). В координатной системе x'^{μ}, начало которой совпадает с источником, луч определяется очень простым уравнением

$$\mathbf{x}'(\rho) = \mathbf{n}\rho, \qquad (14.4.1)$$

где $\mathbf{n}$ — *фиксированный* вектор, ρ — положительный переменный параметр, задающий точки вдоль луча ($\rho = 0$ на источнике), и $\mathbf{x}'$ есть 3-вектор, образованный из сопутствующих координат обычным способом:

$$\mathbf{x}' \equiv (r' \sin\theta' \cos\phi', r' \sin\theta' \sin\phi', r' \cos\theta').$$

Преобразование координат x'^{μ} к другой системе координат, в которой источник находится в точке $\mathbf{x}'$, получается заменой $\mathbf{a}$ на $\mathbf{x}_1$ и взаимной перестановкой $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ в (14.2.7):

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}_1 \left((1 - k\mathbf{x}'^2)^{1/2} - \{1 - (1 - k\mathbf{x}_1^2)^{1/2}\} \frac{(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}_1)}{\mathbf{x}_1^2} \right). \qquad (14.4.2)$$

Здесь мы снова используем векторное обозначение

$$\mathbf{x} \equiv (r \sin\theta \cos\phi,\ r \sin\theta \sin\phi,\ r \cos\theta),$$

а скалярное произведение определяем, как в евклидовой геометрии. Без потери общности можно взять в качестве $\mathbf{n}$ единичный вектор с $\mathbf{n}^2 = 1$. Тогда параметрическое уравнение для световых лучей, получающееся подстановкой (14.4.1) в (14.4.2), имеет вид

$$\mathbf{x}(\rho) = \mathbf{n}\rho + \mathbf{x}_1 \left[(1 - k\rho^2)^{1/2} - \{1 - (1 - kr_1^2)^{1/2}\} (n \cdot \mathbf{x}_1) \frac{\rho}{r_1^2} \right], \qquad (14.4.3)$$

где $r_1 \equiv (\mathbf{x}_1^2)^{1/2}$.

Теперь мы уточним, что начало системы координат x^{μ} находится в некоторой определенной точке Солнечной системы, такой, как центр Солнца или центр 200-дюймового зеркала на горе Паломар, и ограничимся рассмотрением лучей, проходящих вблизи начала координат. В этом случае единичный вектор $\mathbf{n}$ должен

смотреть почти в направлении оси $-\mathbf{x}_1$, т. е.

$$\mathbf{n} \approx -\hat{\mathbf{x}}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{14.4.4}$$

где $\hat{\mathbf{x}}_1$ — единичный вектор $\mathbf{x}_1/r_1$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — малый вектор, перпендикулярный $\mathbf{x}_1$. (Здесь и ниже $\approx$ означает, что уравнение справедливо до первого порядка по $\boldsymbol{\varepsilon}$.) Возвращаясь к уравнению (14.4.1), заметим на будущее, что $|\boldsymbol{\varepsilon}|$ — это угол между световой траекторией и направлением оси $-\mathbf{x}_1$, измеренный в координатной системе x'^{μ}, локально-инерциальной *в окрестности источника света*. Подстановкой (14.4.4) в (14.4.3) и отбрасыванием членов порядка $\boldsymbol{\varepsilon}^2$ получим уравнение луча

$$\mathbf{x}(\rho) \approx -\hat{\mathbf{x}}_1 [\rho (1 - kr_1^2)^{1/2} - r_1 (1 - k\rho^2)^{1/2}] + \boldsymbol{\varepsilon}\rho. \tag{14.4.5}$$

Лучи подходят ближе всего к началу координат при $\rho \approx r_1$. Собственное расстояние от начала до этой точки есть *прицельный параметр* b. Согласно (14.2.1) и (14.4.5),

$$b \approx R(t_0)\,|\,\mathbf{x}(r_1)\,| \approx R(t_0)\, r_1\,|\,\boldsymbol{\varepsilon}\,|, \tag{14.4.6}$$

где t_0 — время в момент прохождения луча мимо начала координат.

Измерения астрономических параллаксов сводятся к измерениям направления световых лучей как функций прицельного параметра, который в нашем случае равен проекции отрезка Земля — Солнце на плоскость, нормальную к лучу зрения. Для направления светового луча вблизи начала координат имеем

$$\frac{d\mathbf{x}(\rho)}{d\rho}\bigg|_{\rho=r_1} \approx \boldsymbol{\varepsilon} - (1 - kr_1^2)^{-1/2}\hat{\mathbf{x}}_1,$$

поэтому луч зрения определяется единичным вектором в противоположном направлении:

$$\hat{\mathbf{u}} \approx -(1 - kr_1^2)^{1/2}\frac{d\mathbf{x}(\rho)}{d\rho}\bigg|_{\rho=r_1} = \hat{\mathbf{x}}_1 - (1 - kr_1^2)^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{14.4.7}$$

Следовательно, угол между фактическим лучом зрения и координатной линией $\hat{\mathbf{x}}_1$, которая была бы лучом зрения при наблюдении из начала координат, равен

$$\theta \approx |\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{x}}_1| \approx (1 - kr_1^2)^{1/2}\,|\,\boldsymbol{\varepsilon}\,| \approx (1 - kr_1^2)^{1/2}\frac{b}{R(t_0)\, r_1}. \tag{14.4.8}$$

В евклидовой геометрии источник, находящийся на расстоянии d, имел бы параллактический угол $\theta \approx b/d$, так что в общем случае можно ввести *параллактическое расстояние* $d_{\text{п}}$ до источника света как величину, равную

$$d_{\text{п}} \equiv \frac{b}{\theta} \quad \text{при} \quad \theta \to 0, \quad b \to 0, \tag{14.4.9}$$

и затем переписать (14.4.8) в виде

$$d_{\text{п}} = R(t_0)\frac{r_1}{(1-kr_1^2)^{1/2}}. \qquad (14.4.10)$$

Во вселенной с $k = +1$ параллактическое расстояние до объектов с $r_1 = 1$ бесконечно, а параллактические расстояния до более далеких объектов ($r_1 < 1$) уменьшаются; это впервые было отмечено К. Шварцшильдом [17] в 1900 г.

Для вычисления видимых светимостей представим себе круглое зеркало телескопа радиусом b, центр которого совпадает с началом координат, а его нормаль направлена вдоль луча зрения $\hat{\mathbf{x}}_1$ к источнику света. Лучи, падающие на поверхность зеркала, образуют конус с источником в вершине. Этот конус в локально-инерциальной для источника системе координат x'^{μ} имеет угол $2|\boldsymbol{\varepsilon}|$ при вершине, причем $\boldsymbol{\varepsilon}$ определяется формулой (14.4.6). Телесный угол этого конуса равен

$$\pi|\boldsymbol{\varepsilon}|^2 = \frac{\pi b^2}{R^2(t_0)\,r_1^2},$$

и доля всех изотропно излученных фотонов, попадающих на зеркало, есть отношение этого телесного угла к 4π или

$$\frac{|\boldsymbol{\varepsilon}|^2}{4} = \frac{A}{4\pi R^2(t_0)\,r_1^2}, \qquad (14.4.11)$$

где A — собственная площадь зеркала $A \equiv \pi b^2$. Однако каждый фотон, имевший при излучении энергию $h\nu_1$, претерпит красное смещение до энергии $h\nu_1 R(t_1)/R(t_0)$, а фотоны, излученные за промежуток времени δt_1, будут «прибывать» на поверхность зеркала в течение времени $\delta t_1 R(t_0)/R(t_1)$, где, как обычно, t_1 — момент времени, когда свет покидает источник, а t_0 — момент, в который он доходит до зеркала. Таким образом, полная мощность P, попадающая на зеркало, равна полной мощности излучения источника, которая по определению есть его *абсолютная светимость* L, умноженной на $R^2(t_1)/R^2(t_0)$ и на отношение (14.4.11):

$$P = L\left(\frac{R^2(t_1)}{R^2(t_0)}\right)\left(\frac{A}{4\pi R^2(t_0)\,r_1^2}\right).$$

Видимая светимость l есть мощность, приходящаяся на единицу площади зеркала, т. е.

$$l \equiv \frac{P}{A} = \frac{LR^2(t_1)}{4\pi R^4(t_0)\,r_1^2}. \qquad (14.4.12)$$

В евклидовом пространстве видимая светимость покоящегося источника, находящегося на расстоянии d, была бы равна $L/4\pi d^2$, так что в общем случае мы можем определить *фотометрическое расстояние* d_{Φ} до источника света как

$$d_{\Phi} \equiv \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2}, \qquad (14.4.13)$$

и тогда (14.4.12) можно записать в виде

$$d_{\Phi} = R^2(t_0)\frac{r_1}{R(t_1)}. \qquad (14.4.14)$$

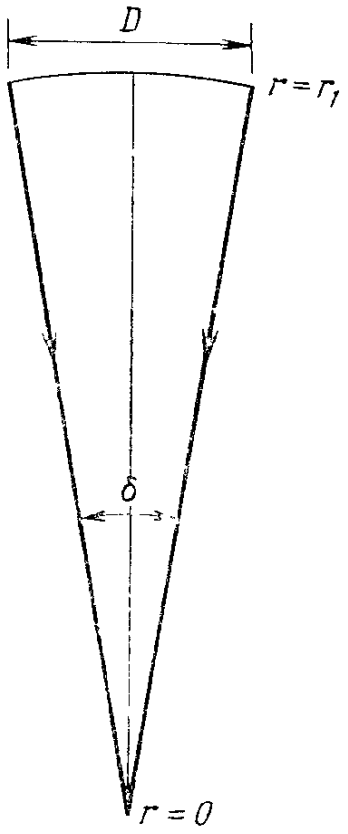
(Это вычисление можно было бы проделать и не прибегая к квантовым представлениям, а пользуясь уравнением сохранения $(T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0$ для излучения [18].)

Вычислим теперь угловой диаметр источника при наблюдении его из начала ($r = 0$) в момент $t = t_0$; сам источник имеет истинный собственный диаметр D, находится в точке $r = r_1$ и излучает в момент $t = t_1$. Лучи света с краев источника распространяются вдоль фиксированных направлений $\mathbf{x}/r$. Не теряя общности, можно повернуть координатную систему так, чтобы для центра источника было $\theta = 0$. Предположим, что лучи света с краев источника образуют в начале координат конус с углом между осью и образующей $\theta = \delta/2$ (фиг. 14.2). Собственный поперечник источника определяется тогда, согласно (14.2.1),

$$D = R(t_1)\, r_1 \delta \quad \text{при} \quad \delta \ll 1,$$

т. е. угловой диаметр источника равен

$$\delta = \frac{D}{R(t_1)\, r_1}. \qquad (14.4.15)$$



Фиг. 14.2. Величины, используемые при вычислении угловых диаметров и собственных движений.
Угол δ сильно увеличен.

В евклидовой геометрии источник диаметром D, находящийся на расстоянии d, имеет угловой диаметр $\delta = D/d$, так что в общем случае мы можем ввести *расстояние по угловому диаметру* $d_{\text{угл}}$ до источника как

$$d_{\text{угл}} \equiv \frac{D}{\delta} \qquad (14.4.16)$$

и переписать (14.4.15) в виде

$$d_{\text{угл}} = R(t_1)\, r_1. \qquad (14.4.17)$$

Отметим, что $R(t_1)$ убывает с ростом r_1, поэтому в некоторых моделях $d_{\text{угл}}$ может иметь максимум, и тогда объекты, находящиеся на очень большом удалении, будут иметь угловые диаметры, *возрастающие* с ростом фотометрического расстояния.

Рассмотрим, наконец, определение расстояния по собственному движению. Источник с истинной, поперечной к лучу зрения скоростью $V_{\perp}$ пройдет за время Δt_0 собственное расстояние

$$\Delta D = V_{\perp}\Delta t_1 = V_{\perp}\Delta t_0 \frac{R(t_1)}{R(t_0)}.$$

Отсюда, используя те же соображения, которые привели нас к (14.4.15), получаем для углового расстояния, пройденного источником,

$$\Delta\delta = \frac{\Delta D}{R(t_1)\, r_1} = \frac{V_\perp \Delta t_0}{R(t_0)\, r_1}. \qquad (14.4.18)$$

В евклидовом пространстве изменение углового положения на небосводе источника, удаленного на расстояние d, было бы равно $V_\perp \Delta t_0/d$. Соответственно мы можем ввести *расстояние по собственному движению* до источника света как

$$d_{\text{дв}} \equiv \frac{V_\perp}{\mu}, \qquad (14.4.19)$$

где μ — *собственное движение*:

$$\mu \equiv \frac{\Delta\delta}{\Delta t_0}. \qquad (14.4.20)$$

Тогда (14.4.18) можно представить в виде

$$d_{\text{дв}} = R(t_0)\, r_1. \qquad (14.4.21)$$

Разумеется, использовать формулу (14.4.19) для измерения расстояния по собственной скорости мы сможем лишь при условии, что нам известна *априори* поперечная скорость. К этому обстоятельству мы вернемся в следующем параграфе.

Фотометрическое расстояние $d_{\text{ф}}$, расстояние по угловому диаметру $d_{\text{угл}}$ и расстояние по собственному движению $d_{\text{дв}}$ для источника света с красным смещением z связаны между собой простыми соотношениями

$$\frac{d_{\text{угл}}}{d_{\text{ф}}} = \frac{R^2(t_1)}{R^2(t_0)} = (1+z)^{-2}, \qquad (14.4.22)$$

$$\frac{d_{\text{дв}}}{d_{\text{ф}}} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} = (1+z)^{-1}. \qquad (14.4.23)$$

Если есть возможность измерить z достаточно точно, то пытаться измерять $d_{\text{ф}}$, $d_{\text{угл}}$ и $d_{\text{дв}}$ по отдельности имеет смысл разве лишь для того, чтобы убедиться в космологическом происхождении красного смещения и в том, что Вселенная имеет метрику Робертсона — Уокера. Наоборот, измерение параллактического расстояния $d_{\text{п}}$ могло бы в принципе дать дополнительную информацию по сравнению с той, которую можно извлечь из измерения $d_{\text{ф}}$ и z, но в настоящее время измерение параллаксов реально лишь для очень близких объектов с $z \ll 1$ и $r_1 \ll 1$. В этом случае результаты измерений всеми указанными способами, по существу, совпадают друг с другом и с собственным расстоянием (14.2.21):

$$d_{\text{угл}} \approx d_{\text{ф}} \approx d_{\text{дв}} \approx d_{\text{п}} \approx d_{\text{соб}}(t_0) \approx R(t_0)\, r_1. \qquad (14.4.24)$$

Различия между ними становятся значительными лишь для объектов, удаленных на миллиарды световых лет.

На самом деле измерения красного смещения, расстояния по угловому диаметру и фотометрического расстояния неразрывно связаны друг с другом по крайней мере по двум причинам.

А. Такие источники света, как галактики, имеют плавное распределение светимости без резкой границы. Пусть $L(D)$ — абсолютная светимость той части источника света, которая находится в круге диаметром D (в плоскости, перпендикулярной лучу зрения). Тогда видимая светимость внутри углового диаметра δ определяется формулами (14.4.12) и (14.4.15) как

$$l(\delta) = \frac{L(r_1 R(t_1)\,\delta)\,R^2(t_1)}{4\pi R^4(t_0)\,r_1^2}. \tag{14.4.25}$$

Удобнее записать эту формулу через абсолютную светимость на единицу площади поперечного сечения:

$$B(D) \equiv \frac{L'(D)}{2\pi D} \tag{14.4.26}$$

и видимую светимость в единице телесного угла:

$$b(\delta) \equiv \frac{l'(\delta)}{2\pi\delta}. \tag{14.4.27}$$

Подставляя (14.4.26), (14.4.27) и (14.3.6) в (14.4.25), получаем:

$$b(\delta) = \frac{B(r_1 R(t_1)\,\delta)}{4\pi(1+z)^4}. \tag{14.4.28}$$

Угол δ_b, в котором $b(\delta)$ падает до некоторого фиксированного порогового значения b, есть *изофотальный угловой диаметр*

$$\delta_b \equiv \frac{D_b}{r_1 R(t_1)}; \tag{14.4.29}$$

величина D_b определена неявно уравнением

$$B(D_b) \equiv 4\pi b\,(1+z)^4. \tag{14.4.30}$$

Хаббл, например, полагал [19], что для большинства галактик $B(D)$ достаточно хорошо представляется функцией, которая вблизи края галактики приближенно имеет вид

$$B(D) \approx \frac{\alpha L}{D^2}, \tag{14.4.31}$$

где α — безразмерная постоянная порядка единицы. Тогда из (14.4.29) — (14.4.31) и (14.4.12) следует

$$D_b \approx \left(\frac{\alpha L}{4\pi b\,(1+z)^4}\right)^{1/2}, \tag{14.4.32}$$

$$\delta_b \approx \left(\frac{\alpha l}{b}\right)^{1/2}. \tag{14.4.33}$$

В этом частном случае измерение изофотального углового диаметра равносильно измерению видимой светимости.

Б. Большинство детекторов излучения регистрируют фотоны лишь в узкой полосе частот. Поэтому необходимо различать рассмотренные выше *болометрические светимости* L и l, в которых учитывается мощность, излученная источником или принятая приемником на всех частотах, и *ультрафиолетовые*, *голубые*, *фотографические*, *визуальные*, *инфракрасные* светимости, которые соответствуют средней мощности или потоку в различных диапазонах частот. Если мощность излучения источника на всех частотах, меньших ν_1, равна $L(\nu_1)$, то формулы (14.4.12) и (14.3.4) дают видимую светимость на всех частотах, меньших ν_0:

$$l(\nu_0) = \frac{L[\nu_0 R(t_0)/R(t_1)]\, R^2(t_1)}{4\pi R^4(t_0)\, r_1^2}. \qquad (14.4.34)$$

Отсюда распределения частот принятой и излученной мощности связаны равенством

$$l'(\nu_0) = \frac{L'[\nu_0 R(t_0)/R(t_1)]\, R(t_1)}{4\pi R^3(t_0)\, r_1^2}. \qquad (14.4.35)$$

Для черного тела $L'(\nu)$ задается формулой Планка:

$$L'(\nu) = \frac{15L}{\pi^4 \nu}\left(\frac{h\nu}{kT_1}\right)^4\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT_1}\right) - 1\right)^{-1}, \qquad (14.4.36)$$

где T_1 — температура источника, k — постоянная Больцмана и h — постоянная Планка. Тогда распределение частот принятого излучения равно

$$l'(\nu_0) = \frac{15l}{\pi^4 \nu_0}\left(\frac{h\nu_0}{kT_0}\right)^4\left[\exp\left(\frac{h\nu_0}{kT_0}\right) - 1\right]^{-1}, \qquad (14.4.37)$$

где l — определено формулой (14.4.12) и T_0 — температура с учетом красного смещения:

$$T_0 = T_1 \frac{R(t_1)}{R(t_0)}. \qquad (14.4.38)$$

Если известны температуры T_1 или T_0, то по абсолютной светимости $L'(\nu_1)\,\Delta\nu_1$ или по видимой светимости $l(\nu_0)\,\Delta\nu_0$ в узкой полосе частот легко устанавливаются болометрические абсолютная или видимая светимости.

Следует упомянуть об освященном временем языке, используемом астрономами для описания астрономических расстояний и светимостей. Астрономическая единица (сокращенно а. е.) есть среднее расстояние от Солнца до Земли:

$$1 \text{ а. е.} = 1{,}49598 \cdot 10^8 \text{ км}. \qquad (14.4.39)$$

Будем считать орбиту Земли круговой. Тогда проекция вектора Земля — Солнце на плоскость, нормальную к лучу зрения на какую-

либо определенную звезду, раз в году достигает максимального значения $b_{\text{макс}}$, равного 1 а. е. Таким образом, положение звезды на небе описывает эллипс с максимальным радиусом π, определяемым равенством (14.4.9)

$$\pi \text{ (в радианах)} = \frac{1}{d_{\text{п}}} \text{ (а. е.)}^{-1}. \qquad (14.4.40)$$

Будем называть π *тригонометрическим параллаксом*. Один *парсек* (сокращенно пс) определяется как расстояние $d_{\text{п}}$, на котором звезда имела бы тригонометрический параллакс, равный 1″; поскольку в одном радиане 206 264,8 угловой секунды, то

$$1 \text{ пс} = 206\,264{,}8 \text{ а. е.} = 3{,}0856 \cdot 10^{13} \text{ км} = 3{,}2615 \text{ световых лет}. \qquad (14.4.41)$$

Таким образом, (14.4.40), можно записать в виде

$$\pi \text{ (в угловых секундах)} = \frac{1}{d_{\text{п}}} \text{ (пс)}^{-1}. \qquad (14.4.42)$$

Параллаксы измерены только для ближайших к нам звезд, но в силу традиции все астрономические расстояния за пределами Солнечной системы принято давать в парсеках, а иногда эти расстояния, каким бы способом они ни были измерены, выражают все же в эквивалентных параллаксах.

Видимая болометрическая светимость l обычно выражается в видимых болометрических звездных величинах $m_{\text{бол}}$ или просто m, которые по историческим причинам определяются так, что

$$l = 10^{-2m/5} \cdot 2{,}52 \cdot 10^{-5} \text{ эрг/(см}^2 \cdot \text{с)}. \qquad (14.4.43)$$

Абсолютная болометрическая звездная величина M определяется как видимая болометрическая величина, которую имел бы источник, удаленный на расстояние 10 пс, т. е.

$$L = 10^{-2M/5} \cdot 3{,}02 \cdot 10^{35} \text{ эрг/с}. \qquad (14.4.44)$$

Определение (14.4.13) можно записать в виде формулы, выражающей $d_{\text{ф}}$ через *модуль расстояния* $m - M$:

$$d_{\text{ф}} = 10^{1+(m-M)/5} \text{ пс}. \qquad (14.4.45)$$

Видимые звездные величины m_U, m_B и т. д. в ультрафиолетовой, голубой, фотографической, визуальной и инфракрасной областях длин волн связаны с соответствующими видимыми светимостями формулами, аналогичными (14.4.43), но с различными нормировочными постоянными, которые выбраны так, чтобы все эти видимые величины были равны между собой для звезд спектрального класса А0 от пятой до шестой величины. Соответствующие абсолютные звездные величины определяются так, чтобы все модули

расстояний $m_U - M_U$, $m_B - M_B$ и т. д. были равны $m - M$. (Ультрафиолетовая, голубая и визуальная видимые звездные величины m_U, m_B, m_V часто обозначаются U, B, V.) Число $m_B - m_V = M_B - M_V$ называется *показателем цвета*; звезды с отрицательным показателем цвета более голубые, чем звезды с положительным показателем цвета. Для сравнения приведем абсолютные звездные величины Солнца:
M (болометрическая) $= +4{,}72$, $M_U = 5{,}51$, $M_B = 5{,}41$, $M_V = 4{,}79$
и его видимые звездные величины:
m (болометрическая) $= -26{,}85$, $m_U = -26{,}06$, $m_B = -26{,}16$,
$m_V = 26{,}78$.

Следовательно, для Солнца модуль расстояния равен $-31{,}57$, а показатель цвета равен $0{,}62$.

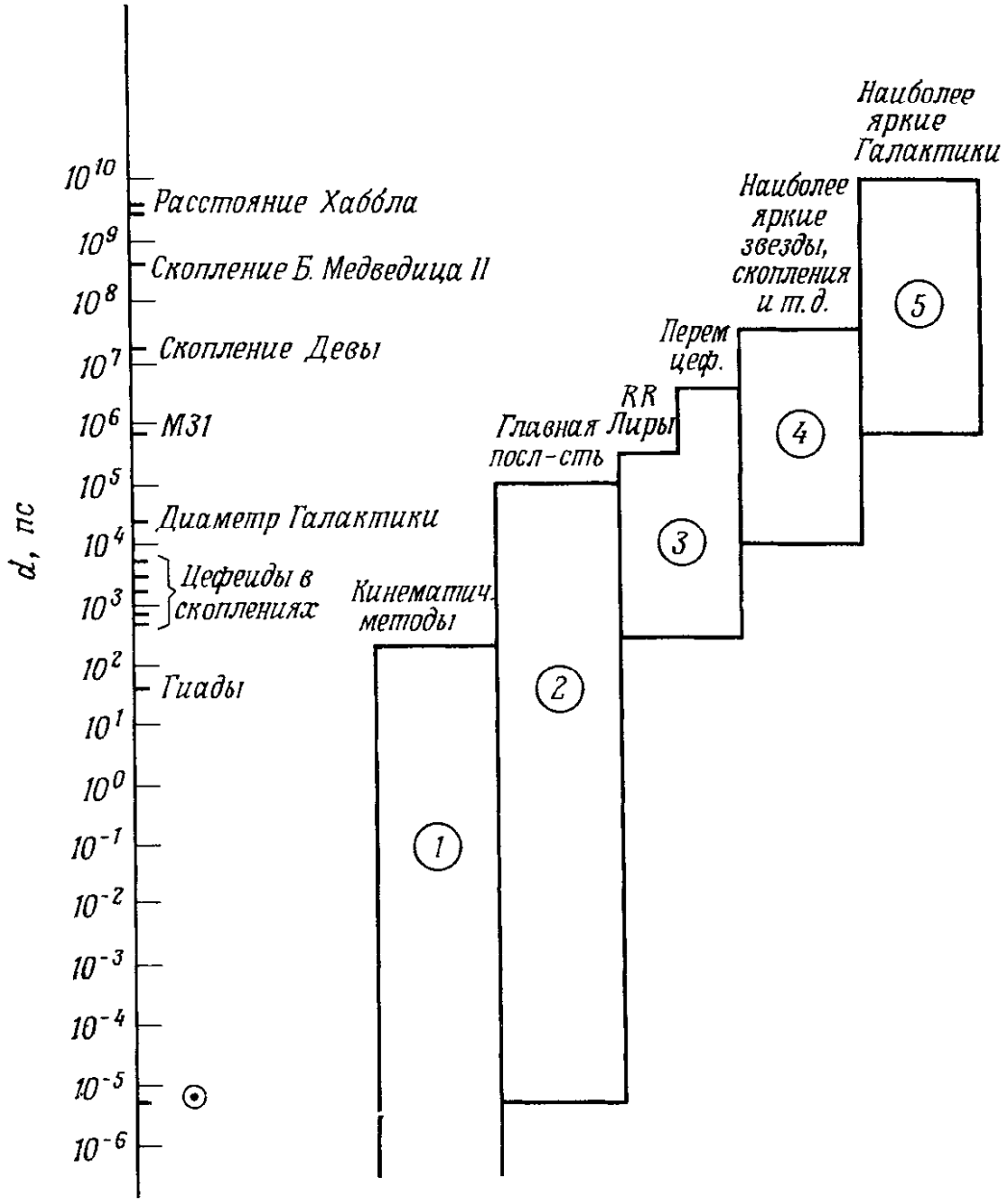
§ 5. Лестница космических расстояний

Если известна абсолютная светимость L источника света, то мы можем определить фотометрическое расстояние до него d_Φ, измеряя его видимую светимость l и пользуясь формулой (14.4.13). Трудность заключается в определении L. К настоящему времени образовалась лестница расстояний, состоящая из пяти четких ступеней, различающихся по способу определения расстояния, причем космологически интересные расстояния находятся на самом ее верху (фиг. 14.3).

Кинематические методы

Расстояния до некоторых ближайших звезд могут быть измерены методами, не требующими предварительного знания абсолютной светимости. К числу таких звезд относится Солнце. Расстояние до него (астрономическая единица) впервые было измерено с приемлемой точностью в 1672 г. Ж. Ришаром и Д. Кассини. Они определили расстояние до Марса, а по нему — расстояние до Солнца, измеряя разность направлений на Марс при наблюдении из Парижа и Кайенны, отстоящих друг от друга на 6000 миль. Конечно, за последующие три столетия точность численного значения астрономической единицы сильно возросла; в самое последнее время для увеличения точности была использована радиолокация.

Есть несколько тысяч достаточно близких к нам звезд, расстояния до которых могут быть определены из смещения их видимого положения, вызванного обращением Земли вокруг Солнца. Выше было дано определение тригонометрического параллакса звезды π как максимального углового радиуса эллипса, который описывает звезда в процессе видимого годичного движения по небосводу; расстояние до звезды равно $1/\pi$ парсек, если π выраже-



Фиг. 14.3. Лестница космических расстояний.

Расположение и высота вертикальной полосы примерно соответствуют диапазону расстояний, для измерения которых может быть использован данный класс индикаторов расстояния.

но в угловых секундах. (Прилагательное «тригонометрический» используется здесь ввиду того, что астрономы имеют обыкновение выражать расстояния до звезд в параллаксах независимо от способа измерения, так что можно встретить фотометрический параллакс, параллакс по движению скопления и т. д.) Расстояние до звезды впервые измерил этим способом Ф. В. Бессель: в 1838 г. он определил тригонометрический параллакс звезды 61 Лебедя (приблизительно 0,3″) и нашел, что расстояние до нее около 3 пс. (Т. Гендерсон измерил тригонометрический параллакс α Центавра в 1832 г., но его вычисления не были опубликованы до 1838 г.) Вообще

говоря, определить расстояние до звезды по тригонометрическому параллаксу можно, только когда π больше чем 0,03″, т. е. если звезда ближе 30 пс.

В последние годы появилась возможность измерять расстояния до некоторых соседних звездных скоплений методом, основанным в большей степени на знании скорости света, чем на знании астрономической единицы. Эти *движущиеся скопления* состоят из звезд, собственные движения которых по небосводу кажутся нам направленными в одну точку; это означает, что на самом деле эти звезды движутся сквозь Галактику с равными скоростями и параллельно друг другу. Их радиальные скорости v_r можно определить из допплеровского сдвига $\Delta\nu/\nu$ в спектрах (зная скорость света), а поперечные к лучу зрения компоненты скоростей можно представить как произведение расстояния до скопления на скорость собственного движения (в радианах за единицу времени) звезды по небу [формула (14.4.19)]. Таким образом, наблюдения допплеровского сдвига и собственного движения дают нам полную кинематическую модель скопления с единственной неизвестной величиной — расстоянием. Расстояние можно теперь определить, вводя в эту модель условие, что все звезды движутся с равными и параллельными скоростями. Наиболее хорошо изученное движущееся скопление — Гиады; оно содержит около 100 звезд в радиусе около 5 пс. Расстояние до него, измеренное описанным «методом движущегося скопления», равно около 40,8 пс.

Иногда статистический анализ собственных движений и радиальных скоростей позволяет оценить расстояния до звезд, которые и не так близки, чтобы можно было измерить их тригонометрические параллаксы, и не принадлежат движущимся скоплениям. Допустим, что мы знаем *относительные* расстояния в некоторой выборке звезд, т. е. что нам известны отношения d/d_0, где d_0 — некоторый неизвестный масштаб расстояния. [Так обстояло бы дело, например, если бы мы знали, что все звезды этой выборки имеют *одинаковые*, хотя и неизвестные абсолютные светимости L, поскольку тогда из видимых светимостей l по формуле $d = (L/4\pi l)^{1/2}$ мы получили бы относительные расстояния. Даже если разные звезды выборки имеют разные абсолютные светимости, измерение видимых светимостей все же даст относительные расстояния, если мы знаем отношения их абсолютных звездных величин.] Поперечная скорость связана с радиальной равенством

$$v_\perp = v_r \operatorname{tg} \phi,$$

где ϕ — неизвестный угол между скоростью звезды и лучом зрения. Поэтому (14.4.19) можно записать в виде

$$\frac{\mu}{v_r}\frac{d}{d_0} = \frac{\operatorname{tg}\phi}{d_0}.$$

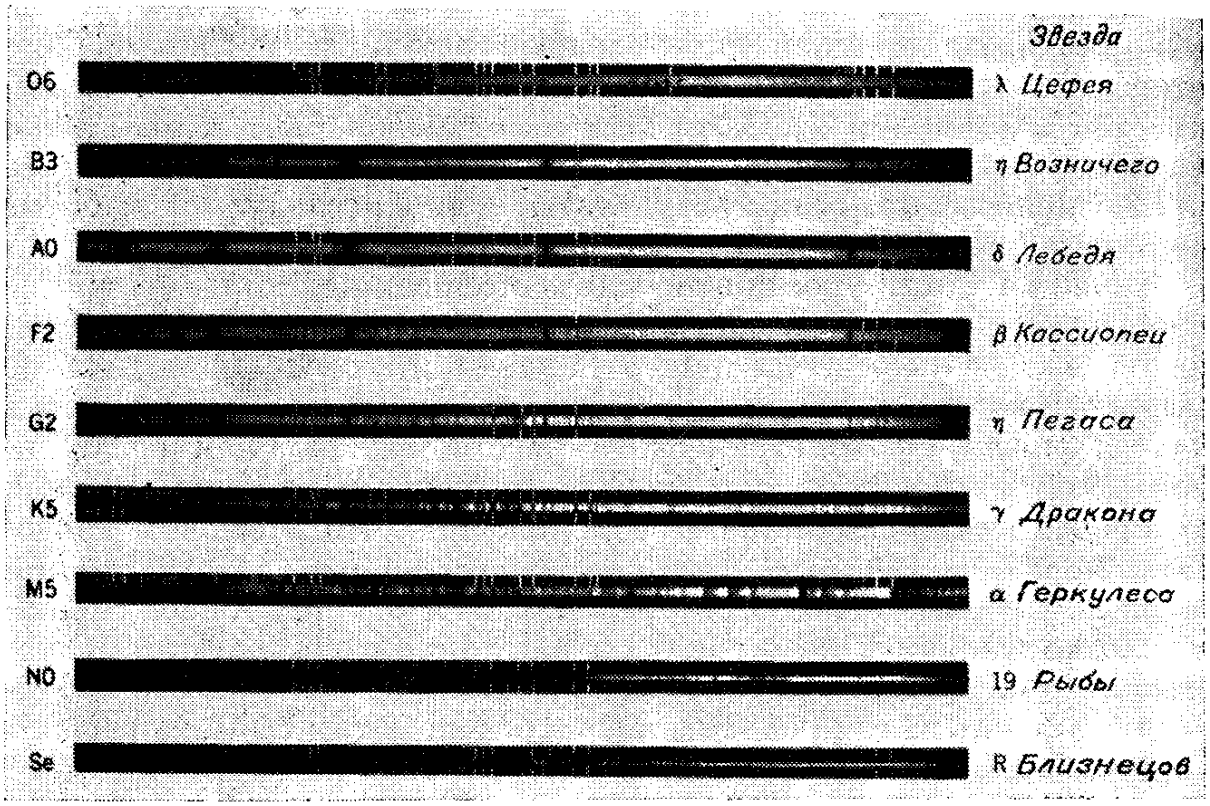
Измеряя величины из левой части этого равенства для большой выборки звезд и делая определенные разумные предположения относительно *распределения* по ϕ, можно найти некоторое значение для постоянной d_0. Хотя этот метод может быть использован на расстояниях до 200 пс, он по сути своей неточен и может дать крайне далекие от истины результаты, если в исследуемой выборке не имеет места предполагаемое распределение по ϕ.

Вряд ли стоит упоминать, что все описанные кинематические измерения расстояний могут быть применены лишь к звездам, находящимся в пределах нашей Галактики, где космологические эффекты, конечно, ничтожны. Поэтому их можно рассматривать как измерения фотометрического расстояния d_ϕ, или собственного расстояния $d_{\text{соб}}$, или любого другого расстояния. (Время от времени высказывается предположение, что тригонометрические параллаксы могут быть измерены вплоть до расстояний порядка 10^8 пс путем интерферометрических радионаблюдений с использованием в качестве базы расстояния от Земли до искусственного спутника на орбите вокруг Солнца. Если бы это оказалось возможным, то проблемы космографии могли бы быть решены определением тригонометрического параллакса как функции красного смещения.)

Фотометрия звезд главной последовательности ($\leqslant 10^5$ пс)

Коль скоро мы определили одним из кинематических методов, описанных выше, расстояние до звезды, то можно найти абсолютную светимость L звезды, измеряя ее видимую светимость и используя формулу $L = 4\pi d^2 l$. Именно следуя этому пути, Э. Герцшпрунг и Г. Н. Рассел обнаружили в 1905—1915 гг., что большая часть ближайших к нам звезд, звезд так называемой *главной последовательности*, удовлетворяет довольно строгому соотношению между абсолютной светимостью и спектральным классом. [Спектральный класс, являющийся, по сути дела, мерой температуры поверхности звезды, обычно обозначается одной из букв O, B, A, F, G, K, M, R, N, S, причем к классу O относятся очень горячие звезды, а к классу S — относительно холодные (фиг. 14.4).] (Имеется мнемоническое правило: «Oh be a fine girl, kiss me right now sweetheart!») Теоретическая астрофизика (см., например, [20]) объясняет главную последовательность как довольно длительную начальную стадию в термоядерной эволюции почти всех звезд.

Принимая соотношение Герцшпрунга — Рассела между абсолютной светимостью и спектральным классом, можно определить расстояние до любой звезды главной последовательности, если известны ее спектральный класс и видимая светимость. Этот метод

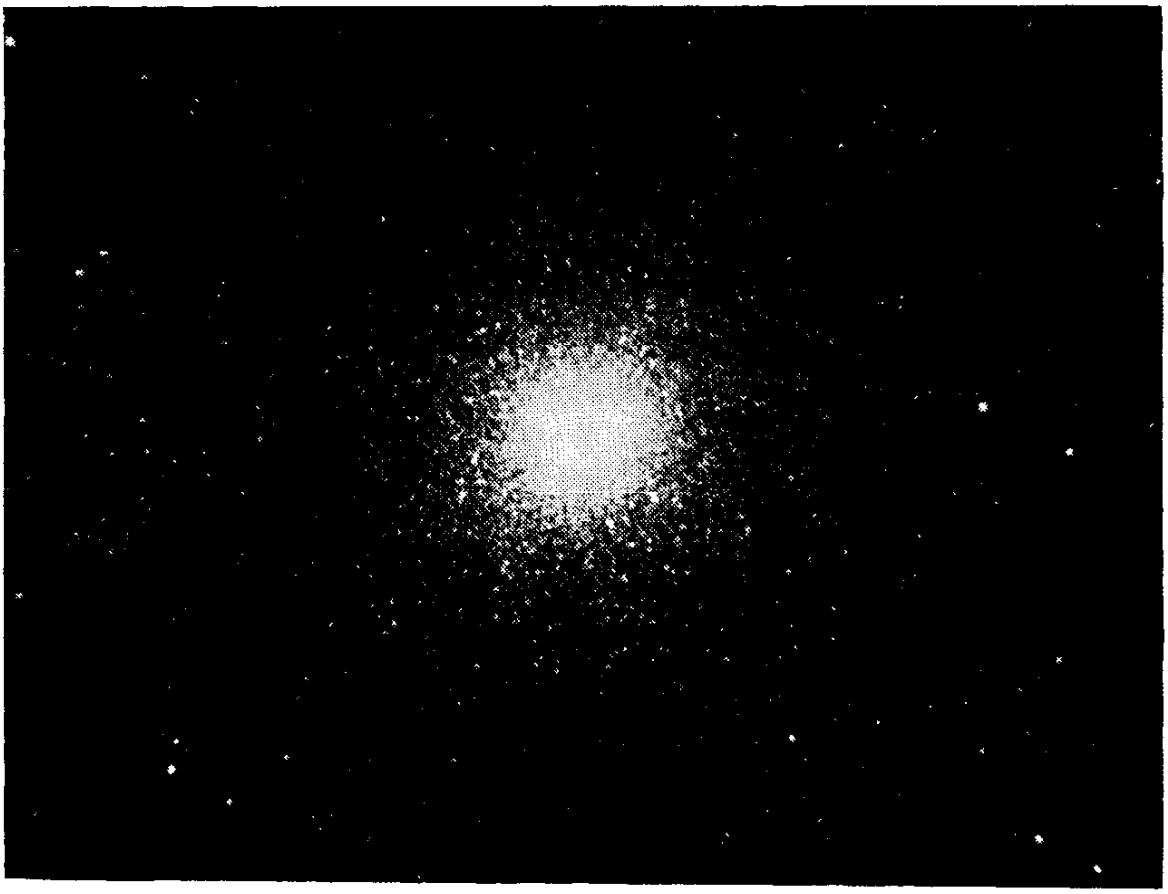


Фиг. 14.4. Спектры звезд различных спектральных классов.

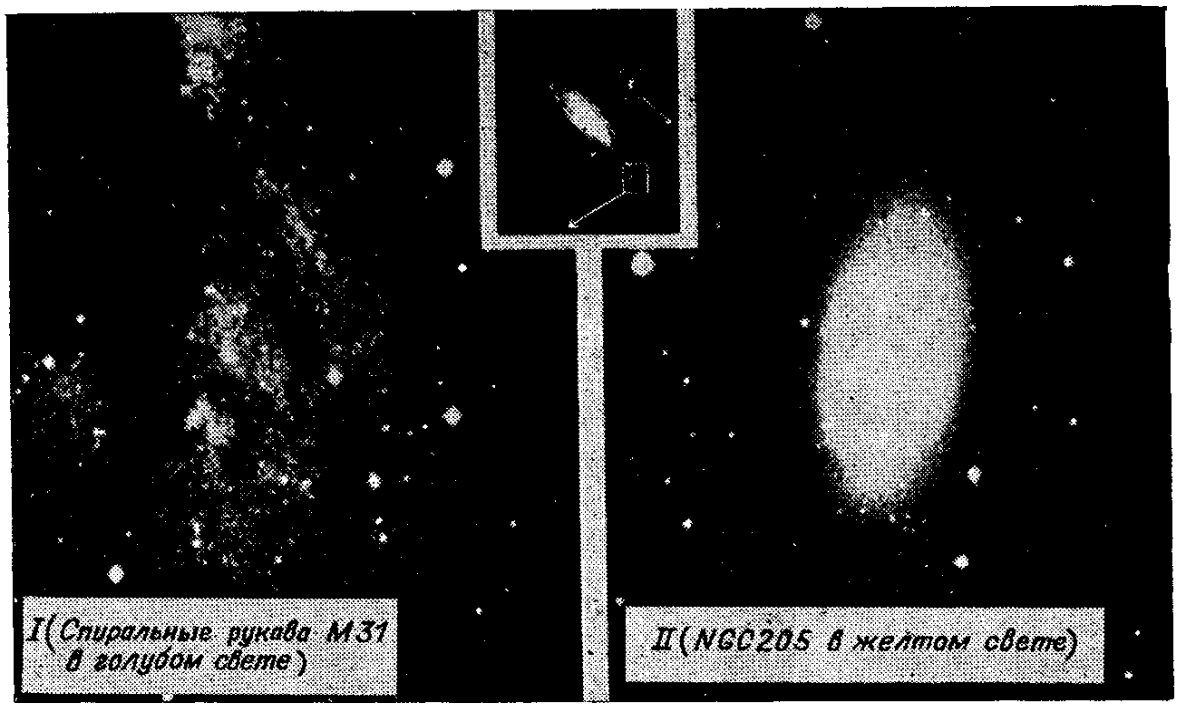
дает наилучшие результаты в применении к *скоплению* звезд, находящихся приблизительно на одинаковом расстоянии от Земли. Тогда звезды главной последовательности могут быть выделены графически с помощью диаграммы «*видимая* светимость — спектральный класс». Вместе с тем этот метод хорошо работает только в нижней части главной последовательности, где соотношение Герцшпрунга — Рассела известно лучше всего.

Внесенные в каталоги скопления нашей Галактики делятся на *рассеянные скопления* (такие, как Гиады и Плеяды), их около 650, и *шаровые скопления* (такие, как большое скопление M13 в созвездии Геркулеса), их примерно 130. В каждом из рассеянных скоплений от 20 до 1000 звезд, а в каждом из шаровых — от 10^5 до 10^7 звезд (фиг. 14.5 и 14.6). При измерении расстояния до этих скоплений важно иметь в виду существование двух типов звездного населения, на что впервые обратил внимание В. Бааде в 1944 г. [21] (фиг. 14.7). Звезды в рассеянных скоплениях, так же как ближайшие к нам звезды и Солнце, обычно принадлежат *населению типа I*, которое характеризуется высоким содержанием металлов и относительной молодостью. В Галактике звезды типа I находятся только в спиральных ветвях. Звезды в шаровых скоплениях принадлежат *населению типа II*, характеризующемуся меньшим содержанием металлов и бо́льшим возрастом; звезды типа II заполняют всю Галактику. Между главными после-

Фиг. 14.5. Открытое скопление NGC 2682 в созвездии Рака.
Сфотографировано 200-дюймовым телескопом обсерватории Маунт-Паломар.



Фиг. 14.6. Шаровое скопление NGC 6205 (M13) в созвездии Геркулеса.
Сфотографировано 200-дюймовым телескопом обсерватории Маунт-Паломар.



Фиг. 14.7. Примеры звезд населений типов I и II.

Сфотографировано 200-дюймовым телескопом обсерватории Маунт-Паломар. Слева звезды населения типа I в спиральных рукавах галактики M31; справа звезды населения типа II в NGC 205, спутнике M31.

довательностями населений типа I и II есть различия, так что использование главной последовательности, калиброванной по ближайшим звездам, для определения расстояния до шарового скопления сопряжено с техническими осложнениями, которых мы не будем здесь касаться.

Метод определения расстояний по фотометрии главной последовательности ограничен тем, что типичные звезды главной последовательности не очень ярки. Например, с помощью рефлектора Хейла на г. Паломар трудно разрешить звезды более тусклые, чем с $m = 22{,}7$, т. е. этот прибор может разрешить звезду с абсолютной величиной Солнца ($M = 4{,}7$) при модулях расстояний до $m - M = 18$, что, согласно (14.4.45), соответствует расстоянию 40 000 пс.

В настоящее время для калибровки соотношения Герцшпрунга — Рассела используются в первую очередь звезды из Гиад, так что вся шкала галактических и внегалактических расстояний основывается на нашем знании расстояния до Гиад, измеренного рассмотренным выше «методом движущегося скопления». Недавно Ходж и Валлерстайн [22] заметили, что и средний тригонометрический параллакс звезд из Гиад, и сопоставление их видимых величин с соотношением Герцшпрунга — Рассела, полученным из наблюдения других ближайших звезд, дают основание для вывода,

что расстояние до Гиад, возможно, равно 50 пс, а не 40,8 пс. Если это так, то все галактические и внегалактические расстояния должны быть увеличены на 20%.

Переменные звезды ($<4 \cdot 10^6$ пс)

Каталоги содержат около 10 000 звезд, у которых наблюдаются более или менее регулярные изменения видимой светимости во времени. При установлении внегалактической части шкалы расстояний в настоящее время играют важную роль два типа переменных звезд — *переменные звезды в скоплениях*, или *звезды типа RR Лиры*, и *классические цефеиды*, или *звезды типа δ Цефея*. Звезды типа RR Лиры имеют периоды от нескольких часов до одних суток и принадлежат населению типа II, тогда как классические цефеиды входят в население типа I и имеют периоды от 2 до 40 сут. (Кроме того, имеется еще один тип переменных звезд — *звезды типа W Девы*, принадлежащие населению типа II. Ниже мы увидим, что звезды типа W Девы относили к цефеидам, пока Бааде не ввел два типа населений звезд.)

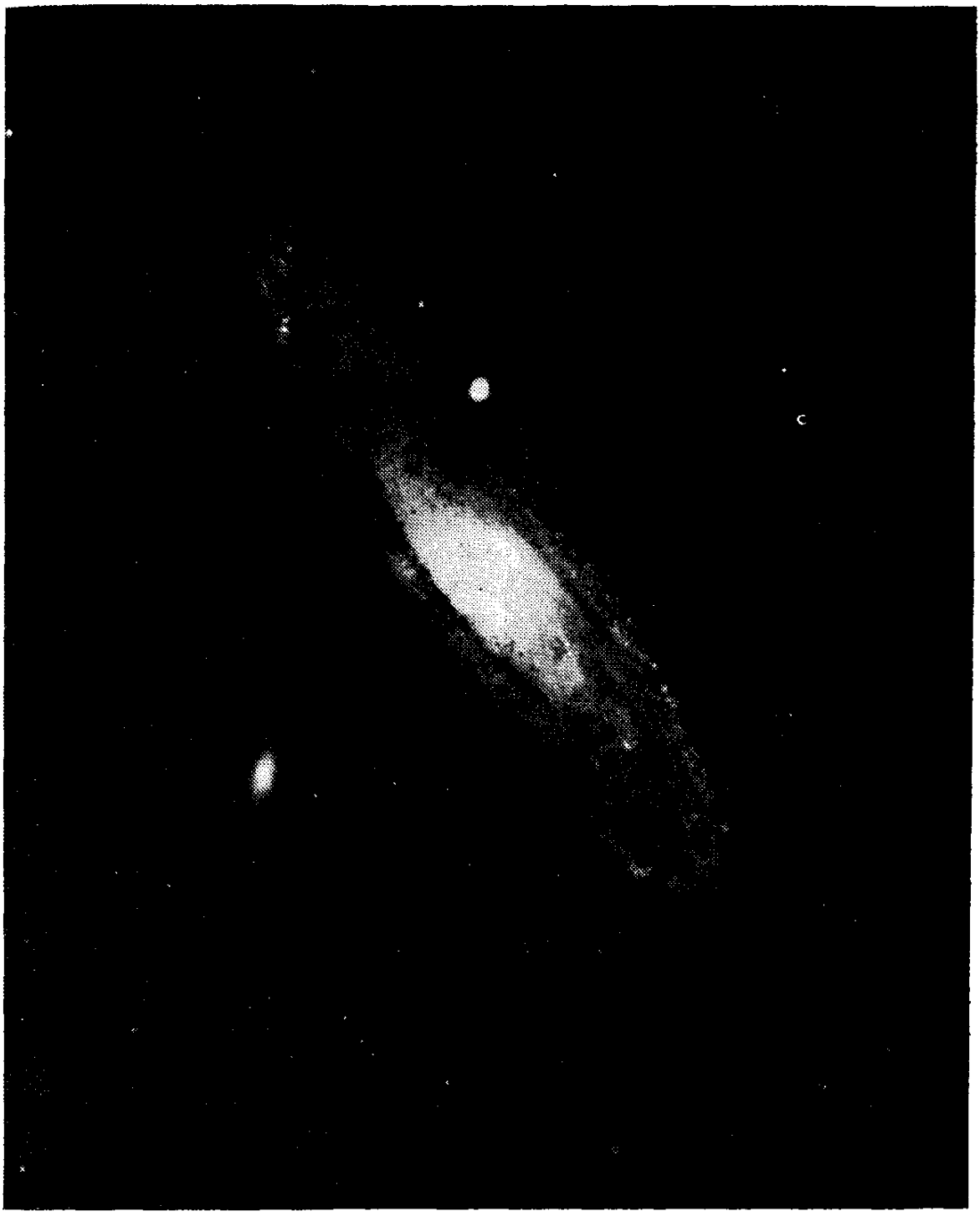
В настоящее время лучше всего известны абсолютные величины звезд типа RR Лиры; они получены путем непосредственного статистического исследования их собственных движений и параллаксов и с учетом того обстоятельства, что эти звезды принадлежат шаровым скоплениям, расстояние до которых можно измерить методом фотометрии главной последовательности. В итоге было найдено [23—26], что все звезды типа RR Лиры имеют в грубом приближении одинаковые абсолютные величины, что-то между $M_v \approx 0{,}2$ и $M_v \approx 1{,}0$. Следовательно, если мы по короткому периоду пульсаций относим звезду к типу RR Лиры, то мы можем оценить расстояние до нее по ее видимой светимости. Однако для измерения расстояний, превышающих $3 \cdot 10^5$ пс, звезды типа RR Лиры недостаточно ярки. По этой причине более ярким классическим цефеидам уделялось много больше внимания.

К сожалению, классические цефеиды сильно различаются по абсолютной светимости. Однако в 1912 г. Г. С. Леавитт обнаружила [27], что у 25 известных в то время классических цефеид в Малом Магеллановом Облаке видимые светимости описываются гладкой функцией $l_{\text{ММО}}(P)$ периода P (грубо $l \sim P$). Поскольку все звезды Малого Магелланова Облака находятся примерно на одном расстоянии от Земли, у Леавитт были основания для заключения, что абсолютная светимость классической цефеиды с периодом P есть гладкая функция $L(P)$, пропорциональная $l_{\text{ММО}}(P)$. Однако ей не было известно расстояние до Малого Магелланова Облака, а цефеид, близких к Земле настолько, чтобы иметь измеримые тригонометрические параллаксы, вообще нет; поэтому Леавитт не могла определить константу пропорциональности.

Трудоемкая работа по калибровке P — L-соотношения для цефеид была выполнена сначала Расселом [28] и Герцшпрунгом [29], затем Х. Шепли [30] и, наконец, Р. Е. Вильсоном [31]. Они не прибегали к фотометрии главной последовательности; их основным методом был статистический анализ собственных движений и радиальных скоростей ближайших к Солнцу цефеид (см. раздел «Кинематические методы» этого параграфа), а отношения абсолютных светимостей этих цефеид определялись из P— L-соотношения для цефеид из Магеллановых Облаков. В 1923 г. Э. Хаббл [32] открыл цефеиды в большой туманности М31 Андромеды; их периоды и видимые светимости были использованы вместе с P — L-соотношением цефеид для оценки расстояния до М31, что дало 280 000 пс (фиг. 14.8 и 14.9). Именно этим измерением было окончательно установлено, что «спиральные туманности»— это архипелаги звезд, сравнимые с нашей Галактикой (что предполагал еще Иммануил Кант), а не просто облака или скопления в пределах Галактики. Позднее учет межзвездного поглощения снизил эту цифру до 230 000 пс, но в остальном масштаб внегалактических расстояний существенно не менялся до 1950 г., когда начала работать обсерватория Маунт-Паломар.

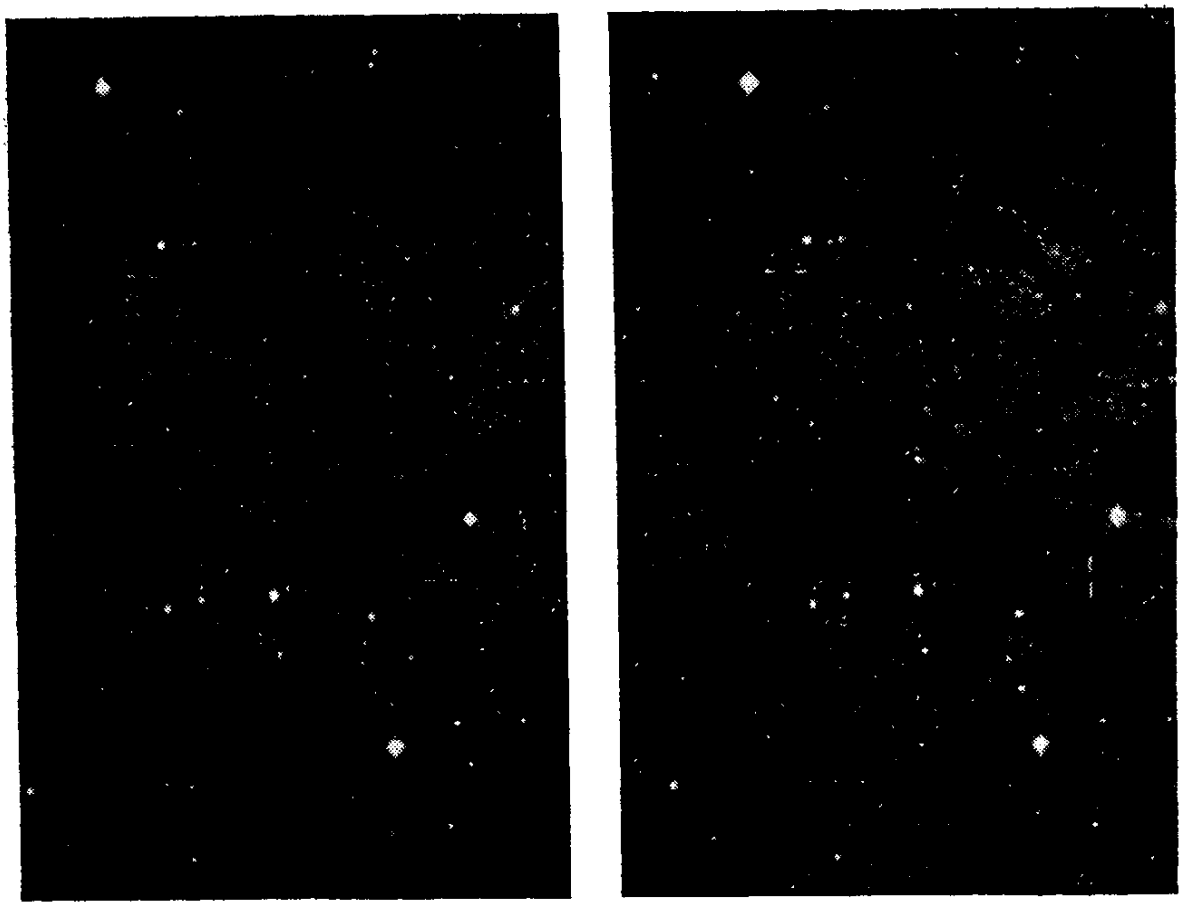
К 1952 г. стало ясно, что P — L-соотношение цефеид, определенное Шепли и другими, в чем-то ошибочно. На фотографиях туманности М31, сделанных с 30-минутной экспозицией в Паломаре, были обнаружены только наиболее яркие звезды населения типа II, но совсем не было переменных типа RR Лиры. Это означало, что наиболее яркие звезды типа II в М31 имеют видимую фотографическую величину $m \approx 22{,}4$, и поскольку было известно, что звезды типа RR Лиры имеют примерно в четыре раза меньшую абсолютную светимость, то их видимая величина в М31 должна была бы оказаться около $m \approx 23{,}9$, т. е. вне достижимости телескопа в обсерватории Маунт-Паломаре. Однако к тому времени абсолютная величина звезд типа RR Лиры была достаточно известна по проделанному А. Сэндейджем фотометрическому измерению расстояния до шарового скопления М3. Если бы М31 была действительно на расстоянии 230 000 пс, то звезды типа RR Лиры должны были бы быть заметны как звезды величины $m \approx 22{,}4$, по крайней мере в своих максимальных фазах, а наиболее яркие звезды населения типа II должны были бы иметь видимую величину $m \approx 20{,}9$, но не $m \approx 22{,}4$. Бааде [33] объяснил это противоречие тем, что расстояние до М31 не 230 000 пс, а приблизительно *вдвое* больше (разность 1,5 между видимыми звездными величинами соответствует удвоению расстояния); но тогда классические цефеиды в спиральных ветвях М31 должны быть приблизительно в четыре раза ярче, чем следовало из оценок.

Источник этой ошибки не совсем ясен. P — L-соотношение в калибровке Шепли в самом деле довольно хорошо работает



Фиг. 14.8. Большая галактика M31 (NGC 224) в туманности Андромеды с галактиками-спутниками NGC 205 и 221.
Фотография получена на 48-дюймовом телескопе обсерватории Маунт-Паломар.

в применении к переменным типа W Девы, принадлежащим к населению типа II, но приводит к ошибке, если его использовать для классических цефеид (они из населения типа I), которые в среднем в четыре раза ярче, чем звезды типа W Девы с тем же периодом. Однако не надо думать, что Шепли, не зная различия



Фиг. 14.9. Переменные звезды в одной из областей галактики М31.
Две из этих переменных отмечены. Фотографии получены на 200-дюймовом телескопе в обсерватории Маунт-Паломар.

между типами населений, основывал свою калибровку на звездах типа W Девы, а не на классических цефеидах. Наоборот, одиннадцать переменных, рассмотренных Шепли [30] в 1918 г., были звездами населения типа I, и среди них была даже δ Цефея, от которой и пошло название «классические цефеиды»! (Во всяком случае, звезды типа W Девы и менее ярки, и более редки в окрестности Солнца, так что если бы они давали большой вклад в статистику собственных движений, использованную для калибровки цефеид, это не могло бы остаться незамеченным.) Недавний анализ [34] тех же одиннадцати классических цефеид, которые были использованы Шепли, обнаружил, что его калибровка содержит ошибки: около 0,7 звездной величины вследствие пренебрежения межзвездным поглощением, 0,6 звездной величины из-за систематических ошибок в измерении собственного движения и 0,1—0,2 звездной величины из-за вращения Галактики, вносящего анизотропию в распределение скоростей звезд. Все эти ошибки имеют тенденцию суммироваться и приводят к знаменитой недооценке абсолютной светимости цефеид на 1,5 звездной величины, обнаруженной Бааде в 1952 г. Таким образом, было чистой слу-

чайностью то, что первоначально полученная Шепли кривая $P - L$, не будучи применимой к цефеидам населения типа I, оказалась применимой к звездам типа W Девы [35] населения типа II.

Может возникнуть вопрос: почему калибровка Шепли неоднократно подтверждалась в течение трети столетия, с 1918 по 1952 г.? Одной из простых причин является то, что межзвездное поглощение постоянно недооценивалось. Так, когда Р. Вильсон [31] пытался улучшить статистический анализ собственных движений и радиальных скоростей, используя большое число цефеид (74 в 1923 г. и 157 в 1939 г.), ему приходилось включать в рассмотрение все более и более удаленные звезды, так что повышение статистической точности компенсировалось все возрастающим влиянием поглощения. Сам Шепли [30] применил свое $P - L$-соотношение к тому, что он считал классическими цефеидами в шаровых скоплениях ω Центавра, М3 и М5. Таким образом он имел возможность определить расстояния до этих шаровых скоплений и затем вычислить абсолютные величины короткопериодических переменных в них — звезд типа RR Лиры. Эта процедура действительно привела к правильному ответу, поскольку те звезды в шаровых скоплениях, которые Шепли принимал за классические цефеиды, были на самом деле звездами типа W Девы и калибровка Шепли $P - L$-соотношения, ошибочная для классических цефеид, по которым она была получена, случайно оказалась правильной для звезд типа W Девы! Поэтому, когда несколько лет спустя были проведены статистические исследования собственных движений и радиальных скоростей ближайших звезд типа RR Лиры, они имели тенденцию к согласию с оценками абсолютных величин этих звезд, полученными Шепли, и это, естественно, воспринималось как подтверждение $P - L$-соотношения для цефеид. Затем аргументы были переставлены: получив отношение светимостей звезд типа RR Лиры и «цефеид» из шаровых скоплений, Вильсон наряду с десятью звездами типа RR Лиры (в 1923 г.) и с шестьюдесятью семью звездами (в 1939 г.) включил в свои анализы собственных движений и радиальных скоростей соответственно 74 и 157 цефеид. Как это ни странно, звезды типа RR Лиры не внесли в отличие от цефеид больших ошибок, связанных с пренебрежением поглощением, так как, будучи звездами населения типа II, они большей частью находятся вне плоскости Галактики. Правда, вызывало беспокойство то, что классические цефеиды в отличие от звезд типа W Девы не укладывались на $P - L$-кривую, плавно экстраполированную к звездам типа RR Лиры, а ложились на 1,4 звездной величины выше.

Следует отметить, что проведенная в 1952 г. Бааде ревизия $P - L$-соотношения для цефеид привела к увеличению вдвое масштаба внегалактических расстояний, но не повлияла на

оценку размеров нашей Галактики, поскольку масштаб галактических расстояний был определен по расстояниям до шаровых скоплений, а они, как мы видели, отчасти случайно, были найдены правильно.

До 1952 г. казалось, что все соседние галактики заметно меньше, чем наша. После 1952 г. стало ясно, что многие галактики такие же по величине или больше, чем наша,— весьма удовлетворительный, если не успокоительный вывод.

С тех пор открытие пяти классических цефеид в рассеянных галактических скоплениях NGC6087, NGC129, M25, NGC7790 и NGC6664 вместе с четырьмя другими классическими цефеидами в «ассоциации» $h + \chi$ Персея подвело под калибровку классических цефеид более твердое основание. Расстояние до этих скоплений известно по фотометрическим измерениям их звезд главной последовательности (Крафт [36], см. также [37, 38]). Крафт, а позднее Сэндейдж и Тамман [39] использовали эти девять цефеид с известными абсолютными звездными величинами для того, чтобы фиксировать абсолютный масштаб в P — L-соотношении для цефеид [1]). (Общий *вид* этого соотношения, которое, если говорить точно, связывает период, светимость и *цвет*, был найден, естественно, по значительно большей выборке цефеид, принадлежащих обоим Магеллановым Облакам, галактике M31 Андромеды и малой галактике NGC6822 Печи.) В настоящее время расстояние до M31, определенное по ее классическим цефеидам, получается равным 700 000 пс, что в три раза больше расстояния, принятого в 30-е годы.

Звезды типа RR Лиры и классические цефеиды можно использовать для определения расстояния до всех соседних галактик и звездных систем, входящих в ассоциацию, известную как *Местная Группа* галактик. При этом использование звезд типа RR Лиры ограничено только ближайшими объектами, такими, как Магеллановы Облака и системы Малая Медведица, Дракон и Скульптор.

Для всех больших галактик Местной Группы, таких, как M31 и M33, необходимо применять P — L-соотношение для классических цефеид, калиброванное по девяти известным цефеидам из открытых скоплений и ассоциаций галактик. Яркость классических цефеид в максимуме ($M_{v,\text{макс}} \approx -5{,}3$) достаточна для измерения расстояний порядка $4 \cdot 10^6$ пс, а этого достаточно, чтобы «добраться» до некоторых галактик, лежащих вне Местной Группы, например такой, как красивая спиральная галактика M81. Однако для измерения расстояния до ближайшего скопления галактик — *скопления Девы* цефеиды уже недостаточно ярки.

[1]) Пересмотр этой калибровки предложен в работах [40, 41].

Новые звезды, области H II, наиболее яркие звезды, шаровые скопления и т. д. ($\leqslant 3 \cdot 10^7$ пс)

Следующая ступень нашей лестницы космических расстояний, возможно, самая ненадежная на сегодняшний день [1]). Чтобы оценить расстояния до объектов, находящихся далеко за пределами Местной Группы, нужно найти какие-то индикаторы расстояния, которые ярче цефеид и вместе с тем имеются в галактиках Местной Группы (расстояния до этих галактик известны по цефеидам) в числе, достаточном для точной калибровки их свойств.

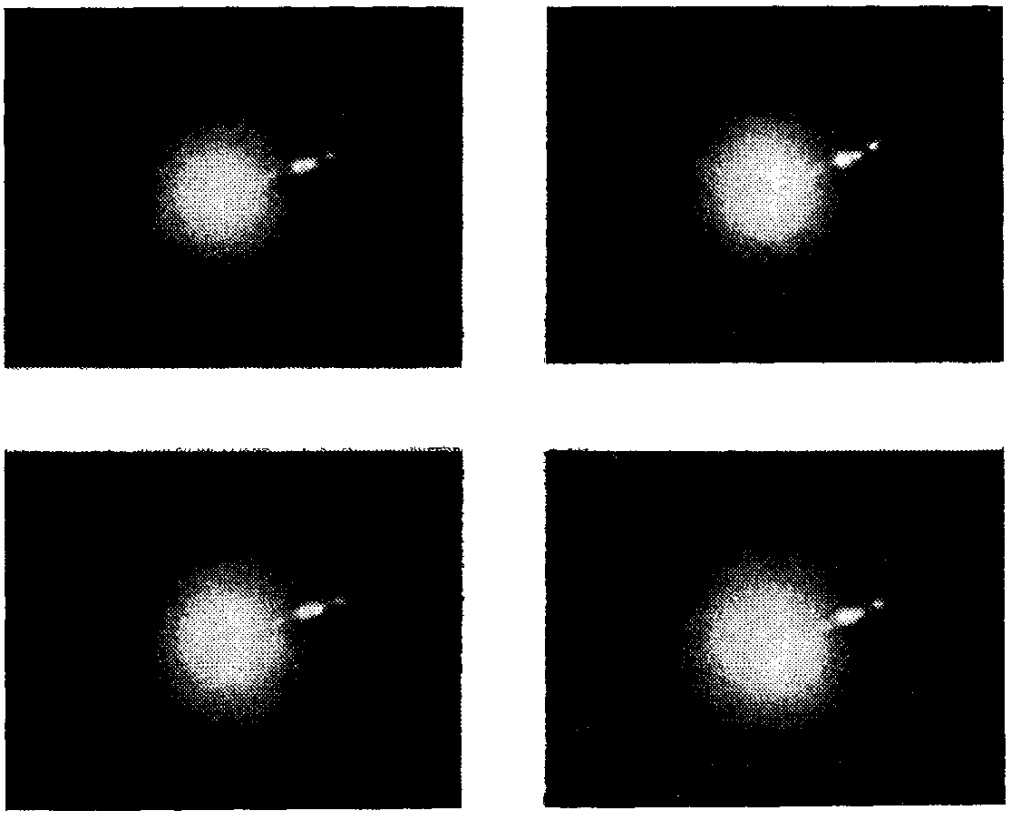
Новыми называют звезды, светимость которых возросла внезапно на четыре-шесть звездных величин. Такие случаи наблюдаются в типичных галактиках с частотой до 40 раз в год. Их использовали в качестве индикаторов расстояния с 1917 г., когда была найдена новая в спиральной туманности NGC6946. Наиболее яркие новые достигают $M_v \approx -7{,}5$ и, следовательно, могут быть использованы как индикаторы расстояний порядка 10^7 пс, но они имеют тенденцию появляться в ярких центральных областях галактик и поэтому их трудно разрешить.

До последнего времени первичными индикаторами расстояния, используемыми для «выхода» за пределы нашей Местной Группы, были *наиболее яркие* звезды в галактиках. Обозрение Местной Группы показывает, что звезды каждой галактики вообще имеют четко выраженный максимум абсолютной светимости около $M_v \approx -9{,}3$. Это обстоятельство можно использовать для определения расстояний до $3 \cdot 10^7$ пс, но на существенно больших расстояниях становится трудно различать наиболее яркие звезды и незвездные объекты, такие, как ассоциации или области излучения (и в самом деле, считается, что калибровка шкалы расстояний Хабблом [43] в 1936 г. была ошибочной отчасти из-за того, что он принял такие объекты за наиболее яркие звезды).

Некоторые незвездные объекты также могут быть использованы в качестве индикаторов расстояния. Отметим среди них *области HII*, большие облака межзвездного водорода, ионизованного и светящегося из-за присутствия в них звезд классов O или B. Поскольку они имеют сотни парсек в диаметре, по их угловым диаметрам можно оценить расстояния до 10^8 пс.

Недавно Сэндейдж [44] разработал метод, использующий в качестве индикаторов расстояния *шаровые скопления*; этот метод может оказаться надежнее любого из вышеупомянутых. Для сотен шаровых скоплений в нашей Галактике типичны абсолютные величины около —8, но с большим разбросом около этого среднего значения. Однако изучение [45] 2000 шаровых скоплений

[1]) Результаты измерений соответствующих этой ступени расстояний приведены в [42], гл. 12.



Фиг. 14.10. Гигантская эллиптическая галактика M87 (NGC4486) в скоплении Девы при различных направлениях поляризаций.

Эти фотографии, полученные на 200-дюймовом телескопе на г. Паломар, недоэкспонированы для того, чтобы выделить ядро галактики и хорошо заметную «струю».

большой E-галактики (эллиптической галактики) M87 в скоплении Девы (фиг. 14.10) показывает, что кривая распределения их светимостей резко обрывается при $m_{B\,\text{макс}} \approx 21{,}3$. По предположению Сэндейджа, абсолютную величину ярчайшего шарового скопления в M87 следует приравнять к абсолютной величине ярчайшего шарового скопления B282 в галактике M31 Андромеды, которая известна: M_B (B282) $\approx -9{,}83$. Таким образом, модуль расстояния M87 равен $21{,}3 - (-9{,}8) = 31{,}1$, откуда вытекает, что до M87 и, следовательно, до скопления Девы около $1{,}7 \cdot 10^7$ пс. Конечно, нельзя считать окончательно установленным, что распределение светимостей шаровых скоплений имеет резкий спад, а не плавный «хвост» при больших светимостях. Вокулер [46] рассмотрел последнюю возможность и пришел к выводу, что в этом случае до скопления Девы $2 \cdot 10^7$ пс, на 20% больше, чем вычислил Сэндейдж.

Ярчайшие галактики ($\leqslant 10^{10}$ пс)

Скопление Девы имеет небольшое среднее красное смещение $z = 0{,}0038$, соответствующее радиальной скорости 1100 км/с.

Это ненамного больше средней случайной скорости типичных галактик, и только когда мы «смотрим» дальше скопления Девы, космологическое расширение начинает доминировать в поле скоростей. Чтобы определить эти космологически интересные расстояния, необходимо использовать в качестве индикаторов расстояния целые галактики.

Скопления галактик содержат от сотен до тысяч различимых галактик (в скоплении Девы их 2500); следовательно, если есть какая-либо естественная верхняя граница абсолютной светимости отдельно взятых галактик, то абсолютная светимость наиболее яркой галактики в богатом скоплении должна быть близка к этому максимуму. Из этих соображений Хаббл [43] предложил в 1936 г. использовать наиболее яркие галактики в скоплениях в качестве индикаторов расстояния (в действительности он брал *пятую* по яркости галактику, чтобы минимизировать погрешности наблюдения). Такой подход оправдал себя, когда было установлено, что использование наиболее ярких галактик в качестве индикаторов расстояния дает хорошее линейное соотношение между фотометрическим расстоянием и z для десяти скоплений с $z \ll 1$ (см. следующий параграф). Эти наиболее яркие галактики в скоплениях являются обычно эллиптическими галактиками типа E по классификации Хаббла (см. приложение).

Согласно Сэндиджу [44], ярчайшая в скоплении Девы E-галактика NGC4472 имеет абсолютную звездную величину, равную $M_B \approx -21{,}68$; это значение найдено с использованием расстояния до скопления Девы, определенного по шаровым скоплениям звезд. Если бы все ярчайшие E-галактики имели абсолютные величины $M_B \approx -21{,}7$, то их можно было бы использовать в качестве индикаторов расстояния до модулей расстояния $m - M$, равных 44,5, или до фотометрических расстояний около 10^{10} пс.

Возможно, однако, что функция распределения светимостей галактик в скоплениях не обрывается резко. В этом случае использование наиболее ярких галактик как индикаторов расстояния было бы осложнено *эффектом Скотт* [47]. Этот эффект назван по имени Элизабет Скотт, впервые обсуждавшей его в таком аспекте, и состоит он в следующем. По мере перехода ко все большим и большим расстояниям мы отбираем для изучения все более и более богатые скопления галактик, и если нет абсолютного верхнего предела светимости галактик, то наиболее яркие галактики в этих скоплениях будут иметь все большие абсолютные величины. Ошибочное в этом случае предположение о том, что эти удаленные галактики имеют ту же абсолютную светимость, что и NGC4472, привело бы нас к недооценке их фотометрического расстояния. Вопрос о существовании эффекта Скотт продолжает оставаться спорным [48—51]. Другие проблемы, связанные с использованием ярчайших галактик в качестве

индикаторов расстояния, обсуждаются в следующем параграфе.

Если теперь составить вместе все ступени космической лестницы, то сразу становится ясным, сколь шаткой она получилась. Ко времени написания этой книги расстояние до Гиад определено по наблюдению собственных движений и радиальных скоростей их звезд; расстояние до пяти открытых галактических скоплений и ассоциаций $h + \chi$ Персея определено путем фотометрии их звезд главной последовательности, абсолютные звездные величины которых известны по измерениям в Гиадах; расстояние до туманности М31 Андромеды определено по классическим цефеидам, P — L-соотношение для которых калибровано по девяти известным цефеидам в открытых скоплениях и ассоциации $h + \chi$ Персея; расстояние до скопления Девы определено в предположении, что наиболее яркое шаровое скопление в М87 имеет такую же абсолютную светимость, как и наиболее яркое шаровое скопление В282 в М31; наконец, расстояния до более далеких скоплений галактик определены в предположении, что их наиболее яркие E-галактики имеют такую же абсолютную светимость, что и наиболее яркая галактика NGC 4472 в скоплении Девы. Обнаружение новых ошибок вполне вероятно на любой ступени, а тогда пришлось бы подправлять все последующие ступени космической лестницы.

§ 6. Зависимость красного смещения от расстояния

Рассмотрим теперь, как может быть использована корреляция красного смещения и расстояния для получения информации о космическом масштабном факторе $R(t)$. Для наших целей достаточно будет пользоваться лишь фотометрическим расстоянием; из соотношений (14.4.22), (14.4.23) видно, что изучение корреляции красного смещения и угловых диаметров или собственных движений вместо видимых светимостей не может дать какой-либо новой информации.

Допустим теперь, что астрономы могут выделить совокупность объектов с известными абсолютными светимостями L, таких, как ярчайшие E-галактики, обсуждавшиеся в конце предыдущего параграфа. Измеряя их видимые светимости, можно по формуле (14.4.13) вычислить фотометрические расстояния до них:

$$d_{\text{ф}} = \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2}.$$

Допустим также, что измерены красные смещения z этих объектов и, следовательно, известна эмпирическая кривая $d_{\text{ф}}(z)$. Что мы узнаем отсюда относительно $R(t)$?

Теоретически наблюдаемые $d_{\text{ф}}$ и z связаны с неизвестными координатами источника света соотношениями (14.3.1), (14.3.6)

и (14.4.14):

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} dr\,[1-kr^2]^{-1/2},$$

$$z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1,$$

$$d_\Phi = r_1 \frac{R^2(t_0)}{R(t_1)} = r_1 R(t_0)(1+z).$$

В настоящее время кривая $d_\Phi(z)$ известна с приемлемой точностью лишь для малых z, и поэтому первоначально мы должны обратиться к случаю, когда $t_0 - t_1$ и r_1 малы. Космический масштабный фактор $R(t)$ можно тогда представить в виде степенного ряда

$$R(t) = R(t_0)\left[1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 + \ldots\right], \qquad (14.6.1)$$

где t_0 — настоящий момент времени, а H_0 и q_0 — параметры, известные как *постоянная Хаббла* и *параметр замедления*:

$$H_0 \equiv \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}, \qquad (14.6.2)$$

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{R}(t_0)\,R(t_0)}{(\dot{R})^2(t_0)}. \qquad (14.6.3)$$

(Точка означает производную по времени.) В следующей главе будет показано, что, зная значения H_0 и q_0, мы можем вычислить функцию $R(t)$ полностью, используя уравнения Эйнштейна с $k > 0$ при $q_0 > {}^1/_2$ и $k < 0$ при $q_0 < {}^1/_2$. Поэтому теперь предметом нашего обсуждения будет измерение этих двух критических параметров.

Подстановка разложения (14.6.1) в (14.3.6) дает для красного смещения как функции времени распространения света $t_0 - t_1$ выражение в виде степенного ряда

$$z = H_0(t_0 - t_1) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0 - t_1)^2 + \ldots . \qquad (14.6.4)$$

Обращая этот ряд, мы выразим время распространения через красное смещение:

$$t_0 - t_1 = \frac{1}{H_0}\left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \ldots\right]. \qquad (14.6.5)$$

Чтобы найти r_1, разложим (14.3.1):

$$\frac{1}{R(t_0)} \int_{t_1}^{t_0} dt \left[1 + H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \ldots\right] = r_1 + O_1(r_1^3),$$

откуда

$$r_1 = \frac{1}{R(t_0)}\left[t_0 - t_1 + \frac{1}{2}H_0(t_0 - t_1)^2 + \ldots\right]. \qquad (14.6.6)$$

Подставляя (14.6.5) в (14.6.6), выразим r_1 через красное смещение:

$$r_1 = \frac{1}{R(t_0)H_0}\left[z - \frac{1}{2}(1+q_0)z^2 + \ldots\right]; \qquad (14.6.7)$$

тогда формула (14.4.14) дает фотометрическое расстояние в виде степенного ряда

$$d_\Phi = H_0^{-1}\left[z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 + \ldots\right]. \qquad (14.6.8)$$

Это выражение можно переписать как формулу для видимой светимости:

$$l = \frac{L}{4\pi d_\Phi^2} = \frac{LH_0^2}{4\pi z^2}[1 + (q_0 - 1]z + \ldots] \qquad (14.6.9)$$

или как эквивалентную формулу для модуля расстояния:

$$m - M = 25 - 5\lg H_0\ [\text{км/(с·Мпс)}] + 5\lg cz\ (\text{км/с}) + \\ + 1{,}086\,(1 - q_0)\,z + \ldots . \qquad (14.6.10)$$

[1 Мпс $= 10^6$ пс и 100 км/(с·Мпс) $= (9{,}78\cdot 10^9$ лет$)^{-1}$.] Дальнейшая программа состоит в том, чтобы сравнить одну из формул (14.6.8) — (14.6.10) с астрономическими данными и таким образом определить критические параметры q_0 и H_0.

Для измерения q_0 нужны большие значения z (скажем, $z \gtrsim 0{,}1$), при которых в качестве индикаторов расстояния могут быть использованы лишь наиболее яркие скопления галактик и, возможно, сверхновые. Вместе с тем при этом необходимо знать только *форму* кривой зависимости d_Φ, l или m от z.

Для измерения H_0 вполне достаточно одного объекта с $z \gtrsim 0{,}1$, но нужно знать и его абсолютную светимость, и красное смещение, и видимую светимость, причем красное смещение должно быть все же и не слишком малым (скажем, $z \gtrsim 0{,}01$), чтобы соответствующая ему радиальная скорость отражала общее расширение Вселенной, а не локальную аномалию скорости. К сожалению, радиальная скорость скопления Девы, светимость которой известна по наблюдению его наиболее ярких звезд и шаровых скоплений (четвертая ступень лестницы космических расстояний, описанной в предыдущем параграфе), всего лишь около 1000 км/с, т. е. недостаточно велика, чтобы с уверенностью приписывать основную часть ее космологическому расширению. Не исключено, что, используя, скажем, угловые диаметры областей HII, можно растянуть четвертую ступень до расстояний, соответствующих

бóльшим красным смещениям. Однако в настоящее время единственная возможность измерять H_0 и q_0 при больших красных смещениях состоит в том, чтобы использовать все пять ступеней лестницы космических расстояний, привлекая в качестве индикаторов расстояния наиболее яркие галактики в богатых скоплениях.

Эта программа сталкивается с многочисленными осложнениями; некоторые из них в настоящее время учитываются введением поправок в соответствующие данные. Среди них:

А. Вращение Галактики. Вращение Галактики сообщает Солнцу скорость около 215 км/с. Это приводит к систематическому голубому или красному смещению в спектрах удаленных галактик, которые обычно вычитаются из наблюдаемых красных смещений при вычислении «космологического» красного смещения z.

Б. Апертура. Поскольку края галактик плавно бледнеют до фонового света неба, необходимо относить все измерения видимой светимости к некоторой стандартной апертуре телескопа.

В. k-член. Как уже обсуждалось в § 4 этой главы, красное смещение искажает распределение частот света удаленных источников, вследствие чего их визуальные или голубые звездные величины определяют их абсолютные светимости на более высоких частотах, чем у близких объектов. Если известно исходное распределение частот, можно учесть эффект с помощью формулы (14.4.35); в результате левую часть в (14.6.10) нужно будет заменить на $m_B - M_B - k_B(z)$, где $k_B(z)$ — функция от z, явный вид которой был получен Оке и Сэндиджем [52]. По альтернативной процедуре, развитой Баумом [53], распределение светимостей измеряется непосредственно для каждой изучаемой галактики; тогда все видимые звездные величины можно относить к одной и той же частоте в момент излучения и нет необходимости в k-члене.

Г. Поглощение. Известно, что наша Галактика поглощает определенную часть света, приходящего к нам от внегалактических объектов. Если рассматривать нашу Галактику как бесконечную плоскую пластину, расстояние, пройденное в пределах Галактики лучом света на его пути к нам, будет пропорционально $\operatorname{cosec} b$, где b — угол между лучом зрения и плоскостью Галактики. Следовательно, свет будет ослабляться в $\exp(-\lambda \operatorname{cosec} b)$ раз, где λ — некоторая постоянная. Подбирая λ из исследований ближайших внегалактических объектов, получим, что левая часть равенства (14.6.10) должна быть заменена на скорректированный модуль расстояния:

$$(m - M)_{\text{корр}} = m_B - M_B - k_B(z) - A_B(b),$$

где в грубом приближении $A_B(b) \approx 0{,}25 \operatorname{cosec} b$. Здесь мы несколько упрощаем процедуру. На самом деле Сэндейдж [54]

сначала вводит поправку на поглощение $A_V\ (b) = 0{,}18\ (\mathrm{cosec}\ b - 1)$ в визуальные величины, потом переводит их в голубые величины и затем вводит дополнительную поправку $A_B = 0{,}25$. Какие-либо поправки в связи с внегалактическим поглощением обычно не вводятся [55] (§ 4 гл. 15).

В дополнение к этим осложнениям, характер которых довольно точно установлен, имеется некоторое число других возможных источников ошибок, относительно которых значительно больше сомнений.

Д. Неопределенность в L. Как было подчеркнуто в § 5 этой главы, новые исправления на любой ступени лестницы космических расстояний, например изменение расстояния до Гиад или до скопления Девы, потребовали бы соответствующих поправок в оценках абсолютных светимостей наиболее ярких *E*-галактик. Из (14.6.9) или (14.6.10) видно, что это повлияло бы на численное значение постоянной Хаббла, но не привело бы к изменениям в параметре замедления q_0.

Е. Эффект Скотт. В предыдущем параграфе было также подчеркнуто, что в случае отсутствия резкой верхней границы для абсолютных светимостей галактик в скоплениях тенденция к выбору все более богатых скоплений при увеличении расстояния означала бы, что абсолютные светимости их наиболее ярких галактик растут с ростом z. Согласно (14.6.9), этот эффект селекции привел бы к *завышению* параметра замедления q_0. Однако этот эффект Скотт, если он на самом деле существует, дает вклад лишь при очень больших расстояниях и потому очень мало влияет на значение H_0.

Ж. Анизотропия скоростей. По предположению Вокулера [56, 57], поле скоростей галактик анизотропно в области, включающей Местную Группу и скопление Девы. Если такая анизотропия действительно существует, это может означать, что красные смещения с cz, меньше чем 4000 км/с, нельзя приписать полностью общему расширению Вселенной.

З. Эволюция галактик. По мере перехода ко все более далеким областям космоса мы наблюдаем, по-видимому, все более и более молодые галактики. Поэтому возможно, что светимость наиболее ярких *E*-галактик является функцией момента времени, в который происходит излучение: $L = L\ (t_1)$. Из (14.6.5) вытекает, что в этом случае следовало бы L в (14.6.9) заменить на

$$L\ (t_1) = L\ (t_0)\ [1 - E_0\ (t_0 - t_1) + \ldots] = L\ (t_0)\left[1 - \frac{E_0 z}{H_0} + \ldots\right],$$

где

$$E_0 \equiv \frac{\dot{L}\ (t_0)}{L\ (t_0)}. \qquad (14.6.11)$$

Результатом этого была бы замена q_0 в (14.6.9) на *эффективный параметр замедления*

$$q_0^{\text{эфф}} = q_0 - \frac{E_0}{H_0}; \qquad (14.6.12)$$

это означало бы, что при астрономических наблюдениях измеряется на самом деле $q_0^{\text{эфф}}$, а не q_0. Недавно Сэндейдж дал две различные оценки для скорости относительного изменения L наиболее ярких E-галактик; в наших обозначениях они равны [58]

$$E_0 = (0{,}04 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-9} \text{ (лет)}^{-1} \qquad (14.6.13)$$

и [59]

$$E_0 = (0{,}00 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-9} \text{ (лет)}^{-1}. \qquad (14.6.14)$$

Из дальнейшего будет видно, что скорость E_0 порядка $0{,}04 \times \times 10^{-9}$ (лет)$^{-1}$ может сильно повлиять на численное значение $q_0^{\text{эфф}}$.

Обращаясь вновь к измерениям красных смещений и фотометрических расстояний, следует вернуться к тому пункту нашего изложения, на котором мы остановились в § 3 этой главы, а именно к открытию Хабблом [16] в 1929 г. линейной связи между $d_\text{ф}$ и z. Хаббл получил оценки для расстояний до восемнадцати соседних галактик по видимым величинам их наиболее ярких звезд и представил свои результаты в виде диаграммы «расстояние — красное смещение»; красное смещение этих объектов было уже измерено Слайфером. [Абсолютные величины наиболее ярких звезд были известны из исследований галактик Местной Группы; расстояния до этих галактик были найдены по наблюдениям их цефеид, P — L-соотношения для которых в свою очередь были калиброваны Шепли из статистического анализа собственных движений и радиальных скоростей (об этом подробно говорилось в предыдущем параграфе).] Наиболее удаленные галактики из использованных Хабблом входили в скопление Девы и имели радиальную скорость 1000 км/с. Это ненамного больше, чем среднеквадратичная случайная скорость галактик, так что, точки Хаббла на диаграмме «$d_\text{ф}$ — z» были сильно разбросаны. Тем не менее он каким-то образом смог вывести «грубое линейное» соотношение между cz и $d_\text{ф}$ с параметром наклона

$$H_0 \approx 500 \text{ км/(с} \cdot \text{Мпс)} \approx (2 \cdot 10^9 \text{ лет})^{-1}.$$

В то же самое время Хьюмасон приступил к своей программе измерений красного смещения на значительно больших расстояниях; для изучения ярчайших галактик в скоплениях он использовал 100-дюймовый рефлектор обсерватории Маунт-Вильсон. Его первый результат — радиальная скорость галактики NGC7619 $cz = 37\,779$ км/с — был использован Хабблом в его

работе 1929 г. [16] для проверки линейности соотношения между cz и $d_ф$. Предполагая это соотношение линейным с параметром наклона 500 км/(с·Мпс), Хаббл получил, что NGC7619 находится на расстоянии 7,8 Мпс, а отсюда — что абсолютная звездная величина этой галактики $M = -17{,}65$, поскольку ее видимая величина равна $m = 11{,}8$. Хаббл вычислил также абсолютные величины для восемнадцати галактик, использованных им при определении H_0, и еще шести других объектов из Местной Группы по их расстояниям и видимым величинам и нашел затем, что M лежит в пределах от $-12{,}7$ до $-17{,}7$. Эту оценку и результат $M = -17{,}65$ можно считать довольно хорошо согласующимися, ибо, надо думать, абсолютная величина NGC7619, наиболее яркой галактики в скоплении, ближе к «верхней» границе ($M = -17{,}7$). Такое согласие означает, что скорость cz в грубом приближении действительно пропорциональна $d_ф$ вплоть до $z \approx 0{,}013$.

Затем к 1931 г. Хаббл и Хьюмасон совместно проверили [60] линейность связи между cz и $d_ф$ для скоростей до 20 000 км/с ($z = 0{,}067$), что привело к пересмотру значения H_0: оно получилось равным 550 км/(с·Мпс). Предел возможностей телескопа был достигнут в 1936 г., когда Хьюмасон [61] получил для скорости скопления II Большой Медведицы величину 42 000 км/с ($z = 0{,}14$). Изображая графически (с поправкой на поглощение и k-член) зависимость $\lg z$ от видимой фотографической величины пятой по яркости галактики в каждом из десяти скоплений, расположенных по расстоянию между скоплением Девы и БМ II, Хаббл [62] нашел, что параметр наклона близок к $^1/_5$, чего и следовало ожидать, если красное смещение является линейной функцией фотометрического расстояния вплоть до $z \approx 0{,}14$. Убедительного измерения q_0 пришлось ждать до тех пор, пока не был сооружен 200-дюймовый рефлектор на г. Паломар.

В 1936 г. Хаббл [62] дал новую оценку H_0, используя в качестве пятой ступени лестницы космических расстояний сто девять полевых галактик с cz до 19 070 км/с. За абсолютную звездную величину этих полевых галактик была взята средняя абсолютная величина $\overline{M} = -15{,}18$ для ста сорока пяти разрешимых галактик (из них только 29 принадлежали к выборке из ста девяти галактик), расстояние до которых могло быть определено по видимым величинам их наиболее ярких звезд. Из диаграммы «$m - \overline{M}$ как функция $\lg cz$» получилось $H_0 = 520$ км/(с·Мпс). Независимое определение H_0, основанное на наиболее ярких звездах 29-ти разрешимых полевых галактик, дало 526 км/(с·Мпс).

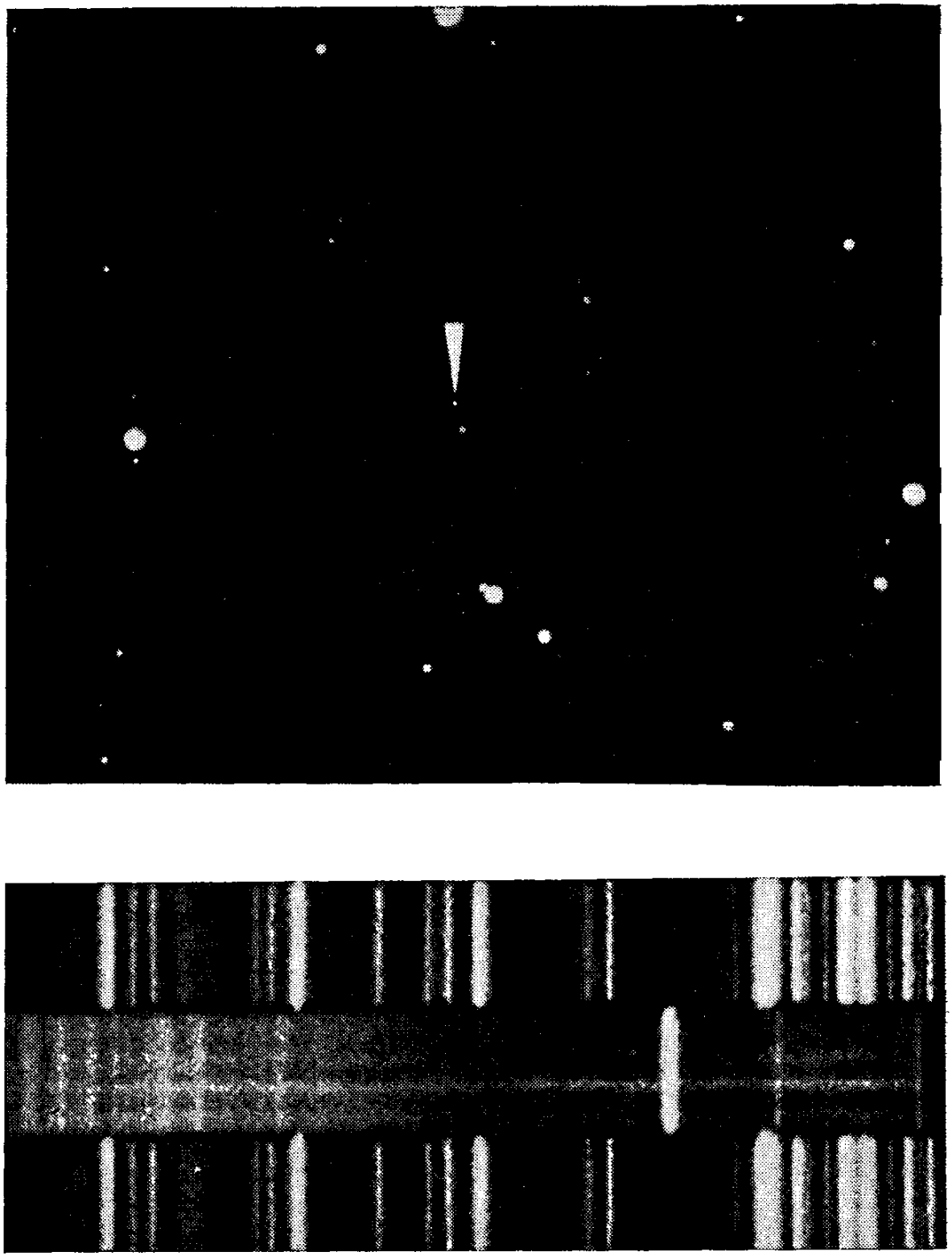
В 1950 г. обсерватория на г. Паломар вступила в строй, и к программе Хаббла приступили вновь. Как уже было отмечено в предыдущем параграфе, первым следствием наблюдений на г. Паломар была перекалибровка соотношения «период — светимость» для

цефеид, произведенная Бааде [33]. Это сразу удвоило масштабы внегалактических расстояний и уменьшило вдвое значение постоянной Хаббла — до 260 км/(с·Мпс). В 1956 г. Хьюмасон, Мэйолл и Сэндидж [63] опубликовали исчерпывающий обзор имевшихся в то время данных по красным смещениям и расстояниям. В предположении, что наиболее яркие галактики в скоплениях имеют те же абсолютные величины, что и М31, прямая, стягивающая кривую зависимости $m_v - k_v - A_v$ от $\lg cz$ для наиболее ярких галактик в восемнадцати скоплениях (вплоть до $z = 0{,}18$), соответствовала $H_0 = 180$ км/(с·Мпс). [Независимое определение, основанное на среднем красном смещении скопления Девы и на видимых величинах наиболее ярких звезд в галактике NGC4321 скопления Девы, дало $H_0 = 176$ км/(с·Мпс).] Кроме того, без каких-либо эволюционных поправок по кривизне графика зависимости $m_v - k_v - A_v$ от $\lg z$ получалось $q_0 = 3{,}7 \pm 0{,}8$. Годом позже Баум [53] сообщил об исследовании восьми скоплений с применением восьмицветной фотометрии для того, чтобы избежать необходимости в поправке k-членом; его результат $-q_0 = 1 \pm 0{,}5$. Затем Сэндидж [64] пересмотрел использованные Хабблом наиболее яркие звезды четвертой ступени лестницы расстояний и в 1958 г. пришел к заключению, что некоторые из этих «наиболее ярких» звезд являются областями H II, которые на 1,8 величины ярче, чем настоящие наиболее яркие звезды. Масштаб космических расстояний опять увеличился, и значение H_0 снизилось до 75 км/(с·Мпс). Дальнейший анализ привел Сэндиджа [65] в 1961 г. к $H_0 = 98$ км/(с·Мпс). Кроме того, из предварительных расчетов эволюции галактик Сэндидж [66] получил оценочные данные о том, что светимость галактик *убывает*, причем $E_0 = -0{,}8H_0$, и, следовательно, полученное Баумом значение для $q_0^{\text{эфф}}$ приводит к $q_0 = 0{,}2 \pm 0{,}5$.

Тем временем стали появляться данные о красных смещениях радиогалактик. В 1960 г. Минковский [67] обнаружил, что одна из них, 3C295, имеет красное смещение $z = 0{,}46$, самое большое из известных на сегодняшний день для любых галактик (фиг. 14.11). В 1968 г. Сэндидж [44] использовал эти новые красные смещения вместе с данными, полученными ранее Хьюмасоном, Мэйоллом, Сэндиджем [63] и Баумом [53] при исследовании наиболее ярких членов скоплений в количестве 41. Его результаты, пересчитанные на голубые звездные величины, хорошо описывались соотношением

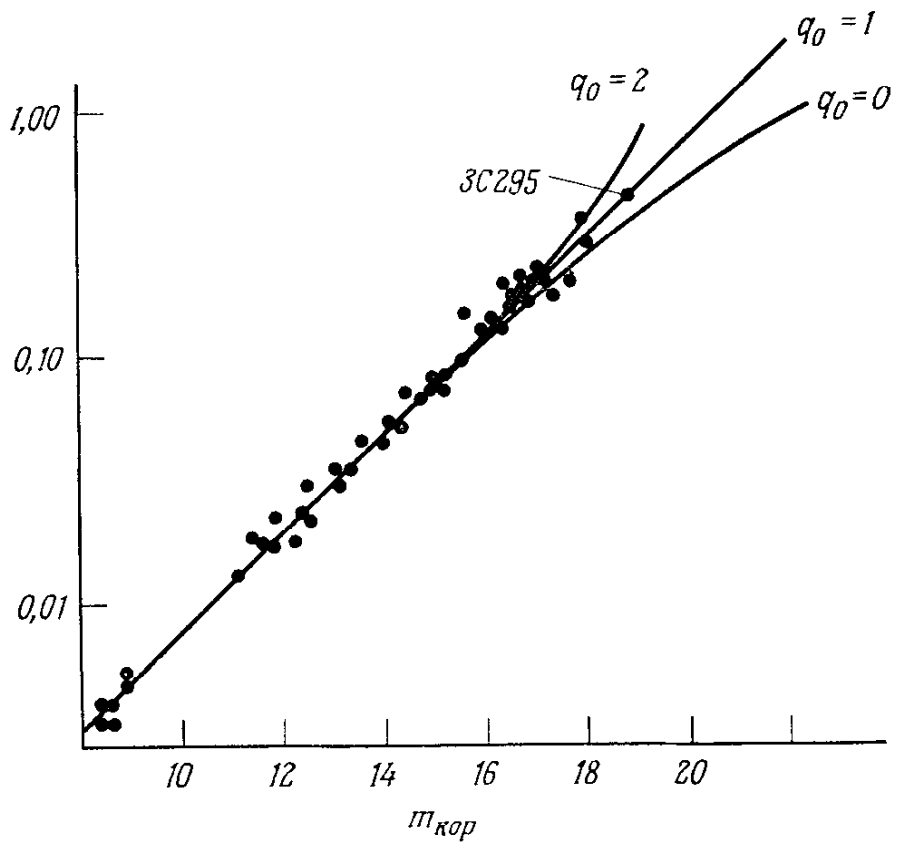
$$m_{B,\,\text{корр}} \equiv m_B - k_B - A_B = 5 \lg cz - 6{,}06, \qquad (14.6.15)$$

где $c \equiv 3 \cdot 10^5$ (фиг. 14.12). Дисперсия точек относительно этой кривой равна лишь $\pm 0{,}3$ звездной величины. Это означает, что наиболее яркие галактики действительно имеют одинаковую абсолютную звездную величину M_B. Таким образом, соотноше-



Фиг. 14.11. Радиогалактика 3С295 в созвездии Волопаса.

Спектр этой галактики, показанный внизу, имеет красное смещение $z = 0{,}46$, самое большое из наблюдавшихся до сих пор для галактик. Эти фотографии и спектрограмма получены на 200-дюймовом телескопе в обсерватории Маунт-Паломар.



Фиг. 14.12. Красные смещения и исправленные видимые величины для сорока двух наиболее ярких скоплений галактик.

Данные взяты из обзора Сэндиджа 1970 г. [44]. Видно, что кривые, соответствующие соотношению (14.6.10), согласуются с данными наблюдений.

ния (14.6.10) и (14.6.15) надежно определяют постоянную Хаббла:

$$5 \lg H_0 \text{ (км/(с·Мпс))} = M_B + 31{,}06. \qquad (14.6.16)$$

Определив расстояние до скопления Девы по шаровым скоплениям вместо наиболее ярких звезд, Сэндидж [44] получил оценку для абсолютной величины наиболее ярких E-галактик: $M_B = -21{,}68$, из которой следовало, что

$$H_0 = 75{,}3^{+19}_{-15} \text{ км/(с·Мпс)} = (13{,}0^{+3{,}7}_{-2{,}7} \cdot 10^9 \text{ лет})^{-1}. \qquad (14.6.17)$$

[Указанные здесь ошибки состоят из неопределенности в ± 0.3 звездной величины в видимой величине наиболее яркого шарового скопления в M87, из неопределенности в $\pm 0{,}2$ звездной величины в видимой величине галактики NGC 4472, выбранной в качестве наиболее яркой в скоплении Девы, и из разброса данных на $\pm 0{,}3$ звездной величины относительно кривой (14.6.15).] То, что точки на фиг. 14.12 до $z = 0{,}46$ неизменно ложатся на прямую, означает, что $q_0^{\text{эфф}}$ не может сильно отличаться от единицы. Пич [68] получает без учета эволюции

$$q_0 = 1{,}5 \pm 0{,}4, \qquad (14.6.18)$$

в то время как у Сэндиджа [69]

$$q_0 = 1{,}2 \pm 0{,}4. \qquad (14.6.19)$$

Что же мы в действительности узнали из этой сорокалетней программы астрономических наблюдений? Мало сомнений в том, что (14.6.15) хорошо выполняется в случае малых z, так что H_0 определяется равенством (14.6.16). Эти результаты мало изменились с 1936 г., когда появились работы Хаббла на эту тему. Что действительно претерпело драматические изменения, так это лестница расстояний, от которой зависят оценки M_B для галактик, отбираемых в скоплениях, и которая поэтому играет решающую роль в определении H_0. Согласно недавнему обзору Сэндиджа [58],

$$50 \text{ км/(с·Мпс)} \leqslant H_0 \leqslant 130 \text{ км/(с·Мпс)},$$

или

$$20 \cdot 10^9 \text{ лет} \geqslant H_0^{-1} \geqslant 7{,}5 \cdot 10^9 \text{ лет},$$

что является, по-видимому, надежной оценкой пределов, в которых возможны ошибки в определении H_0 из-за неопределенности лестницы расстояний. Другое изменение, которое произошло с 1936 г.,— это увеличение втрое верхнего предела доступных для измерения красных смещений. Теперь можно довольно уверенно полагать, что $q_0^{\text{эфф}}$ лежит между $^1/_2$ и $^3/_2$. Вместе с тем роль эффектов эволюции и селекции все еще очень неясна. Если $H_0 = 75$ км/(с·Мпс), а светимости галактик возрастают с относительной скоростью (14.6.13), то истинное значение параметра замедления q_0 связано с наблюдаемым $q_0^{\text{эфф}}$ соотношением

$$q_0 = q_0^{\text{эфф}} + 0{,}5.$$

Эта поправка очень ненадежна; достаточно вспомнить, что еще несколько лет назад ее вводили с противоположным знаком! Итак, в настоящее время мы знаем H_0 с точностью до множителя 2; кроме того, весьма похоже, что $q_0 > 0$, т. е. имеет место гравитационное торможение, но о точном численном значении q_0 мы знаем почти так же мало, как и в 1931 г. [Пока эта книга готовилась к печати, прошел слух, что значение H_0 опять «поползло» вниз, возможно, даже ниже 50 км/(с·Мпс).]

В 1963 г. М. Шмидтом было сделано открытие [70], которое поначалу вселило надежды на большой прогресс в нашем знании космического масштабного фактора. Начиная с 1960 г. некоторые радиоисточники были идентифицированы с *квазизвездными объектами* (*квазарами*) — оптическими источниками, угловые диаметры которых малы настолько, что они не могут быть разрешены телескопом в Паломаре. Шмидт обнаружил, что один из этих источников, 3C273, имеет красное смещение $z = 0{,}158$, что соответствует фотометрическому расстоянию 630 Мпс [если $H_0 = 75$ км/(с·Мпс)]. При таком удалении его абсолютная свети-

мость должна быть больше, чем у целой галактики, хотя его размеры должны быть менее 1500 пс из-за малости углового диаметра ($<0{,}5''$). С 1963 г. до настоящего времени было найдено несколько сотен квазаров [1]), значительная часть которых имеет $z > 1$, а несколько — $z > 2$. В то же время были проведены наблюдения квазаров при покрытии их Луной и при помощи радиоинтерферометра с большой базой и были обнаружены их короткопериодические вариации. Из этих исследований стало ясно, что в квазарах огромная энергия излучается областями менее 1 пс в диаметре. По этой причине открытие квазаров оживило интерес к теории гравитационного коллапса, уже обсуждавшегося нами в гл. 11. Это открытие дало бы также возможность продолжить эмпирическое соотношение между d_Φ и z в область действительно больших расстояний и красных смещений, если бы можно было найти какой-нибудь метод определения абсолютной светимости квазаров.

К сожалению, диаграмма «m_v — ln z» не обнаруживает какой-либо ясной корреляции видимой величины и красного смещения [71, 72]. Если квазары действительно находятся на космологических расстояниях (насчет этого есть еще некоторые сомнения [73, 86]), то их абсолютные светимости должны быть разбросаны в весьма широком диапазоне значений. Сравнение красных смещений и видимых величин квазаров станет интересным для космологии, лишь когда мы научимся отличать друг от друга квазары с разными абсолютными светимостями.

Тем не менее в принципе интересен ответ на вопрос, что узнали бы мы относительно k и $R(t)$, если бы смогли точно определить зависимость фотометрического расстояния d_Φ от красного смещения. Общее мнение, по-видимому, таково, что знание $d_\Phi(z)$ позволило бы однозначно определить k и $R(t)$. Но на самом деле это не так [74]. Определяющими теоретическими соотношениями в данном вопросе являются равенства (14.3.1), (14.3.6) и (14.4.14). Равенство (14.3.1) можно заменить эквивалентным дифференциальным уравнением

$$-\frac{1}{R(t_1)}\frac{dt_1}{dz} = (1-kr_1^2)^{-1/2}\frac{dr_1}{dz} \qquad (14.6.20)$$

с начальным условием

$$t_1 = t_0 \quad \text{при} \quad r_1 = 0. \qquad (14.6.21)$$

Равенства (14.3.6) и (14.4.14) служат лишь для исключения неизвестных $R(t_1)$ и r_1, после чего (14.6.20) принимает вид

$$(1+z)\frac{dt_1}{dz} = -[1-kR^{-2}(t_0)(1+z)^{-2}d_\Phi^2(z)]^{-1/2}\frac{d}{dz}[(1+z)^{-1}d_\Phi(z)].$$

[1]) Обзор результатов по квазарам дан в книге [71].

Отсюда можно одним интегрированием получить t_1 как функцию z:

$$t_1(z) = t_0 - \int_0^z (1+z')^{-1}\left[1 - kR^{-2}(t_0)\,(1+z')^{-2}\,d_\Phi^2(z')\right]^{-1/2} \times \times \frac{d}{dz'}\left[(1+z')^{-1}\,d_\Phi(z')\right]dz'$$

и затем из функционального уравнения

$$t = t_0 - \int_0^{[R(t_0)/R(t)-1]} dz\,(1+z)^{-1}\left[1 - kR^{-2}(t_0)\,(1+z)^{-2}\,d_\Phi^2(z)\right]^{-1/2} \times \times \frac{d}{dz}\left[(1+z)^{-1}\,d_\Phi(z)\right] \quad (14.6.22)$$

определить $R(t)$. Заметим, однако, что эта процедура дает решение для любых наперед заданных постоянных k, $R(t_0)$ или t_0. Следовательно, *из измерений фотометрического расстояния и красного смещения никак нельзя определить k или $R(t)$*, если не дополнить метрику Робертсона — Уолкера динамическими уравнениями для $R(t)$, что будет сделано в гл. 15. Эта любопытная неоднозначность может быть усмотрена также и в разложении $d_\Phi(z)$ по степеням z: член первого порядка зависит от $\dot{R}(t_0)/R(t_0)$, второго — от $\dot{R}(t_0)/R(t_0)$ и $\ddot{R}(t_0)/R(t_0)$, третьего — от $\dot{R}(t_0)/R(t_0)$, $\ddot{R}(t_0)/R(t_0)$, $\dddot{R}(t_0)/R(t_0)$ и $k/R^2(t_0)$; вообще члены порядка z^N с $N > 3$ зависят от $k/R^2(t_0)$ и от первых N логарифмических производных $R(t)$ при $t = t_0$. Следовательно, какое бы число производных $d_\Phi(z)$ ни было измерено, это все равно не даст возможности определить $k/R^2(t_0)$. Однако если *задать* значения k и $R(t_0)$, то из эмпирической связи d_Φ и z [формула (14.6.22)] можно вычислить $R(t)$ как функцию $t - t_0$.

В принципе вид функции $R(t)$ можно еще определить, наблюдая одну выделенную спектральную линию в течение достаточно длительного времени. Согласно (14.3.6) и (14.3.1), красное смещение сопутствующего источника изменяется во времени со скоростью

$$\frac{dz}{dt_0} = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_1)} - \frac{R(t_0)\,\dot{R}(t_1)}{R^2(t_1)}\,\frac{dt_1}{dt_0} = \frac{\dot{R}(t_0) - \dot{R}(t_1)}{R(t_1)}. \quad (14.6.23)$$

При $z \ll 1$ можно аппроксимировать $t_0 - t_1$ первым членом ряда (14.6.5); тогда (14.6.23) приводится к виду

$$\frac{1}{z}\,\frac{dz}{dt_0} \approx \frac{\ddot{R}(t_0)}{H_0 R(t_0)} = -q_0 H_0. \quad (14.6.24)$$

Измерить столь малые изменения красного смещения с помощью современной аппаратуры не представляется возможным [75].

§ 7. Подсчеты источников

Поскольку программа Хаббла пока еще не приводит к существенному прогрессу в определении космического масштабного фактора $R(t)$, будет естественно расширить рамки нашего подхода к этой проблеме и рассмотреть зависимость *числа* наблюдаемых радио- и оптических источников от видимой светимости и (или) красного смещения. Подход, основанный на подсчете числа источников, имеет два потенциальных преимущества по сравнению с программой Хаббла:

А. Появление радиотелескопов с очень большой апертурой и чувствительностью привело к обнаружению и разрешению тысяч слабых радиоисточников, большинство которых находится, по-видимому, на очень больших расстояниях. Большая часть этих источников пока еще не идентифицирована с оптическими источниками, так что их красные смещения еще не известны. [В разрешенных радиоисточниках не наблюдалось каких-либо отдельных линий (в радиодиапазоне), и поэтому их красные смещения могут быть измерены лишь оптически.] Наилучшее «применение», которое космологи могут найти для этих источников без знания их красных смещений,— это представить их число как функцию яркости.

Б. Для квазаров, о которых говорилось в предыдущем параграфе, измерения дают красные смещения до $z \approx 2$, но слишком большой разброс их абсолютных светимостей не позволяет определить фотометрическое расстояние d_Φ до них. Представляя число квазаров как функцию z и l или только z, можно устранить часть проблем, связанных с разбросом L.

При самом общем подходе следует начать с предположения о том, что в момент t_1 в единице объема имеется $n(L, t_1)\,dL$ источников с абсолютной светимостью между L и $L + dL$. Элемент собственного объема равен

$$dV = \sqrt{g}\,dr_1\,d\theta_1\,d\phi_1 = R^3(t_1)\,(1 - kr_1^2)^{-1/2}\,r_1^2\,dr_1 \sin\theta_1\,d\theta_1\,d\phi_1,$$

и, следовательно, число источников с абсолютной светимостью между L и $L + dL$, расположенных на расстоянии от r_1 до $r_1 + dr_1$, равно

$$dN = 4\pi R^3(t_1)\,(1 - kr_1^2)^{-1/2}\,r_1^2 n(t_1, L)\,dr_1\,dL. \qquad (14.7.1)$$

Координаты r_1 и t_1 связаны равенством (14.3.1), которое можно записать в виде

$$r_1 = r(t_1), \qquad (14.7.2)$$

где $r(t)$ — функция определенная равенством

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{R(t')} = \int_0^{r(t)} \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}}. \qquad (14.7.3)$$

Дифференцируя (14.7.3), получаем

$$dr_1 = -(1-k_1^2)^{1/2}\frac{dt_1}{R(t_1)};$$

отсюда и из (14.7.1) следует, что

$$dN = 4\pi R^2(t_1)\, r^2(t_1)\, n(t_1, L)\, |\, dt_1\, |\, dL. \tag{14.7.4}$$

Красное смещение и видимая светимость источника на расстоянии r_1 с абсолютной светимостью L в момент t_1 определены формулами (14.3.6) и (14.4.12):

$$z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1, \tag{14.7.5}$$

$$l = \frac{LR^2(t_1)}{4\pi r_1^2 R^4(t_0)}. \tag{14.7.6}$$

Следовательно, число источников с красным смещением, *меньшим* z, и с видимой светимостью, *большей* l, равно интегралу от (14.7.4) по всем L и по конечному промежутку t_1:

$$N(<z, >l) = \int_0^\infty dL \int_{\text{макс}\{t_z,\, t_l(L)\}}^{t_0} dt_1 4\pi r^2(t_1)\, R^2(t_1)\, n(t_1, L), \tag{14.7.7}$$

где нижний предел определяется условиями на красное смещение и видимую светимость:

$$R(t_z) \equiv \frac{R(t_0)}{1+z}, \tag{14.7.8}$$

$$\frac{r^2(t_l)}{R^2(t_l)} \equiv \frac{L}{4\pi l R^4(t_0)}. \tag{14.7.9}$$

Если красные смещения неизвестны, интересующей нас величиной будет $N(>l)$ — число источников с видимой светимостью, большей чем l; оно получается, если положить нижний предел в (14.7.7) равным именно $t_l(L)$. Наоборот, если неизвестны видимые светимости, то нужно рассматривать $N(<z)$ — число источников с красным смещением, меньшим z; чтобы вычислить его, нужно взять t_z нижним пределом в (14.7.7). [Вместе с тем подсчет числа реально наблюдаемых источников не является измерением $N(z)$, а дает для него лишь нижнюю границу; дело в том, что любые радио- или оптические телескопы детектируют лишь те источники, которые ярче некоторого минимума.]

Радиотелескопы не могут служить для измерения полной видимой светимости, но зато позволяют измерить *плотность потока* S — мощность, приходящуюся на единицу площади антенны и на единицу интервала частоты при фиксированной частоте. Плотность потока в момент t_1 для источника, расположенного

в точке r_1, равна

$$S(\nu) = \frac{P(\nu R(t_0)/R(t_1))\, R(t_1)}{R^3(t_0)\, r_1^2}, \qquad (14.7.10)$$

где P — мощность, излученная в единичный телесный угол и в единичном интервале частот. [См. формулу (14.4.35), учитывая, что $S \equiv l'$, $P \equiv L'/4\pi$.]

Следуя по тому же пути, который привел к (14.7.7), мы найдем, что число источников с красным смещением, меньшим z, и плотностью потока на частоте ν, большей S, равно

$$N(<z, >S; \nu) = \int_0^\infty dP \int_{\text{макс}\{t_z,\, t_S(P)\}}^{t_0} dt_1 4\pi r^2(t_1) \times$$

$$\times R^2(t_1)\, n\left(t_1, P, \nu\frac{R(t_0)}{R(t_1)}\right), \qquad (14.7.11)$$

где $t_S(P)$ определяется уравнением

$$\frac{r^2(t_S)}{R(t_S)} = \frac{P}{SR^3(t_0)}. \qquad (14.7.12)$$

Анализ результатов подсчета радиоисточников сильно облегчается тем фактом [62, 76, 77], что обычные радиоисточники имеют спектры

$$P \sim \nu^{-\alpha}, \qquad (14.7.13)$$

причем *спектральный индекс* α порядка 0,7—0,8. Ввиду этого число источников, у которых мощность при частоте ν лежит в интервале $[P, P + dP]$, дается выражением вида

$$n(t, P, \nu)\, dP = n\left(t, P\left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]^\alpha \nu_0\right) d\left(P\left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]^\alpha\right),$$

где ν_0 — некоторая произвольная фиксированная частота. Следовательно, плотность числа источников удовлетворяет следующему правилу подобия:

$$n(t, P, \nu) = \left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]^\alpha n\left(t, P\left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]^\alpha, \nu_0\right). \qquad (14.7.14)$$

Заменой переменной интегрирования P в (14.7.11) на $P\,[R(t_0)/R(t_1)]^\alpha$ мы можем отнести плотность числа объектов в подынтегральном выражении к фиксированной частоте ν; тогда

$$N(<z, >S; \nu) = \int_0^\infty dP \int_{\text{макс}\{t_z,\, t_{S\alpha}(P)\}} dt_1\, 4\pi r^2(t_1)\, R^2(t_1)\, n(t_1, P, \nu),$$

(14.7.15)

где $t_{S\alpha}(P)$ определяется из уравнения

$$r^2(t_{S\alpha})\left(\frac{R(t_{S\alpha})}{R(t_0)}\right)^{-1-\alpha}=\frac{P}{SR^2(t_0)}. \qquad (14.7.16)$$

Для $N(<z, >S; \nu)$ должно выполняться правило подобия:

$$N(<z, >S; \nu)=N\left(<z, >S\left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]^{\alpha}; \nu_0\right). \qquad (14.7.17)$$

Мы можем считать, что все источники действительно обладают спектром (14.7.13) с одним и тем же спектральным индексом с той степенью вероятности, с какой выполняется правило (14.7.17).

Если за время, которое нужно, чтобы свет самых далеких наблюдаемых нами объектов дошел до нас, не происходит рождения, распада или эволюции источников, то и $n(t, L)$, и $n(t, P, \nu)$ имеют простую зависимость от времени (14.2.17):

$$n(t, L)=\left[\frac{R(t_0)}{R(t)}\right]^3 n(t_0, L), \qquad (14.7.18)$$

$$n(t, P, \nu)=\left[\frac{R(t_0)}{R(t)}\right]^3 n(t_0, P, \nu). \qquad (14.7.19)$$

В этом случае подсчет наблюдаемых источников мог бы служить для получения информации о k и $R(t)$. Наоборот, при наличии космологической модели для k и $R(t)$ можно было бы использовать этот подсчет для вывода функциональной зависимости плотности числа источников от t и от L или P.

Понимание того, каких результатов следует ожидать от этих двух подходов к анализу наблюдаемых данных, может быть в значительной мере достигнуто при внимательном рассмотрении тех выделенных случаев, когда z мало́ либо когда l или S велики. В этих случаях нижние пределы интегралов по t_1 в (14.7.7) и (14.7.11) близки к t_0 и, следовательно, можно воспользоваться разложениями (14.6.1) и (14.6.6):

$$R(t_1)=R(t_0)\{1-H_0(t_0-t_1)+\ldots\},$$

$$r(t_1)=R^{-1}(t_0)(t_0-t_1)\left\{1+\frac{1}{2}H_0(t_0-t_1)+\ldots\right\}.$$

Разложим по t_0-t_1 также и плотности числа источников:

$$n(t_1, L)=n(t_0, L)\{1-\beta_0(L)H_0(t_0-t_1)+\ldots\}, \qquad (14.7.20)$$

$$n\left(t_1, P, \nu\frac{R(t_0)}{R(t_1)}\right)=$$

$$=n(t_0, P, \nu)\{1-[\beta_0(P, \nu)+2\alpha_0(P, \nu)]H_0(t_0-t_1)+\ldots\}, \qquad (14.7.21)$$

где β_0 определяет относительную скорость изменения плотности источников:

$$\beta_0(L)\equiv H_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\ln n(t, L)\right)_{t=t_0}, \qquad (14.7.22)$$

$$\beta_0(P, \nu)\equiv H_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\ln n(t, P, \nu)\right)_{t=t_0}, \qquad (14.7.23)$$

а α_0 — эффективный спектральный индекс:

$$2\alpha_0(P, \nu) \equiv -\nu\frac{\partial}{\partial\nu}\ln n(t_0, P, \nu). \qquad (14.7.24)$$

Смысл такого определения станет ясен ниже.) Тогда для t, близкого к t_0, получаем

$$\int_t^{t_0} dt_1\, 4\pi r^2(t_1)\, R^2(t_1)\, n(t_1, L) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} n(t_0, L)(t_0 - t)^3 \left\{1 - \frac{3}{4}[\beta_0(L)+1] H_0(t_0 - t) + \ldots\right\}, \qquad (14.7.25)$$

$$\int_t^{t_0} dt_1\, 4\pi r^2(t_1)\, R^2(t_1)\, n\left(t_1, P, \nu\frac{R(t_0)}{R(t_1)}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} n(t_0, P, \nu)(t_0 - t)^3 \left\{1 - \frac{3}{4}[\beta_0(P, \nu) + 2\alpha_0(P, \nu) + 1] \times \right.$$

$$\left. \times H_0(t_0 - t) + \ldots\right\}. \qquad (14.7.26)$$

При малых z нижний предел интеграла (14.7.25) определяется уравнением (14.7.8), из которого следует

$$H_0(t_0 - t_z) = z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \ldots .$$

Отсюда и из (14.7.7) следует, что число источников с красным смещением, меньшим z, равно

$$N(<z) = \frac{4\pi}{3} H_0^{-3} z^3 \int_0^{\infty} dLn(t_0, L) \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{3}{4}[\beta_0(L) + 2q_0 + 5]\, z + \ldots\right\}. \qquad (14.7.27)$$

При больших l нижний предел в (14.7.25) определяется уравнением (14.7.9); из него следует, что

$$t_0 - t_l(L) = \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2} \left\{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{LH_0^2}{4\pi l}\right)^{1/2} + \ldots\right\}.$$

Теперь формула (14.7.7) дает число источников с видимой светимостью, большей l:

$$N(>l) = \frac{4\pi}{3}(4\pi l)^{-3/2} \int_0^{\infty} dLn(t_0, L) \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{3}{4}[\beta_0(L) + 7]\left(\frac{LH_0^2}{4\pi l}\right)^{1/2} + \ldots\right\} L^{3/2}. \qquad (14.7.28)$$

Наконец, при больших S нижний предел интеграла (14.7.26) определяется уравнением (14.7.12), из которого следует

$$t_0 - t_S(P) = \left(\frac{P}{S}\right)^{1/2}\left\{1 - \left(\frac{PH_0^2}{S}\right)^{1/2} + \ldots\right\}.$$

В этом случае из (14.7.11) получается следующее выражение для числа источников с большей чем S плотностью потока на частоте ν:

$$N(>S, \nu) = \frac{4\pi}{3} S^{-3/2} \int_0^\infty dPn(t_0, P, \nu) P^{3/2} \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{3}{4}[\beta_0(P, \nu) + 2\alpha_0(P, \nu) + 5]\left(\frac{PH_0^2}{S}\right)^{1/2} + \ldots\right\}. \quad (14.7.29)$$

Если все источники имеют спектры вида (14.7.13), то из (14.7.14) и (14.7.24) получаем

$$\alpha_0(P, \nu) = -\frac{\alpha}{2}\left[1 + P\frac{\partial}{\partial P}\ln n(t_0, P, \nu)\right]; \quad (14.7.30)$$

тогда интегрированием по частям можно убедиться в допустимости подстановки

$$\alpha_0(P, \nu) \to \alpha \quad (14.7.31)$$

в формуле (14.7.29).

Из анализа этих результатов видно, что измеренные значения $N(<z)$ при $z \ll 1$ могли бы быть использованы для вычисления параметра замедления q_0, если известен эволюционный параметр β_0, в то время как измерение $N(>l)$ или $N(>S, \nu)$ для больших l или S, наоборот, не дает никакой информации относительно q_0, какие бы предположения относительно β_0 ни делались.

Если предположить, что нет никакой эволюции, то зависимость n от времени определяется формулой (14.7.18) или формулой (14.7.19) и разложением (14.6.1); тогда из (14.7.22) и (14.7.23) следует, что

$$\beta_0(L) = \beta_0(P, \nu) = -3 \quad \text{(без эволюции)}. \quad (14.7.32)$$

Отсюда и из (14.7.27) — (14.7.29) получаем

$$N(<z) = \frac{4\pi}{3} H_0^{-3} z^3 \int_0^\infty dLn(t_0, L)\left\{1 - \frac{3}{2}(q_0 + 1)z + \ldots\right\}, \quad (14.7.33)$$

$$N(>l) = \frac{4\pi}{3}(4\pi l)^{-3/2} \int_0^\infty dLn(t_0, L)\left\{1 - 3\left(\frac{LH_0^2}{4\pi l}\right)^{1/2} + \ldots\right\} L^{3/2}, \quad (14.7.34)$$

и для рассматриваемых нами спектров

$$N(>S, \nu) = \frac{4\pi}{3} S^{-3/2} \int_0^\infty dPn(t_0, P, \nu) \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{3}{2}(\alpha+1)\left(\frac{PH_0^2}{S}\right)^{1/2} + \ldots\right\} P^{3/2}. \quad (14.7.35)$$

Таким образом, если пренебречь эволюцией, мы получаем ясные предсказания о том, что $N(>l)$ должно убывать с ростом l *медленнее*, чем $l^{-3/2}$, и, поскольку $\alpha > 0$, $N(>S, \nu)$ должно убывать с ростом S медленнее, чем $S^{-3/2}$.

Таблица 14.1

Основные каталоги радиоисточников *

Обсерватория	Каталог	ν, МГц	Число источников	$S_{мин}$, 10^{-26} Вт× ×м$^{-2}$·Гц$^{-1}$
Кембридж	3C	159	471	8
	3CR	178	—	9
	4C	178	4843	2
	5C	408	276	0,025
	WKB	38	1069	14
	RN	178	87	0,25
	NB	81,5	558	1
Миллс-Кросс	MSH	86	2270	7
Паркс	PKS	408, 1410, 2650	297	4
	PKS	408, 1410	247	0,5
	PKS	408, 1410	564	0,3
	PKS	408, 1410	628	0,4
	PKS	635, 1410, 2650	397	1,5
Оуэнс-Вэлли	CTA	906	106	—
	CTB, CTBR	960	110	—
	CTD	1421	—	1,15
Грин-Бэнк	NRAO	750, 1400	726	(3C и 3CR)
	NRAO	750, 1400	458	0,5
Болонья	B1	408	629	1
	B2	408	3235	0,2
Обсерватория штата Огайо	O	1415	128	2, 0,5
	O	1415	236	0,37
	O	1415	1199	0,3
	O	1415	2101	0,2
Вермийон-Ривер	VRO	610,5	239	0,8
	VRO	610,5	625	0,8
Радиообсерватория Доминион	DA	1420	615	2
Двингелоо — Грин-Бэнк	DW	1417	188	2,3
Аресибо	AO	430	25	—

* Разные каталоги относятся к различным, частично перекрывающимся участкам неба; они не являются совершенно полными в пределах своих участков и плотностей потоков. Более подробные данные и ссылки см. в [89], стр. 241 и далее.

Оказывается, однако, что эти результаты противоречат наблюдениям [1]). Свидетельствующие об этом обозрения радиоисточников приведены в табл. 14.1. Они приводят к функции $N(>S, \nu)$, которая убывает с ростом S (при $S > 5 \cdot 10^{-26}$ Вт·м$^{-2}$·Гц$^{-1}$) приблизительно как $S^{-1,8}$ и определенно *быстрее*, чем $S^{-3/2}$ [79, 80] [2]). Из этого следует вывод, что эволюцию учитывать нужно. Согласно (14.7.29), для того чтобы $N(>S, \nu)$ убывало как $S^{-3/2}$, требуется выполнение неравенства

$$\beta_0 < -2\alpha_0 - 5 \approx 6{,}5, \qquad (14.7.36)$$

из чего следует, что плотность числа источников должна убывать быстрее, чем $R(t)^{-6,5}$.

К аналогичному выводу приводят подсчеты числа радиоисточников как функции их углового диаметра. Исходя из распределения размеров радиоисточников в каталоге 3С, Лонгейр и Пули [83] вычислили, какого распределения угловых диаметров следует ожидать у более слабых источников из каталога 5С. Их результат не согласуется с наблюдениями, каким бы ни выбиралось значение параметра q_0, характеризующего уменьшение истинной плотности числа источников вследствие эволюции.

Если эволюция столь существенна, сколь это следует из подсчетов источников, мы, очевидно, не можем узнать много о $R(t)$ из этих подсчетов. Мы вернемся к программе применения подсчета источников для изучения эволюции источников в следующей главе, где мы рассмотрим динамическую модель для масштабной функции $R(t)$.

§ 8. Стационарная космологическая модель

До сих пор мы следовали «космологическому принципу», утверждающему, что Вселенная пространственно изотропна и однородна. Т. Бонди и Г. Голд [84] пошли дальше и предположили, что во Вселенной выполняется «абсолютный космологический принцип», согласно которому Вселенная выглядит одинаково не только во всех точках и во всех направлениях, но также и *во все моменты времени*. Это предположение приводит к *стационарной модели Вселенной*. Приблизительно одновременно с Бонди и Голдом такую же модель предложил Ф. Хойл [85], который ввел изменения в структуру тензора энергии-импульса, входящего в уравнение Эйнштейна. Здесь мы будем следовать подходу Бонди и Голда как более соответствующему общему духу этой главы, но позже вернемся к теории Хойла (в последней главе).

[1]) Обсуждение подсчетов галактик в оптической астрономии см. в работе [78].

[2]) Результаты подсчетов источников на более высоких частотах (они, по-видимому, согласуются с законом $S^{-3/2}$) см. в [81, 82].

В § 6 этой главы было показано, что «постоянная» Хаббла $\dot{R}(t_0)/R(t_0)$ является наблюдаемым параметром и, следовательно, в стационарной модели она не должна зависеть от момента времени наблюдения t_0. Обозначая через H это не зависящее от t_0 значение постоянной Хаббла, имеем

$$\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = H \quad \text{при всех } t,$$

и отсюда

$$R(t) = R(t_0) \exp\{H(t - t_0)\}. \tag{14.8.1}$$

В этой модели параметр замедления принимает постоянное значение

$$q \equiv -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = -1. \tag{14.8.2}$$

Чтобы определить k, обратимся к общему соотношению (14.6.22) между $R(t)$ и функцией фотометрического расстояния от красного смещения $d_\Phi(z)$; теперь это соотношение запишется следующим образом:

$$t_0 - t = \int_0^{\{\exp[H(t_0-t)]-1\}} dz\,(1+z)^{-1}\,[1 - kR^{-2}(t_0) \times$$

$$\times (1+z)^{-2} d_\Phi^2(z)]^{1/2} \frac{d}{dz}[(1+z)^{-1} d_\Phi(z)]. \tag{14.8.3}$$

Поскольку функция $d_\Phi(z)$ наблюдаемая, она не может теперь зависеть от t_0. Поэтому, чтобы интеграл зависел только от $t - t_0$, а не от t и t_0 по отдельности, необходимо, чтобы

$$k = 0. \tag{14.8.4}$$

Следовательно, метрика имеет вид

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t_0)\, e^{2H(t-t_0)}\{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\}. \tag{14.8.5}$$

Этот вывод может встретить возражения на том основании, что метрика (14.8.5) получена как особый случай метрики Робертсона — Уокера, вывод которой в § 1 и 2 этой главы был основан на определении космологического времени, не имеющем смысла для неразвивающейся Вселенной. Этого затруднения можно избежать, если рассматривать (14.8.5) как предельный случай метрики Вселенной, скорость эволюции которой очень мала. Более удовлетворительный подход состоит в том, чтобы получить (14.8.5), исходя непосредственно из предположения, что все четырехмерное пространство-время максимально симметрично. Это предположение, как показано в § 3 гл. 13, приводит к метрике (13.3.41), которая отличается от метрики (14.8.5) лишь тем, что в ней множитель $R(t_0)\exp(-Ht_0)$ включен в радиальную

координату r. Из сравнения (13.3.41) и (14.8.5) видно, что постоянная риманова кривизна четырехмерного пространства-времени в стационарной космологической модели

$$K = H^2. \tag{14.8.6}$$

Пространство-время искривлено, хотя *пространство* плоское. Наиболее замечательной особенностью стационарной модели является не ее метрика, а необходимость *непрерывного рождения* вещества. Согласно (14.2.21), собственное расстояние между любыми двумя сопутствующими галактиками растет как $R(t)$ и, следовательно, если требуется, чтобы среднее число галактик в единице объема было постоянным, то должны возникать новые галактики, заполняющие «пустоты» в расширяющейся сопутствующей системе координат.

Чтобы формально описать это, вспомним, что в сопутствующей системе координат r, θ, ϕ, t вектор тока галактик и полный тензор энергии-импульса определяются формулами (14.2.11) — (14.2.14):

$$J_G{}^{\mu} = n_G U^{\mu},$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\, U^{\mu} U^{\nu} + p g^{\mu\nu}$$

причем $U^t = 1$, $U^r = U^{\theta} = U^{\phi} = 0$. В соответствии с идеей стационарной модели мы должны теперь считать n_G, p и ρ постоянными в пространстве и во времени; тогда $J_G{}^{\mu}$ и $T^{\mu\nu}$ не сохраняются:

$$J_G{}^{\mu}{}_{;\mu} = R^{-3}(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\left(R^3(t)\, J_G{}^{t}\right) = 3 n_G H, \tag{14.8.7}$$

$$T^{\mu t}{}_{;\mu} = R^{-3}(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\left(R^3(t)\,[p+\rho]\right) = 3(p+\rho)H, \tag{14.8.8}$$

т. е. сопутствующий наблюдатель, пользующийся локально-инерциальной системой координат, будет свидетелем рождения галактик со скоростью $3H$ на одну имеющуюся галактику и возникновения энергии с относительной скоростью $3H$ на единицу суммы массы и энтальпии. В грубом приближении нынешняя плотность Вселенной порядка 10^{-6} нуклон/см^3, так что при $H^{-1} = 10^{10}$ лет должно было бы происходить рождение 10^{-16} нуклон/см^3 в год. Стационарная модель ничего не говорит нам ни относительно того, в какой форме появляется рождающееся вещество — в виде водорода или протонов и электронов, или нейтронов,— ни относительно места появления этого нового вещества — в окрестности ли «старого» вещества или в глубинах межгалактического пространства. Однако в ядрах многих галактик, по-видимому, действительно протекают бурные процессы, и эти ядра представляются естественными кандидатами на то, чтобы быть тем местом, где происходит непрерывное творение.

Стационарная космологическая модель дает весьма определенные предсказания относительно корреляции фотометрического расстояния и красного смещения. Согласно (14.3.1), если свет покидает сопутствующий источник в момент t_1 и приходит в начало координат в момент t_0, координата источника r_1 определяется при $k = 0$ равенством

$$r_1 = r(t_1) \equiv \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = H^{-1}R^{-1}(t_0)\{\exp[H(t_0 - t_1)] - 1\}. \quad (14.8.9)$$

Красное смещение такого источника дается формулой (14.3.6)

$$z = \exp[H(t_0 - t_1)] - 1, \quad (14.8.10)$$

и, следовательно, его фотометрическое расстояние в соответствии с (14.4.14) равно

$$d_{\text{ф}}(z) = H^{-1}z(1 + z). \quad (14.8.11)$$

Можно проверить, что формулы (14.8.9) — (14.8.11) согласуются с формулами (14.6.6), (14.6.4) и (14.6.8) при подходящем выборе значения параметра замедления: $q_0 = -1$. Это значение, по-видимому, *не* согласуется с тем q_0, которое получается из наблюдаемой зависимости $d_{\text{ф}}$ от z (см. § 6 этой главы).

Из (14.4.22) и (14.8.11) найдем расстояние по «угловому диаметру» в стационарной модели:

$$d_{\text{угл}}(z) = \frac{H^{-1}z}{1+z}, \quad (14.8.12)$$

откуда видно, что $d_{\text{угл}}(z)$ стремится к конечному пределу H^{-1} при $z \to \infty$. Таким образом, объекты со все большими красными смещениями должны выглядеть все более тусклыми, но их угловые диаметры не должны уменьшаться далее некоторого минимального значения. При $H^{-1} = 3 \cdot 10^9$ пс галактика диаметром 10^4 пс при любом удалении никогда не будет видна под углом зрения, меньшим 0,6″.

При подсчете источников с красным смещением, меньшим чем z, нужно начинать с момента t_z, определяемого уравнением (14.7.8):

$$t_z = t_0 - H^{-1}\ln(1 + z). \quad (14.8.13)$$

Момент времени, с которого начинается подсчет источников с видимой светимостью, большей чем l, задается уравнением (14.7.9), которое с учетом (14.8.9) можно записать в виде

$$\exp[H(t_0 - t_l)]\{\exp[H(t_0 - t_l)] - 1\} = \left(\frac{LH^2}{4\pi l}\right)^{1/2}.$$

Его решением является

$$t_l(L) = t_0 - H^{-1}\ln\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{LH^2}{4\pi l}}\right)^{1/2}\right]. \quad (14.8.14)$$

Интеграл по t_1 в (14.7.7) можно взять, и тогда для числа источников с красным смещением, меньшим чем z, и видимой светимостью, большей чем l, получим

$$N(<z, >l) = \int_0^\infty n(L) \min\{V(t_z), V(t_l(L))\}\, dL, \quad (14.8.15)$$

где объем V определяется как

$$V(t) = \int_t^{t_0} 4\pi r^2(t_1) R^2(t_1)\, dt_1 = 4\pi H^{-3} \left\{ H(t_0 - t) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} + 2\exp[-H(t_0 - t)] - \frac{1}{2}\exp[-2H(t_0 - t)] \right\} \quad (14.8.16)$$

и $n(L)\, dL$ есть постоянная во времени собственная плотность источников с абсолютными светимостями между L и $L + dL$.

Число источников с красным смещением, меньшим z, получим как частный случай формулы (14.8.15):

$$N(<z) = 4\pi H^{-3} n \left\{ \ln(1+z) - \frac{z(1+3z/2)}{(1+z)^2} \right\}, \quad (14.8.17)$$

где n — полное число источников:

$$n \equiv \int_0^\infty n(L)\, dL.$$

Этот результат не зависит от каких-либо предположений относительно распределения светимостей источников, а какое-либо изменение во времени плотности источников или распределения светимостей в стационарной Вселенной, конечно, невозможно. Однако из имеющейся в настоящее время ограниченной статистики следует, что (14.8.17) *не* согласуется с наблюдаемым распределением красных смещений квазаров [86]. В частности, наблюдаемое распределение красных смещений квазаров имеет ясно различимый максимум [71] в окрестности $z = 1{,}95$, которого нет у выражения (14.8.17). Все же надо отметить, что вообще наблюдаемое значение $N(>z)$ должно быть меньше, чем теоретическое предсказание (14.8.17), поскольку часть источников не учитывается ввиду чрезмерной малости их радио- или оптической яркости.

В качестве другого частного случая формулы (14.8.15) приведем выражение для числа источников с видимой светимостью,

большей чем l:

$$N(>l)=4\pi H^{-3}\int\limits_0^\infty dLn(L)\left\{\ln\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{LH^2}{4\pi l}}\right)^{1/2}\right]-\right.$$
$$-\frac{3}{2}+2\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{LH^2}{4\pi l}}\right)^{1/2}\right]^{-1}-$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{LH^2}{4\pi l}}\right)^{1/2}\right]^{-1}\right\}. \qquad (14.8.18)$$

В отличие от $N(<z)$ этот результат зависит от деталей поведения функции распределения $n(L)$.

Для сравнения с наблюдениями значительно интереснее число радиоисточников с яркостью, большей S, на частоте ν. Если все источники имеют одинаковые спектры $P\sim\nu^{-\alpha}$, то, согласно (14.7.15), число таких источников

$$N(>S;\ \nu)=\int\limits_0^\infty n(P,\ \nu)\,V(t_{S\alpha}(P))\,dP, \qquad (14.8.19)$$

где $n(P,\ \nu)\,dP$ — число источников, истинная мощность которых на частоте ν лежит между P и $P+dP$, $V(t)$ берется из (14.8.16) и $t_{S\alpha}(P)$ определяется уравнением (14.7.16), которое теперь имеет вид

$$\exp\left[\frac{1}{2}(3+\alpha)H(t_0-t_{S\alpha})\right]-$$
$$-\exp\left[\frac{1}{2}(1+\alpha)H(t_0-t_{S\alpha})\right]=\left(\frac{PH^2}{S}\right)^{1/2}. \qquad (14.8.20)$$

При наблюдаемом спектральном индексе $\alpha\approx 0{,}7$ нельзя получить явного решения этого уравнения. Все же из (14.8.20), (14.8.19) и (14.8.16) следует, что $N(<S,\ \nu)$ убывает медленнее, чем $S^{-3/2}$, при всех яркостях источников. Это противоречит сделанным подсчетам, которые дают убывание более быстрое, чем $S^{-3/2}$, если $S>4\cdot10^{-26}$ Вт·м$^{-2}$·Гц$^{-1}$ [83], и только при меньших S начинается убывание более медленное, чем $S^{-3/2}$. В предыдущем параграфе было отмечено, что в этом пункте с наблюдениями не согласуются также и результаты нестационарных космологических моделей, но в них это несоответствие можно устранить, вводя эволюцию плотности источников, тогда как в стационарной космологии никакое изменение плотности во времени не допускается.

Проверить правильность полученных нами формул можно следующим образом. Величины $\beta_0(L)$ и $\beta_0(P,\ \nu)$, определяемые формулами (14.7.22), (14.7.23), в стационарной модели должны быть равны нулю. С учетом этого для спектров вида (14.7.13) и при $q_0=-1$ из (14.7.27) — (14.7.29) получаем числа «близ-

лежащих» источников

$$N(<z) = \frac{4\pi}{3} H^{-3} z^3 n \left\{1 - \frac{9}{4} z + \ldots\right\}, \qquad (14.8.21)$$

$$N(>l) = \frac{4\pi}{3} (4\pi l)^{-3/2} \int_0^\infty dL n(L) \left\{1 - \frac{21}{4} \left(\frac{LH^2}{4\pi l}\right)^{1/2} + \ldots\right\} L^{3/2}, \qquad (14.8.22)$$

$$N(>S, \nu) = \frac{4\pi}{3} S^{-3/2} \int_0^\infty dP n(P \quad \nu) \times \times \left\{1 - \frac{3}{4}(2\alpha + 5)\left(\frac{PH^2}{S}\right)^{1/2} + \ldots\right\} P^{3/2}, \qquad (14.8.23)$$

что согласуется со степенными разложениями общих формул (14.8.17) — (14.8.19).

Стационарная модель, по-видимому, не согласуется с зависимостью d_Φ от z или с числами источников $N(<z)$ и $N(>S, \nu)$, получаемыми из наблюдений. В некотором смысле это несогласие является достоинством стационарной модели: она является единственной в космологии моделью, предсказания которой настолько определенны, что ее можно отвергнуть даже на основании тех ограниченных наблюдательных данных, которые имеются в нашем распоряжении [1]). Стационарная модель столь притягательна, что многие ее приверженцы все еще пребывают в надежде на то, что аргументы против нее исчезнут при совершенствовании наблюдений. Однако если обсуждаемое в следующей главе космическое микроволновое (реликтовое) излучение действительно является излучением черного тела, то очень трудно усомниться в том, что Вселенная развивалась из некоторого более плотного и более горячего состояния в прошлом.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Там, где не оговаривается иное, астрономические данные берутся из книги Allen C. W., Astrophysical Quantities, 2nd ed., The Athlone Press, 1955. (См. перевод: *К. У. Аллен*, Астрофизические величины, ИЛ 1960.)

Общая космология

Bondi H., Cosmology, Cambridge University Press, 1960.
Davidson W., *Narlikar J. V.*, Cosmological Models and Their Observational Validation, в книге Astrophysics, W. A. Benjamin, 1969.
Heckmann O., *Schucking E.*, Relativistic Cosmology, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. L. Witten, Wiley, 1962, p. 438.

Hodge P. W., Galaxies and Cosmology, McGraw-Hill, 1966.
La Stracture et l'Evolution de l'Univers, Eleventh Solvay Conference, ed. R. Stoops, Brussels, 1958.
McVittie G. C., General Relativity and Cosmology, University of Illinois Press, 1965. (См. перевод 1-го изд.: *Мак-Витти Г. К.*, Общая теория относительности и космология, ИЛ, 1961.)
Rindler W., Relativistic Cosmology, Physics Today, November, 1967, p. 23.
Robertson H. P., *Noonan T. W.*, Relativity and Cosmology, W. B. Saunders Co., 1968.
Schucking E. L., Cosmology, в книге Relativistic Theory and Astrophysics. 1. Relativity and Cosmology, ed. J. Ehlers, American Mathematical Society, 1967. p. 218.
Sciama D. W., Modern Cosmology, Cambridge University Press, 1971 (см. перевод: *Шама Д.*, Современная космология, «Мир», 1973).
Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics, and Cosmology, Clarendon Press, 1934.
Zeldovich Ya. B., Survey of Modern Cosmology, в книге Advances in Astronomy and Astrophysics, Vol. 3, ed. Z. Kopal, Academic Press, 1965.
* *Зельдович Я. Б.*, *Новиков И. Д.*, Релятивистская астрофизика, «Наука», 1967.
* *Peebles P. J. E.*, Physical Cosmology, Princeton University Press, 1971.

История астрономии и космологии XX века

Baade W., Evolution of Stars and Galaxies, ed. C. Payne-Gaposchkin, Harvard University Press, 1963.
Dickson F. P., The Bowl of Night, M.I.T. Press, 1968.
Fernie J. D., The Period-Luminosity Relation: A Historical Review, Pub. Astron. Soc. Pac., 81, 707 (1969).
North J. D., The Measure of the Universe, Clarendon Press, 1965.
Source Book in Astronomy 1900—1950, ed. H. Shapley, Harvard University Press, 1960.

Шкала космических расстояний и программа измерений Хаббла

Basic Astronomical Data, ed. K. A. Strand, University of Chicago Press, 1963.
Sandage A., Cosmology — A Search for Two Numbers, Physics Today, February, 1970, p. 34.
Sandage A., в книге Problems of Extragalactic Research, Macmillan, 1962, p. 359.
Sandage A., The Ability of the 200-Inch. Telescope to Discriminate between Selected World Models, Ap. J., **133**, 355 (1961) [1]).

Квазары

Burbidge G., *Burbidge M.*, Quasi-Stellar Objects, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1967.
Green L. C., Quasars Six Years Later, Sky and Telescope, May, 1969.
Schmidt M., Lectures on Quasi-Stellar Objects, в книге Relativity and Astrophysics. 1. Relativity and Cosmology (см. выше), p. 203.
Schmidt M., Quasi-Stellar Objects, в книге Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 7, ed. L. Goldberg, Annual Reviews, Inc., Palo Alto, 1969, p. 527.

[1]) Ap. J. = Astrophys. Journ. — *Ред.*

Подсчеты радиоисточников

Brecher K., Burbidge G., Strittmayer P. A., Counts of Sources and Theories, Comments on Astrophysics and Space Physics, 3, 99 (1971).
Ryle M., The Counts of Radio Sources, в книге Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 6, ed. L. Goldberg, Annual Reviews, Inc., Palo Alto, 1968, p. 249.
Scheuer P. A., Radio Astronomy and Cosmology, в книге Stars and Stellar Systems, Vol. IX, Galaxies and the Universe (в печати).
Smith F. G., Radio Galaxies and Quasars, в книге Contemporary Physics — Trieste Symposium 1968, ed. A. Solam, Vol. 1, Vienna, 1969, p. 459.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Robertson H. P.*, Ap. J., **82**, 284 (1935); **83**, 187, 257 (1936).
2. *Walker A. G.*, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **42**, 90 (1936).
3. *Friedmann A.*, Zs. Phys., **10**, 377 (1922); **21**, 326 (1924) [см. переводы этих статей: УФН, **80**, 439, 447 (1963)].
4. *Gödel A.*, Rev. Mod. Phys., **21**, 447 (1949).
5. *Taub A.*, Ann. Math., **53**, 474 (1951).
6. *Charlier C. V. I.*, Arkiv. Math. Astr. Fys., **4**, No. 24 (1908); **16**, No. 22 (1922).
7. *De Vaucouleurs G.*, Science, **167**, 1203 (1970).
8. *Zwicky F.*, Pub. Ast. Soc. Pacific, **50**, 218 (1938).
9. *Zwicky F., Rudnicki K.*, Ap. J., **137**, 707 (1963); Zs. Astrophys., **64**, 246 (1966).
10. *Abell G. O.*, Ap. J., Suppl., **3**, 211 (1958).
11. *Oort J. H.*, в книге La Structure et l'Evolution de l'Univers, XI Solvay Conference, Brussels, 1958, p. 163.
12. *Eddington A. S.*, The Mathematical Theory of Relativity, 2nd ed., Cambridge University Press, 1924, p. 162 (см. перевод: *Эддингтон А.*, Математическая теория относительности, Гос. науч. тех. изд., 1933).
13. *Wirtz C.*, Astr. Nachr., **206**, 109 (1918).
14. *Wirtz C.*, Astr. Nachr., **215**, 349 (1921); **216**, 451 (1922); **222**, 21 (1924); Scientia, **38**, 303 (1925).
15. *Lundmark K.*, Stock. Acad. Hand., **50**, No. 8 (1920); Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **84**, 747 (1924); **85**, 865 (1925).
16. *Hubble E. P.*, Proc. Nat. Acad. Sci., **15**, 168 (1927).
17. *Schwarzchild K.*, Vjschr. Astr. Geo. Lpz., **35**, 337 (1900).
18. *Robertson H. P.*, Zs. Astrophys., **15**, 69 (1937); **15**, 69 (1938).
19. *Hubble E.*, Ap. J., **71**, 231 (1930).
20. *Schwarzchild M.*, Structure and Evolution of the Stars, Princeton University Press, 1958, Ch. IV (см. перевод: *Шварцшильд М.*, Строение и эволюция звезд, ИЛ, 1961, гл. IV).
21. *Baade W.*, Astron. J., **100**, 137 (1944).
22. *Hodge P. W., Wallerstein G.*, Pub. Astron. Soc. Pac., **78**, 411 (1966).
23. *Arp H.*, Ap. J., **135**, 311, 971 (1962).
24. *Sandage A.*, Ap. J., **135**, 349 (1962).
25. *Christy R.*, Ap. J., **144**, 108 (1966).
26. *Plaut L.*, в книге Galactic Structure, ed. A. Blaauw and M. Schmidt, University of Chicago Press, 1965, p. 267.
27. *Leavitt H. S.*, Harvard Circular No. 173 (1912); перепечатано в книге Source Book of Astronomy, ed. H. Shapley, Harvard University Press, 1966.
28. *Russel H. N.*, Science, **37**, 651 (1913).
29. *Hertzsprung E.*, Astron. Nachr., **196**, 201 (1913).

30. *Shapley H.*, Ap. J., **48**, 89 (1918).
31. *Wilson R. E.*, Ap. J., **35**, 35 (1923); 89, 218 (1939).
32. *Hubble E. P.*, Annual Reports of the Mount Wilson Observatory, 1923—1924; Observatory, 48, 139 (1925).
33. *Baade W.*, Trans. Int. Astron. Un., 8, 397 (1952).
34. *Fernie J. D.*, Pub. Ast. Soc. Pac., **81**, 707 (1969).
35. *Wallerstein G.*, Ap. J., **127**, 583 (1958).
36. *Kraft R. P.*, Ap. J., **134**, 616 (1961).
37. *Kraft R. P.*, *Schmidt M.*, Ap. J., **137**, 249 (1962).
38. *Fernie J. D.*, Astron. J., **72**, 1327 (1967).
39. *Sandage A.*, *Tammann G. A.*, Ap. J., **151**, 531 (1968).
40. *Jung J.*, Astron. and Astrophys., **6**, 130 (1970).
41. *Sandage A.*, *Tammann G. A.*, Ap. J., **167**, 293 (1971).
42. *Hodge P. W.*, Galaxies and Cosmology, McGraw-Hill, 1966, Ch. 12.
43. *Hubble E.*, Ap. J., **84**, 270 (1936).
44. *Sandage A.*, Ap. J., **152**, L149 (1968); Observatory, 88, 91 (1968).
45. *Racine R.*, J.R.A.S. (Canada), в печати.
46. *de Vaucouleurs G.*, Ap. J., **159**, 435 (1970).
47. *Scott E. L.*, Ap. J., **62**, 248 (1957).
48. *Peebles P. J. E.*, Ap. J., **153**, 13 (1968).
49. *Peach J. V.*, Nature, **223**, 1140 (1969).
50. *Peebles P. J. E.*, Nature, **224**, 1093 (1969).
51. *Peterson B. A.*, Ap. J., **159**, 333 (1970); Nature, **227**, 54 (1970).
52. *Oke J. B.*, *Sandage A.*, Ap. J., **154**, 21 (1968).
53. *Baum W. A.*, Ap. J., **62**, 6 (1957).
54. *Sandage A.*, Ap. J., **152**, L149 (1968).
55. *Bahcall J. N.*, *May R. M.*, Ap. J., **152**, 89 (1968).
56. *de Vaucouleurs G.*, Ap. J., **63**, 253 (1968).
57. *Kristian J.*, *Sachs R. K.*, Ap. J., **143**, 379 (1966).
58. *Sandage A.*, Physics Today, February 1970, p 34.
59. *Sandage A.*, Observatory, 88, 91 (1968).
60. *Hubble E. P.*, *Humason M. L.*, Ap. J., **74**, 43 (1931).
61. *Humason M. L.*, Ap. J., **83**, 10 (1936).
62. *Hubble E. P.*, Ap. J., **84**, 158, 270, 516 (1936).
63. *Humason M. L.*, *Mayall N. U.*, *Sandage A. R.*, Astron. J., **61**, 97 (1956).
64. *Sandage A.*, Ap. J., **127**, 513 (1958).
65. *Sandage A.*, I.A.U. Symposium No. 15, 359 (1961).
66. *Sandage A.*, Ap. J., **134**, 916 (1961).
67. *Minkowski R.*, Ap. J., **132**, 908 (1960).
68. *Peach J. V.*, Ap. J., **159**, 753 (1970).
69. *Sandage A.*, Yearbook of the Carnegie Institute of Washington, **65**, 163 (1966).
70. *Schmidt M.*, Nature, **197**, 1040 (1963).
71. *Burbidge G.*, *Burbidge M.*, Quasi-Stellar Objects, W.H. Freeman and Co., 1967.
72. *Hoyle F.*, *Burbidge G. R.*, Nature, **210**, 1346 (1966).
73. *Burbidge G. R.*, *Burbidge M.*, Ap. J., **148**, L107 (1967).
74. *Weinberg S.*, Ap. J., **161**, L233 (1970).
75. *Sandage A.*, Ap. J., **136**, 319 (1962).
76. *Kellerman K. J.*, Ap. J., **140**, 969 (1964).
77. *Pauliny-Toth I. I.*, *Wade C. M.*, *Heeschen D. S.*, Ap. J. Suppl., **13**, 65 (1966).
78. *Peebles P. J. E.*, Comments Ap. and Sp. Phys., **3**, 173 (1971).
79. *Gower J. F. R.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **133**, 151 (1966).
80. *Ryle M.*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., **6**, 249 (1968).
81. *Kellermann K. J.*, *Davis M. M.*, *Pauliny-Toth I. I.*, Ap. J. Lett., **170**, L1 (1971).

82. *Shimmins A. T., Bolton J., Walle J. V.*, Nature, **217**, 818 (1968).
83. *Longair M. S., Pooley G. G.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **145**, 121 (1969)
84. *Bondi H., Gold T.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **108**, 252 (1948).
85. *Hoyle F.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **108**, 372 (1948); **109**, 365 (1949).
86. *Schmidt M.*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., **7**, 527 (1969); Ap. J., **151** 393 (1968); **162**, 371 (1970).
87. *Gunn J. E.*, Ap. J., **164**, L113 (1971).
88. *Burbidge G.*, Nature, **233**, 36 (1971).
89. *Pacholczyk A. G.*, Radio Astrophysics, W. H. Freeman and Co., 1970.

Теперь вообразите поздний час,
Когда ползущий гул и волны мрака
Корабль вселенной буйно заливают.

В. Шекспир, Генрих V

Глава 15
КОСМОЛОГИЯ; ЭТАЛОННАЯ МОДЕЛЬ

В предыдущей главе мы подготовили координатную сетку для пространственно-временной карты Вселенной. Теперь нам нужно заполнить эту карту островами вещества и морями излучения — тем, что составляет физическое содержимое Вселенной.

Большей частью мы по-прежнему будем исходить из предположения об изотропии и однородности, к которому теперь еще добавим уравнения поля Эйнштейна. Это приводит к критической зависимости будущего Вселенной от ее кривизны: открытая Вселенная будет расширяться вечно, в закрытой — нынешнее расширение когда-нибудь прекратится и сменится общим сжатием. Кривизна в свою очередь критически зависит от плотности энергии в настоящий момент времени ρ_0: Вселенная является открытой или закрытой в зависимости от того, больше ρ_0, чем некоторая критическая плотность $\rho_{кр}$ порядка 10^{-29} г/см^3, или меньше ее. По-видимому, основной вклад в ρ_0 дает масса покоя обычного вещества — нейтронов и протонов. Если это верно, то при параметре замедления q_0, меньшем чем $^1/_2$, Вселенная — открытая и $\rho < \rho_{кр}$, а при $q_0 > {}^1/_2$ Вселенная — закрытая и $\rho_0 > \rho_{кр}$; этим объясняется то внимание к измерению q_0, которое было проявлено в предыдущей главе. Однако получающееся из наблюдений значение $q_0 \approx 1$ вступает в противоречие с наблюдаемой плотностью вещества в галактиках, которая значительно меньше $\rho_{кр}$. Это противоречие привело к усиленным поискам признаков межгалактического газа. Эти поиски, однако, пока совершенно безуспешны.

Обращаясь к прошлому, мы обнаруживаем, что эволюция однородной изотропной Вселенной в любой модели, подчиняющейся уравнениям Эйнштейна, должна начинаться с некоторой сингулярной плотности. При отсчете от этой сингулярности возраст Вселенной должен быть меньше H_0^{-1}, а если $q_0 > {}^1/_2$, то меньше $2/(3H_0)$. По измерениям радиоактивности и из теории эволюции звезд получаются оценки возраста Вселенной от $7 \cdot 10^9$ до $16 \cdot 10^9$ лет, но трудно думать, что этот возраст много меньше $2/(3H_0)$.

Наиболее известным реликтом раннего горячего состояния Вселенной является 2,7-градусный микроволновый фон, предсказанный в 1950 г. и обнаруженный в 1965 г. Совокупность имеющихся данных пока вполне согласуется с тем, что излучение совершенно изотропно, а его спектр является планковским спектром абсолютно черного тела. Зная температуру излучения в настоящее время, мы можем проследить тепловую историю Вселенной назад во времени вплоть до возраста в несколько минут и рассчитать образование сложных ядер в первичном сверхплотном огненном шаре. В итоге получается довольно четкое предсказание, что около 27% первичных нуклонов должны были слиться в ядра He^4. Одни измерения количества гелия в космосе подтверждают этот вывод, другие противоречат ему. Другим отпечатком ранних стадий эволюции Вселенной является наблюдаемая нами космическая морфология: звезды собраны в галактики, галактики — в скопления галактик, а скопления образуют более или менее однородный газ.

Современное теоретическое истолкование того, как образовалась такая структура, далеко от законченности, но ясно одно — фон излучения играл в этом важную роль. Можно также рассуждать и относительно самых первых нескольких секунд истории Вселенной, когда температура была достаточна для образования в большом числе мезонов, барионов и антибарионов, однако пока не видно какого-либо способа для проверки выводов из такого рода соображений.

Итак, мы дали краткое описание того, что можно назвать «эталонной моделью» Вселенной, основанной на космологическом принципе и уравнениях Эйнштейна. Еще одно «эталонное» предположение, играющее важную роль в рассуждениях § 7—11 этой главы, состоит в том, что удаленные галактики, так же как и наша, состоят из барионов, а не из антибарионов. Часто высказывалась мысль, что поскольку барионное число, так же как и заряд, сохраняется точно, то число барионов и антибарионов во Вселенной должно быть одинаково, так же как и число положительных и отрицательных зарядов. Однако следует иметь в виду, что в действительности барионное число не похоже на заряд: с зарядом связано существование дальнодействующей силы, чего, как мы знаем, нет для барионного числа. Действительно, в конечной Вселенной полный заряд *должен быть* равен нулю: в этом легко убедиться, интегрируя уравнение Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon$ по объему Вселенной; относительно барионного числа такого рода заключение ниоткуда не следует. Даже если полное барионное число Вселенной равно нулю, должно было каким-то образом произойти разделение барионов и антибарионов, и большинство рассуждений этой главы, во всяком случае, применимо к развитию Вселенной после этих событий.

Конечно, вполне возможно, что эталонная модель частично или полностью неверна. Однако ее ценность заключается не в ее непоколебимой справедливости, а в том, что она служит основой для обсуждения огромного разнообразия наблюдаемых данных. Обсуждение этих данных в контексте эталонной космологической модели может привести к уяснению их значения для космологии независимо от того, какая модель окажется правильной в конечном счете. Некоторые другие возможные модели Вселенной будут рассмотрены в следующей главе.

§ 1. Уравнения Эйнштейна

Обсуждение динамической космологии начнем с рассмотрения связей, налагаемых уравнениями Эйнштейна на метрику изотропной и однородной Вселенной. В соответствии с результатами § 2 гл. 14 мы можем выбрать метрику Робертсона — Уокера

$$g_{tt} = -1, \quad g_{it} = 0, \quad g_{kj} = R^2(t)\,\tilde{g}_{ij}(x). \tag{15.1.1}$$

Здесь t — космическая временная координата, i и j пробегают три сопутствующие пространственные координаты r, θ, φ; $\tilde{g}_{ij}$ — метрика трехмерного максимально симметричного пространства:

$$\tilde{g}_{rr} = (1 - kr^2)^{-1}, \quad \tilde{g}_{\theta\theta} = r^2, \quad \tilde{g}_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta,$$
$$\tilde{g}_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \tag{15.1.2}$$

причем k равно $+1$, -1 или 0.

Неисчезающими компонентами аффинной связности для этой метрики являются только

$$\Gamma^t_{ij} = R\dot{R}\tilde{g}_{ij}, \tag{15.1.3}$$

$$\Gamma^i_{tj} = \frac{\dot{R}}{R}\,\delta^i_j, \tag{15.1.4}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{-1})^{il}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial\tilde{g}_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial\tilde{g}_{jk}}{\partial x^l}\right) \equiv \tilde{\Gamma}^i_{jk}. \tag{15.1.5}$$

Компоненты тензора Риччи равны

$$R_{tt} = \frac{3\ddot{R}}{R}, \tag{15.1.6}$$

$$R_{ti} = 0, \tag{15.1.7}$$

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2)\,\tilde{g}_{ij}, \tag{15.1.8}$$

где $\widetilde{R}_{ij}$ — тензор Риччи *трехмерного пространства*, вычисляемый относительно метрики $\widetilde{g}_{ij}$:

$$\widetilde{R}_{ij}=\frac{\partial\widetilde{\Gamma}^k_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial\widetilde{\Gamma}^k_{ij}}{\partial x^k}+\widetilde{\Gamma}^k_{li}\widetilde{\Gamma}^l_{kj}-\widetilde{\Gamma}^k_{ij}\widetilde{\Gamma}^l_{kl}. \tag{15.1.9}$$

Можно не тратить время на вычисление $\widetilde{R}_{ij}$ по формуле (15.1.9), если вспомнить, что в максимально симметричном пространстве, согласно (13.2.4),

$$\widetilde{R}_{ij}=-2k\widetilde{g}_{ij}. \tag{15.1.10}$$

Используя это выражение в (15.1.8), получим пространственные компоненты *пространственно-временного* тензора Риччи:

$$R_{ij}=-(R\ddot{R}+2\dot{R}^2+2k)\,\widetilde{g}_{ij}. \tag{15.1.11}$$

Тензор энергии-импульса в рассматриваемом случае должен иметь такой же вид, как для идеальной жидкости:

$$T_{\mu\nu}=pg_{\mu\nu}+(p+\rho)\,U_\mu U_\nu, \tag{15.1.12}$$

где p и ρ зависят только от t, а U^μ определяется равенствами (14.2.13) и (14.2.14):

$$U^t=1, \qquad U^i=0. \tag{15.1.13}$$

Правая часть уравнений Эйнштейна равна, таким образом,

$$S_{\mu\nu}\equiv T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda=\frac{1}{2}(\rho-p)\,g_{\mu\nu}+(p+\rho)\,U_\mu U_\nu. \tag{15.1.14}$$

Отсюда с учетом (15.1.1), (15.1.13) получим

$$S_{tt}=\frac{1}{2}(\rho+3p), \tag{15.1.15}$$

$$S_{it}=0, \tag{15.1.16}$$

$$S_{ij}=\frac{1}{2}(\rho-p)\,R^2\widetilde{g}_{ij}. \tag{15.1.17}$$

При подстановке в уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu}=-8\pi GS_{\mu\nu}$$

выражений (15.1.6), (15.1.7), (15.1.11) и (15.1.15) — (15.1.17) t-t-компонента дает уравнение

$$3\ddot{R}=-4\pi G\,(\rho+3p)\,R; \tag{15.1.18}$$

чисто пространственные компоненты сводятся к одному уравнению

$$R\ddot{R}+2\dot{R}^2+2k=4\pi G\,(\rho-p)\,R^2, \tag{15.1.19}$$

а остальные компоненты являются тождеством $0=0$.

Исключая $\ddot{R}$ из (15.1.18) и (15.1.19), получаем дифференциальное уравнение первого порядка для $R(t)$:

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2. \tag{15.1.20}$$

Кроме того, имеется еще уравнение сохранения энергии (14.2.19):

$$\dot{p}R^3 = \frac{d}{dt}\{R^3[\rho + p]\},$$

или, что то же самое,

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3pR^2. \tag{15.1.21}$$

Если дано уравнение состояния $p = p(\rho)$, его можно использовать для определения ρ как функции R. Если, например, основной вклад в плотность энергии Вселенной дает нерелятивистское вещество с пренебрежимо малым давлением, из (15.1.21) следует, что

$$\rho \sim R^{-3} \quad \text{при} \quad p \ll \rho. \tag{15.1.22}$$

Если же в плотности энергии преобладает вклад релятивистских частиц, таких, как фотоны, то $p = \rho/3$, и из (15.1.21) получаем

$$\rho \sim R^{-4} \quad \text{при} \quad p = \frac{\rho}{3}. \tag{15.1.23}$$

Если зависимость ρ от R известна, можно, решив уравнение (15.1.20), определить $R(t)$ для всех моментов времени. Таким образом, *фундаментальными уравнениями динамической космологии являются уравнения Эйнштейна* (15.1.20), *уравнение сохранения энергии* (15.1.21) *и уравнение состояния.* Основанные на метрике Робертсона — Уокера космологические модели, в которых $R(t)$ определяется из указанных уравнений, называются моделями Фридмана [1].

[Кстати, полученное таким способом решение $R(t)$ автоматически удовлетворяет уравнениям (15.1.18) и (15.1.19), так как, дифференцируя (15.1.20) по времени и используя (15.1.21), получаем

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G\dot{R}}{3R}\left[-\rho R^2 + \frac{d}{dR}(\rho R^3)\right] = \frac{8\pi G\dot{R}}{3R}(-\rho R^2 - 3pR^2),$$

что эквивалентно уравнению (15.1.18). Уравнение (15.1.19) тривиально следует тогда из (15.1.18) и (15.1.20). Возможность работать с одним уравнением (15.1.20) вместо двух — (15.1.18) и (15.1.19) — является, конечно, следствием того, что эти два уравнения не являются функционально независимыми, а связаны через тождества Бианки с уравнением сохранения энергии (15.1.21).]

Относительно прошлого и будущего расширения Вселенной можно многое узнать уже из простого исследования уравнений (15.1.18) — (15.1.21) без какой-либо конкретизации уравнения состояния. Из (15.1.18) видно, что до тех пор, пока величина $\rho + 3p$ остается положительной, «ускорение» $\ddot{R}/R$ отрицательно. Из того, что в настоящее время $R > 0$ (по определению) и $\dot{R}/R > 0$ (потому что мы наблюдаем красные, а не голубые смещения), следует, что кривая $R(t)$ обращена выпуклостью вверх и *должна проходить через значение* $R(t) = 0$ в *некоторый конечный момент времени в прошлом.* Будем считать, что в этот момент $t = 0$, так что

$$R(0) = 0. \tag{15.1.24}$$

Текущий момент времени t_0 есть в таком случае время, отсчитываемое от этой сингулярности, и будет справедливо называть его возрастом Вселенной. Если бы величина $\ddot{R}(t)$ была равна нулю при $0 < t < t_0$, то функция $R(t)$ в точности равнялась бы $R(t_0)\, t/t_0$ и возраст Вселенной t_0 был бы точно равен времени Хаббла $H_0^{-1} = R(t_0)/\dot{R}(t_0)$. Если $\ddot{R}(t) < 0$ при $0 < t < t_0$, *возраст Вселенной должен быть меньше, чем время Хаббла*:

$$t_0 < H_0^{-1}. \tag{15.1.25}$$

Обращаясь к эволюции Вселенной в будущем, мы видим из уравнения (15.1.21), что, пока давление не становится отрицательным, ρ должно убывать с ростом R по крайней мере как R^{-3} и, следовательно, при $R \to \infty$ правая часть уравнения (15.1.20) убывает по меньшей мере как R^{-1}. При $k = -1$ функция $\dot{R}^2(t)$ остается положительно-определенной все время, поэтому $R(t)$ все время растет:

$$R(t) \to t \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad \text{если } k = -1.$$

То же самое справедливо и при $k = 0$, но рост $R(t)$ медленнее, чем t. Если $k = +1$, $\dot{R}^2(t)$ достигает нуля, когда $\rho R^2 = 3/(8\pi G)$. Тогда, поскольку функция $\ddot{R}$ — отрицательно-определенная, $R(t)$ начнет убывать и в итоге достигнет значения $R = 0$ за некоторый конечный промежуток времени в будущем. Следовательно, ход космической истории качественно определяется знаком пространственной кривизны: *если* $k = -1$ *или* $k = 0$, *Вселенная будет расширяться вечно, если же* $k = +1$, *то расширение со временем прекратится и затем последует сжатие к сингулярному состоянию с* $R = 0$.

Космологический принцип в сочетании с уравнениями Эйнштейна вносит ясность в некоторые из глубоких вопросов, поставленных в свое время Ньютоном и Махом (§ 3 гл. 1).

Допустим, мы хотим изучать некоторую физическую систему S, такую, как Солнечная система или ньютоново вращающееся ведро, размеры которых много меньше космического масштабного фактора R. Можно представить себе S заключенной в сферическую полость, отделяющую S от остальной расширяющейся Вселенной, и, поскольку размеры этой полости много меньше R, можно спокойно считать, что в ней нет ничего, кроме системы S. Если бы не было S, гравитационное поле в полости было бы сферически-симметричным с $R_{\mu\nu} = 0$ и, следовательно, по теореме Биркгофа (§ 7 гл. 11), метрика в полости была бы плоской, эквивалентной метрике Минковского $\eta_{\mu\nu}$. Поскольку система S не слишком велика, мы можем рассматривать ее гравитационное поле как возмущение к $\eta_{\mu\nu}$, игнорируя всю материю вне нашей полости, и изучать поведение S, пользуясь ньютоновской или релятивистской механикой. На вопрос, как выделяются инерциальные системы отсчета, теперь мы можем ответить: единственными системами отсчета, в которых Вселенная в целом выглядит сферически-симметричной и, следовательно, применима теорема Биркгофа, являются системы, имеющие началом центр нашей полости и не вращающиеся по отношению к расширяющемуся облаку «типичных» галактик. Инерциальной системой является любая система, движущаяся с постоянной скоростью и без вращения относительно систем отсчета, в которых Вселенная выглядит сферически-симметричной.

Эти замечания приводят к альтернативному выводу [2, 3] динамических уравнений расширяющейся Вселенной. Если мы мысленно построим где-либо во Вселенной сопутствующую сферическую поверхность, то при ее радиусе, много меньшем, чем $R(t)$, галактики внутри сферы будут двигаться под влиянием лишь своих гравитационных полей, а гравитационным полем остальной Вселенной можно будет пренебречь. Тогда мы можем представлять себе Вселенную как состоящую из всюду однородно расширяющегося ньютоновского газа. Любая частица газа будет иметь траекторию

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)\frac{R(t)}{R(t_0)},$$

где $R(t)$ — масштабный фактор, общий для всего газа. Отметим, что наблюдатель, находящийся на любой из частиц газа, видит этот газ таким же, каким его видит наблюдатель, расположившийся в начале системы отсчета. Кроме того, «сопутствующими» координатами частицы газа являются $r^i \equiv x^i(t_0)$, а вовсе не $x^i(t)$. Гравитационная потенциальная энергия V такой частицы возникает от взаимодействия с материей внутри сферы радиусом $|\mathbf{x}(t)|$ и с центром в начале системы отсчета:

$$V(t) = -\frac{4\pi}{3}|\mathbf{x}(t)|^3\rho(t)\frac{mG}{|\mathbf{x}(t)|} = -\frac{4\pi}{3}mG|\mathbf{x}(t_0)|^2\rho(t)\frac{R^2(t)}{R^2(t_0)},$$

здесь m — масса частицы и $\rho(t)$ — однородная плотность газа. Кинетическая энергия частицы равна

$$T(t)=\frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}(t)|^2=\frac{1}{2}m|\mathbf{x}(t_0)|^2\frac{\dot{R}^2(t)}{R^2(t_0)},$$

и, следовательно, ее полная энергия

$$E\equiv T(t)+V(t)=\frac{1}{2}m\frac{|\mathbf{x}(t_0)|^2}{R^2(t_0)}\left[\dot{R}^2(t)-\frac{8\pi G}{3}\rho(t)R^2(t)\right].$$

При постоянном E это равенство совпадает с уравнением (15.1.20), если мы положим, что энергия частицы

$$E=-\frac{1}{2}m\frac{|\mathbf{x}(t_0)|^2}{R^2(t_0)}k. \tag{15.1.26}$$

Если $k=-1$, то $E>0$ и тяготение не может воспрепятствовать рассеянию газа в бесконечность с конечной асимптотической скоростью. При $k=0$ имеем $E=0$, и газ все еще может неограниченно расширяться. Если $k=+1$, то $E<0$ и расширение рано или поздно прекратится и сменится сжатием.

Хотя ньютоновская космология может воспроизвести главные результаты, получаемые из уравнений Эйнштейна, она существенно неполна по нескольким причинам. Мы вынуждены прибегать к общей теории относительности, чтобы оправдать пренебрежение всей материей вне сферы радиусом $|\mathbf{x}(t)|$ при вычислении гравитационного потенциала в точке $\mathbf{x}(t)$. Мы не имеем права пользоваться ньютоновской механикой, когда среда сама состоит из частиц с релятивистскими *локальными* скоростями. Наконец, только в рамках общей теории относительности мы можем правильно интерпретировать наблюдения световых сигналов в терминах космического масштабного фактора $R(t)$.

§ 2. Плотность и давление во Вселенной в настоящее время

Давление и плотность энергии во Вселенной в настоящий момент времени задаются уравнениями (15.1.18) и (15.1.19):

$$\rho_0=\frac{3}{8\pi G}\left(\frac{k}{R_0^2}+H_0^2\right), \tag{15.2.1}$$

$$p_0=-\frac{1}{8\pi G}\left[\frac{k}{R_0^2}+H_0^2(1-2q_0)\right]. \tag{15.2.2}$$

Здесь R_0 — нынешнее значение космического масштабного фактора $R(t)$, H_0 и q_0 — постоянная Хаббла и параметр замедления, определенные в § 3 гл. 14 как современные значения $\dot{R}/R$ и $-R\ddot{R}/\dot{R}^2$. Из (15.2.1) следует, что пространственная кривизна k/R^2 положительна или отрицательна в зависимости от того,

больше или меньше ρ_0, чем *критическая плотность*[1])

$$\rho_{кр} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1{,}1 \cdot 10^{-29} \left(\frac{H_0}{75 \text{ км/(с·Мпс)}} \right)^2 \text{ г/см}^3. \qquad (15.2.3)$$

Как мы увидим ниже, имеются достаточные основания думать, что в плотности энергии нынешней Вселенной доминирует вклад нерелятивистского вещества с давлением

$$p_0 \ll \rho_0. \qquad (15.2.4)$$

Коль скоро это так, то формула (15.2.2) дает выражение для пространственной кривизны через наблюдаемые параметры H_0 и q_0:

$$\frac{k}{R_0^2} = (2q_0 - 1) H_0^2, \qquad (15.2.5)$$

а из (15.2.1) получаем отношение современной плотности к критической:

$$\frac{\rho_0}{\rho_{кр}} = 2q_0. \qquad (15.2.6)$$

При $q_0 > {}^1/_2$ Вселенная имеет положительную кривизну и $\rho_0 > \rho_{кр}$, если же $q_0 < {}^1/_2$, ее кривизна отрицательна и $\rho_0 < \rho_{кр}$. Если верить значениям $q_0 \approx 1$ и $H_0 \approx 75$ км/(с·Мпс), полученным из соотношения между красным смещением и светимостью (§ 6 гл. 14), то с необходимостью получается, что плотность Вселенной около $2\rho_{кр}$, т. е. около $2 \cdot 10^{-29}$ г/см^3.

К сожалению, этот результат не согласуется с наблюдаемой плотностью масс галактик [2]). Массы спиральных галактик в пределах 15 Мпс могут быть определены из динамического анализа зависимости их окружных скоростей от расстояния до центра галактики. Массы нескольких эллиптических галактик были вычислены по теореме вириала [7, 8], что дало

$$M = \frac{2\langle v^2 \rangle}{G\langle d^{-1} \rangle}, \qquad (15.2.7)$$

где $\langle v^2 \rangle$ — среднеквадратичная скорость относительно центра масс и $\langle d^{-1} \rangle$ — среднее обратное расстояние между звездами. Полные массы пар галактик можно определить статистически из их относительных скоростей и расстояний в предположении, что ориентация пар относительно луча зрения случайна.

Все три описанных выше метода дают для массы галактики формулу вида

$$M = \frac{\mu V^2 D}{G}, \qquad (15.2.8)$$

где V — некоторая характеристическая скорость внутреннего движения, D — характеристический размер изучаемого объекта

[1]) В 1975 г. популярны следующие значения: $H_0 = 50$ км/(с·Мпс) и $\rho_{кр} = 5 \cdot 10^{-30}$ г/см$^3 \approx 3$ нуклона/м^3. — *Прим. ред.*

[2]) Последние обзоры по этому вопросу [4—6].

и μ — безразмерное число порядка единицы, зависящее от особенностей используемого метода и от того, какой объект исследуется. Характеристическое расстояние D измеряется по соответствующему угловому размеру δ и космологическому красному смещению z с использованием формул (14.4.15) и (14.6.7), что при $z \ll 1$ дает

$$D = \frac{z\delta}{H_0}. \tag{15.2.9}$$

(Для близких галактик «расстояние по угловому диаметру» D/δ можно определить не по красному смещению, а по видимым величинам наиболее ярких звезд, наиболее ярких шаровых скоплений и т. д. Однако если такого рода определения расстояний образуют часть космической лестницы расстояний, используемой для вычисления постоянной Хаббла H_0, то любая погрешность в этих расстояниях отразится на значении H_0 и, следовательно, D по-прежнему будет вести себя как H_0^{-1} при изменении H_0.) Скорости внутреннего движения V измеряются непосредственно по распределению красного смещения относительно среднего значения z для данной галактики. Массы, определенные таким образом, принято выражать через отношения массы к светимости M/L. Абсолютная светимость L определяется через видимую светимость l формулами (14.4.12) и (14.6.7), из которых при малых z получается

$$L = 4\pi l z^2 H_0^{-2}. \tag{15.2.10}$$

Отсюда и из (15.2.8) — (15.2.9) следует, что отношение M/L, определенное тремя описанными выше методами, *пропорционально* принятому нами значению H_0.

Если взять $H_0 = 75$ км/(с·Мпс), то для эллиптических галактик M/L примерно в 50 раз больше, чем $M_\odot/L_\odot$ — отношение массы Солнца к его абсолютной светимости. Оценки M/L для спиральных галактик дают величины от $1M_\odot/L_\odot$ до $20M_\odot/L_\odot$. Согласно обзору Оорта [9] значений M/L, полное отношение массы всех галактик к их излучению равно примерно $21M_\odot/L_\odot$. Поскольку постоянная Хаббла, вполне возможно, может отличаться от 75 км/(с·Мпс), этот результат лучше переписать в виде

$$\frac{M}{L} \approx 21 \frac{M_\odot}{L_\odot} \left(\frac{H_0}{(75 \text{ км/(с·Мпс)})} \right). \tag{15.2.11}$$

(Например, ван ден Берг [10] провел анализ галактических масс, аналогичный работе Оорта, но в предположении, что $H_0 = 120$ км/(с·Мпс), и поэтому получил, что $M/L \approx 30M_\odot/L_\odot$. Кроме того, Оорт, используя подсчеты числа галактик, получил оценку для плотности светимости Вселенной около $2{,}2 \cdot 10^{-10} L_\odot$ пс$^{-3}$; это значение зависит от H_0 так же, как отношение L/D^3, которое,

согласно (15.2.9) и (15.2.10), пропорционально H_0; следовательно, при произвольном H_0 оценка Оорта для плотности светимости имела бы вид

$$\mathscr{L} \approx 2{,}2\ 10^{-10} L_\odot/\text{пс}^3 \left(\frac{H_0}{75\ \text{км/(с·Мпс)}}\right). \qquad (15.2.12)$$

Теперь можно написать формулу для плотности масс *галактик* во Вселенной:

$$\begin{aligned}\rho_G &= \left(\frac{\mathscr{L}}{L_\odot}\right)\left(\frac{M/L}{M_\odot/L_\odot}\right) M_\odot = \\ &= 4{,}6\cdot 10^{-9} M_\odot/\text{пс}\left(\frac{H_0}{75\ \text{км/(с·Мпс)}}\right)^2 = \\ &= 3{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{г/см}^3\left(\frac{H_0}{75\ \text{км/(с·Мпс)}}\right)^2. \qquad (15.2.13)\end{aligned}$$

Это дает значение меньше критической плотности (15.2.3):

$$\frac{\rho_G}{\rho_{\text{кр}}} \approx 0{,}028. \qquad (15.2.14)$$

(Позднее Нунан [11] и С. Шапиро [12] получили для этого отношения оценки, равные 0,016 и 0,010.) Отметим, что эти результаты не зависят от того, каково истинное значение постоянной Хаббла. Кроме того, хотя ρ_G не получается равным $\rho_{\text{кр}}$, все же их значения близки друг другу настолько, чтобы обеспечить уверенность в том, что в расширении Вселенной действительно «замешано» тяготение.

Если бы масса Вселенной была первоначально сконцентрирована в галактиках, то, согласно (15.2.14) и (15.2.6), параметр замедления был бы равен

$$q_0 \approx 0{,}014, \quad \text{если} \quad \rho_0 \approx \rho_G, \qquad (15\ 2.15)$$

откуда следовало бы, что Вселенная открытая, т.е. ее кривизна отрицательна и $R_0 \approx H_0^{-1}$. Это значение q_0 не согласуется с результатом, полученным по красным смещениям и светимостям, который дает $q_0 \approx 1$, правда, без учета эволюции и эффектов селекции. Конечно, эволюция и селекция могут оказать значительное влияние на измерения q_0, но все же если временно согласиться с тем, что q_0 порядка единицы, то нужно согласиться и с тем, что плотность масс около $2\cdot 10^{-29}$ г/см^3 должна быть обнаружена где-то вне обычных галактик. Но где?

Один район для поисков недостающей массы — это межгалактическое пространство внутри скоплений галактик. В Волосах Вероники есть богатое скопление эллиптических галактик, которые, судя по ровным очертаниям скопления, видимо, связаны гравитационно. Если это так, то масса скопления определяется вириальной формулой (15.2.7). При этом получаются значения

M/L, которые от 4 до 20 раз больше, чем M/L для отдельных эллиптических галактик [13—15] (см. также [3, 5, 6]) [считаем, что $H_0 = 75$ км/(с·Мпс)]. Если в скоплениях в самом деле в 20 раз больше вещества, чем сумма масс их галактик, то плотность вещества во Вселенной приближается к критической плотности (15.2.3). Действительно, был открыт рентгеновский источник [16—25], заполняющий все скопление в Волосах Вероники, что дает основание предполагать наличие межгалактического газа из ионизованного водорода при температуре порядка $7 \cdot 10^7$ К. Однако мощность излучения этого источника говорит о том, что масса газа составляет лишь около 1% той массы, которая получается из теоремы вириала. Возможно также, что скопление в Волосах Вероники вообще не связано гравитационно [26]; в этом случае теорема вириала сильно завышает его массу. Многие богатые скопления, такие, как скопления в Деве или Геркулесе, крайне иррегулярны и, видимо, вообще неустойчивы.

Если недостающая масса не обнаруживается внутри скоплений галактик, то мы должны искать ее в пространстве между скоплениями. Одно из разумных требований состоит в том, чтобы плотность пространства между скоплениями была меньше плотности внутри скоплений, так чтобы скопления представляли собой заметные сгущения. Полный объем пространства вне скоплений приблизительно в 500 раз больше объема скоплений, и, следовательно, плотность внутри скоплений приблизительно в 500 раз больше, чем ρ_G из (15.2.13), т. е. около 10^{-28} г/см^3. Поэтому если плотность вне скоплений даже на порядок величины меньше плотности внутри скоплений, то все равно в пространстве между скоплениями места в избытке для всей недостающей нам массы.

Можно думать, что недостающая масса — это масса нормальных звезд, которые встречаются в межгалактическом пространстве (вне или внутри скоплений), или карликовых галактик, которые, будучи слишком холодными, невидимы. Из ограничений на внегалактический вклад в яркость ночного неба [1]) Пиблз и Партридж [98] оценили, что полная плотность массы нормальных звезд, где бы они ни находились, должна быть меньше $0{,}13\rho_{кр}$. Эта оценка не устраняет возможности того, что недостающая масса содержится в холодных звездах с очень высокими значениями M/L, в карликовых галактиках или в межгалактическом пространстве. Сразу возникает мысль о «черных дырах», о которых говорилось в § 9 гл. 11. Однако оценки масс галактик, приведенные выше, показывают, что типичные галактики не содержат большого количества холодных звезд и было бы странно, если бы такие звезды преобладали где-то в другом месте. Еще одна возможность состоит в том, что недостающая масса входит в массу целых галак-

[1]) Наблюдательные данные по яркости ночного неба см. в [27].

тик, уже претерпевших гравитационный коллапс. Трудно представить, как можно иначе проверить эту гипотезу, кроме как наблюдать или «агонию» коллапсирующей галактики, или отклонение луча света, проходящего близко от сколлапсировавшей галактики.

Недостающая масса может быть обнаружена в виде ультрарелятивистских частиц, таких, как космические лучи, фотоны, нейтрино и гравитоны. Легко видеть, что фотоны и нейтрино, образовавшиеся в обычных термоядерных процессах, не могут иметь плотность энергии, сравнимую с обычной нерелятивистской массой покоя, ибо даже если когда-то Вселенная состояла из чистого водорода и из него все время «изготовлялось» железо, то высвободившаяся при этом энергия была бы самое большее около 9 МэВ на нуклон, т. е. 1% массы нуклона. Если вклад ультрарелятивистских частиц преобладает в плотности масс Вселенной, то они должны либо рождаться в экзотических процессах типа аннигиляции вещества и антивещества и гравитационного коллапса, либо сохраниться от ранних стадий развития Вселенной. Наблюдаемая плотность полного потока излучения слабых дискретных радиоисточников на частоте ν по порядку величины равна

$$\mathscr{S}(\nu) \approx 10^{-21}\ \text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}\ \text{Гц}^{-1}\left(\frac{\nu}{408\ \text{МГц}}\right)^{-0,7}.$$

(Эта формула получена интегрированием распределения числа источников $N(S)$, приведенного в обзоре [29].) Отсюда полная плотность энергии радиоизлучения этих источников на длинах волн более 75 см в грубом приближении равна

$$\rho_{\text{радио}} = \int_0^{400\ \text{МГц}} \mathscr{S}(\nu)\, d\nu \approx 10^{-12}\ \text{Вт}\cdot\text{м}^{-2} \approx 10^{-40}\ \text{г/см}^3.$$

Изотропный фон на таких длинах волн превышает эту величину не больше чем на порядок (см. обзор [30]). В потоке излучения на *микроволновых* и *далеких инфракрасных* длинах волн между 75 и 0,05 см доминирует 2,7-градусный (реликтовый) фон, плотность энергии которого по закону Стефана — Больцмана равна $4{,}4\cdot10^{-34}$ г/см^3. Полная плотность энергии света звезд на *оптических* частотах оценивается не более чем 10^{-35} г/см^3 [31] (см. также [32] и [30]). Плотность потока наблюдаемого *рентгеновского* фона при энергии E (в кэВ) имеет порядок [33]

$$\Phi(E) \approx \frac{20\ \text{фотон}}{\text{см}^2\cdot\text{с}\cdot\text{стер}\cdot\text{кэВ}}\cdot\frac{1}{E^2}.$$

Если этот фон внегалактического происхождения, то плотность энергии между 0,1 кэВ и 1 МэВ дается интегралом

$$\rho_{\text{рентг}} = \int_{0,1\ \text{кэВ}}^{1\ \text{МэВ}} 4\pi\Phi(E)\, E\, dE \approx 3\cdot10^3\ \text{кэВ}/(\text{см}^2\cdot\text{с}) \approx 10^{-37}\text{г/см}^3.$$

Плотность энергии *γ-излучения* выше 100 МэВ оценивается (см. обзор [30]) менее чем в $3 \cdot 10^{-38}$ г/см^3. Наблюдаемая плотность энергии частиц *космических лучей* не более 10^{-35} г/см^3 [34].

Из этих оценок следует, что из релятивистских частиц наибольший вклад в полную космическую плотность энергии вносит 2,7-градусный микроволновый фон (см. § 5 этой главы). Его плотность менее одной сотой плотности масс покоя галактик (15.2.13), что оправдывает допущенное нами пренебрежение давлением в уравнениях Эйнштейна и уравнениях сохранения.

Однако есть возможность того, что недостающая масса состоит из нейтрино или гравитонов [1]), которые слишком слабо взаимодействуют с веществом и поэтому не обнаружены. В частности, можно ожидать, что плотность энергии нейтрино по крайней мере сравнима с плотностью микроволнового электромагнитного излучения, но она вполне может быть и на много порядков больше (см. § 6 гл. 15). Если в плотности энергии Вселенной доминируют ультрарелятивистские частицы, то давление равно

$$p_0 = \frac{\rho_0}{3} \tag{15.2.16}$$

и теперь вместо соотношений (15.2.5) и (15.2.6) из уравнений Эйнштейна следует

$$\frac{k}{R_0^2} = H_0^2 (q_0 - 1), \tag{15.2.17}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_{кр}} = q_0, \tag{15.2.18}$$

где $\rho_{кр}$ — та же критическая плотность (15.2.3). Критическим значением параметра замедления, для которого $k = 0$ и $\rho_0 = \rho_{кр}$, является теперь $q_0 = 1$ вместо $q_0 = {}^1/_2$, и плотность, необходимая для данных q_0 и H_0, равна теперь половине той, что была нужна в пылевидной Вселенной.

Хотя на основании наблюдений в настоящее время нельзя исключить того, что во Вселенной преобладают фотоны, нейтрино или гравитоны, все же спокойнее сделать консервативное предположение о том, что недостающую массу восполняет крайне разреженный газ из ионизованного или нейтрального водорода, заполняющий все пространство. Различные методы, предлагаемые для обнаружения этого газа, связаны с электромагнитными сигналами, доходящими до нас с космологических расстояний, и поэтому мы должны отложить обсуждение этого вопроса до § 4 этой главы, обратившись пока к решению уравнений динамической космологии.

---

[1]) Генерация гравитационного излучения в галактиках рассматривается в работах [35, 36]; о первичной генерации длинноволнового гравитационного излучения см. [37].

§ 3. Эра преобладания вещества

Уже было отмечено, что плотность энергии *известных* видов излучения в нынешней Вселенной составляет менее одной сотой плотности масс покоя. Согласно (15.1.22) и (15.1.23), плотность энергии масс покоя ведет себя как R^{-3}, а плотность энергии излучения — как R^{-4}. Из этого можно довольно уверенно заключить, что по крайней мере с момента, когда функция $R(t)$ была равна $^1/_{100}$ нынешнего значения, расширение Вселенной определялось содержащимся в ней нерелятивистским веществом. Этот период начался задолго до того, как был излучен любой фотон, принятый телескопом на г. Паломар, так как самые далекие наблюдаемые на нем галактики и квазары имеют красное смещение z во много раз меньше 100, а точнее, где-то около 3! Поэтому изучение эмпирических соотношений между красными смещениями, светимостями, числами объектов, угловыми диаметрами и т. д. может дать сведения лишь об эре преобладания вещества в истории Вселенной.

Уравнением, определяющим динамику Вселенной в эту эру, является уравнение Эйнштейна (15.1.20)

$$\dot{R}_0^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 \tag{15.3.1}$$

с плотностью ρ, которая, согласно (15.1.22), для Вселенной с преобладанием вещества равна

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3}. \tag{15.3.2}$$

Удобно выразить ρ_0 и k/R_0^2 через q_0 и H_0, используя для этого (15.2.5) и (15.2.6):

$$\frac{k}{R_0{}^2} = (2q_0 - 1)\,H_0^2,$$

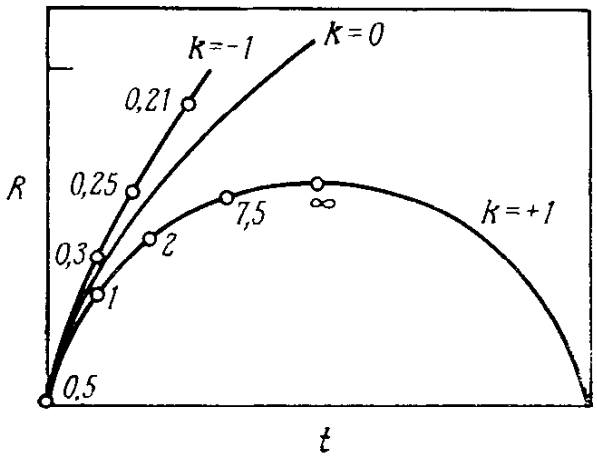
$$\frac{8\pi G\rho_0}{3} = 2q_0 H_0^2.$$

Тогда из (15.3.1) и (15.3.2) имеем

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2\left[1 - 2q_0 + 2q_0\left(\frac{R_0}{R}\right)\right]. \tag{15.3.3}$$

Решение можно представить в общем виде как формулу для t, зависящего от R:

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{R/R_0}\left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right]^{-1/2} dx, \tag{15.3.4}$$



Фиг. 15.1. Решения уравнений Эйнштейна для вселенной Робертсона — Уокера с кривизной $k = +1$, $k = 0$ и $k = -1$.

Числа вдоль кривых $k = \pm 1$ дают значения параметра замедления q_0 в различные эпохи.

где $t = 0$ определяется как время, когда $R \ll R_0$. В частности, нынешний возраст Вселенной равен

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right]^{-1/2} dx. \qquad (15.3.5)$$

Для любого положительного q_0 возраст Вселенной обязательно меньше времени Хаббла:

$$t_0 < \frac{1}{H_0}, \qquad (15.3.6)$$

что уже было отмечено в § 1 этой главы.

Поведение интеграла (15.3.4) удобно рассмотреть по отдельности для следующих трех случаев (фиг. 15.1):

А. $q_0 > 1/2$ ($k = +1$, $\rho_0 > \rho_{кр}$). Здесь удобно ввести угловую меру для возраста θ, определяемую равенством

$$1 - \cos\theta = \left(\frac{2q_0 - 1}{q_0}\right) \frac{R(t)}{R_0}. \qquad (15.3.7)$$

Тогда из (15.3.4) получим

$$H_0 t = q_0 (2q_0 - 1)^{-3/2} (\theta - \sin\theta). \qquad (15.3.8)$$

Это уравнение циклоиды; $R(t)$ растет, начиная с нулевого значения при $\theta = 0$, $t = 0$, достигает максимума при

$$\theta_{макс} = \pi, \quad t_{макс} = \frac{\pi q_0}{H_0 (2q_0 - 1)^{3/2}}, \quad R(t_{макс}) = \frac{2q_0 R_0}{2q_0 - 1}, \qquad (15.3.9)$$

затем снова убывает, обращаясь в нуль при $\theta = 2\pi$, $t = 2t_{макс}$. Текущий момент времени определяется уравнением $R(t) = R_0$, поэтому современное значение угла θ дается равенством

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{q_0} - 1, \qquad (15.3.10)$$

и, следовательно, возраст Вселенной равен

$$t_0 = H_0^{-1} q_0 (2q_0 - 1)^{-3/2} \left[\arccos\left(\frac{1}{q_0} - 1\right) - \frac{1}{q_0}(2q_0 - 1)^{1/2}\right]. \qquad (15.3.11)$$

Например, если мы считаем, что $q_0 \approx 1$ и $H_0^{-1} = 13 \cdot 10^9$ лет, то из (15.3.10) следует, что $\theta_0 \approx \pi/2$, и по формуле (15.3.11)

нынешний возраст Вселенной получается равным

$$t_0 \approx \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) H_0^{-1} \approx 7{,}5 \cdot 10^9 \text{ лет}, \qquad (15.3.12)$$

а из (15.3.9) видно, что Вселенная достигает максимального радиуса $R\,(t_{\text{макс}}) \approx 2R_0$ в возрасте

$$t_{\text{макс}} \approx \pi H_0^{-1} \approx 40 \cdot 10^9 \text{ лет}. \qquad (15.3.13)$$

Весь этот жизненный цикл Вселенной занимает время $2t_{\text{макс}}$, т. е. около $80 \cdot 10^9$ лет.

Б. $q_0 = {}^1/_2$ $(k = 0,\ \rho_0 = \rho_{\text{кр}})$. В этом случае из уравнений (15.3.4) следует

$$\frac{R(t)}{R_0} = \left(\frac{3H_0 t}{2}\right)^{2/3}, \qquad (15.3.14)$$

т. е. $R\,(t)$ неограниченно растет. При $H_0^{-1} \approx 13 \cdot 10^9$ лет нынешний возраст Вселенной равен

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ лет}. \qquad (15.3.15)$$

Это так называемая *модель Эйнштейна — де Ситтера.*

В. $0 < q_0 < {}^1/_2$ $(k = -1,\ \rho_0 < \rho_{\text{кр}})$. В этом случае тоже можно пользоваться равенствами (15.3.7) и (15.3.8), только угол развития θ теперь будет мнимым:

$$\theta = i\Psi,$$

и поэтому

$$H_0 t = q_0 (1 - 2q_0)^{-3/2} (\operatorname{sh} \Psi - \Psi), \qquad (15.3.16)$$

где угол Ψ определен равенством

$$\operatorname{ch} \Psi - 1 = \frac{1 - 2q_0}{q_0} \frac{R(t)}{R_0}. \qquad (15.3.17)$$

Так же как и в случае (Б), масштабный фактор $R\,(t)$ растет неограниченно; при $t \to \infty$ имеем

$$\frac{R(t)}{R_0} \to \frac{1}{2} q_0 (1 - 2q_0)^{-1} e^{\Psi} \to (1 - 2q_0)^{1/2} H_0 t. \qquad (15.3.18)$$

В настоящее время

$$\operatorname{ch} \Psi_0 = \frac{1}{q_0} - 1, \qquad (15.3.19)$$

и возраст Вселенной равен

$$t_0 = H_0^{-1} \left[(1 - 2q_0)^{-1} - q_0 (1 - 2q_0)^{-3/2} \operatorname{Arch} \left(\frac{1}{q_0} - 1\right) \right]. \qquad (15.3.20)$$

Если, к примеру, мы включим в плотность масс Вселенной только то, что содержится в галактиках, то, согласно (15.2.15), $q_0 \approx 0{,}014$,

т. е. $\Psi_0 \approx 5$, и возраст Вселенной близок к времени Хаббла

$$t_0 \approx 0{,}96 H_0^{-1} \approx 13 \cdot 10^9 \text{ лет}. \qquad (15.3.21)$$

Здесь стоит упомянуть, что вообще параметр замедления $q \equiv -\ddot{R}R/\dot{R}^2$ меняется со временем. Для $k = +1$ $q(t)$ определяется аналогом равенства (15.3.10):

$$q = (1 + \cos\theta)^{-1},$$

так что, когда в течение космического цикла θ пробегает значения от 0 до 2π, q растет от $^1/_2$ до ∞ и снова падает до $^1/_2$. При $k = -1$ $q(t)$ определяется из аналога равенства (15.3.19):

$$q = (1 + \operatorname{ch}\Psi)^{-1},$$

и, когда Ψ пробегает значения от 0 до ∞, q плавно спадает от $^1/_2$ до 0. Лишь при $k = 0$ q остается постоянным: $q = {}^1/_2$. Таким образом, можно не придавать особого смысла какому-то частному значению q_0, кроме $q_0 = {}^1/_2$. Тот факт, например, что на диаграмме «фотометрическое расстояние — красное смещение» точки ложатся на прямую, означает, что $q_0 \approx 1$ (если эффекты эволюции и селекции незначительны; см. § 1 гл. 14), но во Вселенной с преобладанием вещества это должно быть случайным совпадением, ибо если ныне $q_0 = 1$, то в прошлом было $q_0 < 1$, а в будущем будет $q_0 > 1$. Только во Вселенной с преобладанием излучения из того, что $k = 0$, следует $q_0 = 1$ [см. (15.2.17)], и поэтому параметр замедления равен единице все время.

Выведенные выше формулы для $R(t)$ можно использовать для распространения феноменологического анализа, проведенного в предыдущей главе, на сколь угодно большие красные смещения. Согласно (14.3.6), свет, приходящий в момент t_0 с красным смещением z, был излучен в момент, когда масштабный фактор имел значение

$$R_1 = \frac{R_0}{1+z}. \qquad (15.3.22)$$

Сопутствующая радиальная координата источника определяется равенствами (14.3.1), (14.3.2) и (15.3.3):

$$\int_0^{r_1} [1 - kr^2]^{1/2}\, dr = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{R_1}^{R_0} \frac{dR}{R\dot{R}} =$$

$$= \frac{1}{R_0 H_0} \int_{(1+z)^{-1}}^{1} \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right]^{-1/2} x^{-1}\, dx.$$

С помощью (15.2.5) легко показать, что при всех трех возможных значениях k формула для r_1 одна и та же:

$$r_1 = \frac{zq_0 + (q_0 - 1)\left(-1 + \sqrt{2q_0 z + 1}\right)}{H_0 R_0 q_0^2 (1+z)}. \qquad (15.3.23)$$

С учетом (15.3.22) и (15.3.23) фотометрическое расстояние, измеряемое сравнением видимой и абсолютной светимостей и определяемое формулой (14.4.14), равно

$$d_\Phi = R_0 r_1 (1+z) = \frac{1}{H_0 q_0^2}\left[zq_0 + (q_0 - 1)\left(-1 + \sqrt{2q_0 z + 1}\right)\right]. \qquad (15.3.24)$$

Иногда при определении q_0 кривую $d_\Phi(z)$, полученную из наблюдений, сравнивают с этой точной формулой, а не с не зависящим от выбора модели приближенным выражением (14.6.8)

$$d_\Phi \approx H_0^{-1}\left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0) z^2\right], \qquad (15.3.25)$$

которое становится точным лишь в пределе $z \to 0$. Различие между величинами (15.3.24) и (15.3.25) исчезает при $q_0 = 1$ или $q_0 = 0$ и становится меньшим 10% при $0 < z < 0{,}5$ (этому условию удовлетворяют все галактики, красные смещения которых известны) и $0 < q_0 < 1{,}5$. Следовательно, если q_0 не очень велико, нет существенной разницы между определением q_0 по точной формуле (15.3.24) и по приближенной (15.3.25).

«Расстояние по угловому диаметру» $d_{\text{угл}}$ и «расстояние по собственному движению» $d_{\text{дв}}$ выражаются непосредственно через d_Φ по формулам (14.4.22) и (14.4.23):

$$d_{\text{угл}} = (1+z)^{-2} d_\Phi, \qquad d_{\text{дв}} = (1+z)^{-1} d_\Phi,$$

а параллактическое расстояние $d_\text{п}$ определяется по (14.4.10) в следующем виде:

$$d_\text{п} = \frac{zq_0 + (q_0 - 1)\left(-1 + \sqrt{2q_0 z + 1}\right)}{H_0\left[q_0^4 (1+z)^2 - (2q_0 - 1)\left\{zq_0 + (q_0 - 1)\left(-1 + \sqrt{2q_0 z + 1}\right)\right\}^2\right]^{1/2}}. \qquad (15.3.26)$$

Теперь можно дать более явные выражения для зависимости чисел источников, обсуждаемых в § 7 гл. 14, от функций плотности источников n. Используя формулы (15.3.4), (15.3.22), (15.3.23) и (14.7.7) — (14.7.9) и переходя от переменной t_1 к переменной z, получим для числа источников с красным смещением, меньшим z,

и видимой светимостью, большей l, следующее выражение:

$$N(<z, >l) = \int_0^\infty dL \int_0^{\min(z,\, z_l(L))} dz' 4\pi H_0^{-3} q_0^{-4} (1+z')^{-6} (1+2q_0 z')^{-1/2} \times$$
$$\times [z' q_0 + (q_0 - 1)(-1 + \sqrt{2q_0 z' + 1})]^2 n(z', L)\, dz', \quad (15.3.27)$$

где

$$z_l(L) \equiv q_0 \left(\frac{LH_0^2}{4\pi l}\right)^{1/2} + (1-q_0)\left\{-1 + \left[1 + 2\left(\frac{LH_0^2}{4\pi l}\right)^{1/2}\right]^{1/2}\right\}, \quad (15.3.28)$$

а $n(z, L)\, dL$ — собственная плотность источников с абсолютной светимостью между L и $L + dL$ при красном смещении z. Для радиоисточников со спектром (14.7.13) равенства (14.7.15), (14.7.16), (14.7.8), (15.3.4), (15.3.22), (15.3.23) дают число источников с красным смещением, меньшим z, и истинной мощностью на частоте ν, большей чем S, в виде

$$N(<z, >S; \nu) = \int_0^\infty dP \int_0^{\text{мин}(z,\, z_{S\alpha}(P))} 4\pi H_0^{-3} q_0^{-4} (1+z')^{-6} (1+2q_0 z')^{-1/2} \times$$
$$\times (z' q_0 + (q_0 - 1)(-1 + \sqrt{2q_0 z' + 1}))^2 n(z', P; \nu)\, dz', \quad (15.3.29)$$

где $z_{S\alpha}(P)$ — решение уравнения

$$(1+z)^{(\alpha-1)/2} (z q_0 + (q_0 - 1)(-1 + \sqrt{2q_0 z + 1})) = q_0^2 H_0 \left(\frac{P}{S}\right)^{1/2} \quad (15.3.30)$$

и $n(z, P; \nu)\, dP$ — собственная плотность источников с истинной мощностью на частоте ν между P и $P + dP$ при красном смещении z. Если бы не было никакой эволюции источников, то из (14.7.18) и (14.7.19) получалась бы зависимость n от z:

$$n(z, L) = n(0, L)(1+z)^3,$$
$$n(z, P, \nu) = n(0, P, \nu)(1+z)^3$$

и можно было бы взять интегралы по z' в (15.3.27) и (15.3.29). Однако в § 7 гл. 14 мы уже отмечали, что эта гипотеза не согласуется с измерениями $N(>S; \nu)$ для радиоисточников или $N(<z)$ для квазаров. Поэтому для получения информации о зависимости $n(z, L)$ и $n(z, P; \nu)$ от z, L и P лучше всего пользоваться

формулами (15.3.27) и (15.3.29). Такой подход привел Лонгейра [38] к выводу, что либо плотность числа радиоисточников убывает (дополнительно к расширению Вселенной), как $t^{-2,5}$, либо средняя мощность источников убывает, как $t^{-3,5}$. Кроме того, по-видимому, необходимо резкое обрезание в ранние моменты времени, хотя этот вывод нельзя считать окончательным [39]. Исследование Шмидтом [40] квазаров из каталога 3С выявило те же общие черты — собственная плотность возрастает с ростом z много быстрее, чем $(1 + z)^3$ при $0 < z < 1$, и резко спадает при $z > 2$. Возможно, что в этом обрезании отражается эпоха формирования галактик или квазаров.

Значение возраста Вселенной дает дополнительные аргументы для выбора среди различных космологических моделей. Надежный нижний предел для возраста Вселенной дает возраст Земли, определяемый по относительному содержанию радиоактивных элементов и продуктов их распада в земной коре. В 1929 г. Э. Резерфорд [41] нашел, что этот возраст должен быть около $3{,}4 \cdot 10^9$ лет. Сравнимое с этим значение возраста Земли $4{,}5 \cdot 10^9$ лет дают современные исследования [42] [1]). Если время Хаббла $H_0^{-1} = 13 \cdot 10^9$ лет, то согласно (15.3.11) нижний предел $t_0 > 4{,}5 \cdot 10^9$ лет требует, чтобы было $q_0 < 5$.

Радиоактивное датирование может быть применено также и к Галактике. Основной работой, посвященной синтезу тяжелых элементов внутри звезд, является статья Бэрбиджей, Фаулера и Хойла 1957 г. [44]. [Целью этой статьи, по крайней мере частично, была защита модели стационарной Вселенной обоснованием возможности образования элементов в звездах, в обход «большого взрыва». На сегодняшний день общепринято считать (§ 7 этой главы), что элементы большей частью образовались в звездах, за тем очень важным исключением, что гелий, возможно, образовался в ранней горячей Вселенной.] Согласно этой работе, изотопы урана образовались в прежнем поколении звезд в результате так называемого *r-процесса*, процесса быстрого захвата нейтрона. Отношение начальных содержаний изотопов было найдено равным [45] [2])

$$\left[\frac{U^{235}}{U^{238}}\right]_1 = 1{,}65 \pm 0{,}15 \text{ (при образовании).}$$

Известны точные скорости распадов этих изотопов:

$$\lambda\,(U^{235}) = 0{,}971 \cdot 10^{-9} \text{ лет}^{-1},$$
$$\lambda\,(U^{238}) = 0{,}154 \cdot 10^{-9} \text{ лет}^{-1}$$

и современное отношение их содержаний:

$$\left[\frac{U^{235}}{U^{238}}\right]_0 = 0{,}00723 \text{ (в настоящее время).}$$

[1]) В работе [43] приводится значение $(4{,}53 \pm 0{,}03) \cdot 10^9$ лет.
[2]) В работе [46] приводится значение $1{,}89 \pm 0{,}36$.

Если весь уран образовался вскоре после рождения Галактики в момент t_G, то возраст Галактики должен быть равен [44]

$$t_0 - t_G = \frac{\ln [U^{235}/U^{238}]_1 - \ln [U^{235}/U^{238}]_0}{\lambda (U^{235}) - \lambda (U^{238})} \approx 6{,}6 \cdot 10^9 \text{ лет.}$$

Всякое общество, развившееся в более ранние эпохи истории Галактики, обнаружило бы делящийся изотоп U^{235} в большей пропорции, чем на Земле сейчас, и поэтому могло бы идти к ядерному самоубийству быстрее.

Ошибка в 20% в оценке отношения первоначальных содержаний изотопов привела бы к ошибке лишь в 4% в определении возраста Галактики. Источником значительно большей неопределенности является возможность того, что образование заметных количеств урана происходило и много позднее рождения Галактики. В этом случае Галактика должна быть значительно *старше*, чем $6{,}6 \cdot 10^9$ лет. Чтобы решить этот вопрос, можно использовать в сочетании с отношением U^{235}/U^{238} отношение содержаний других изотопов, рассматривая при этом начало и продолжительность синтеза этих элементов как свободные параметры. Используя отношения Th^{232}/U^{238} и U^{235}/U^{238}, Фаулер и Хойл [45] нашли, что возраст наиболее старых элементов, образовавшихся в *r*-процессе, находится между $9{,}6 \cdot 10^9$ и $15{,}6 \cdot 10^9$ лет. Клейтон [47] включил в свой анализ отношение Re^{187}/Os^{187} с аналогичными результатами. Однако здесь могут оказаться важными эффекты химического разделения, поэтому эти результаты, возможно, содержат бóльшие систематические ошибки. Дикке [48] настаивает на том, что бóльшая часть элементов образовалась в *r-процессе* в течение немногих миллионов лет с момента возникновения Галактики; в этом случае возраст Галактики был бы близок к $7 \cdot 10^9$ лет. Вывод о том, что возраст Галактики и, следовательно, Вселенной по крайней мере $7 \cdot 10^9$ лет и что $q_0 < 2{,}3$ при $H_0^{-1} \approx 13 \cdot 10^9$ лет, вполне надежен, но пока все же нельзя считать, что радиоактивная датировка дает точный возраст Галактики.

Есть также возможность для оценки возраста Галактики по ее шаровым скоплениям. Они представляют собой большие компактные скопления, содержащие тысячи отдельных звезд, и поэтому их диаграммы Герцшпрунга — Рассела (соотношение между светимостью и спектральным классом) могут быть определены довольно точно. Кроме того, низкое содержание металлов в звездах шаровых скоплений указывает на то, что они принадлежат к первому поколению звезд (звезды населения типа II, см. § 5 гл. 14), которое сконденсировалось в протогалактике. Если все звезды в шаровом скоплении имеют одинаковый начальный химический состав, одинаковый возраст и различаются только массами, то на диаграмме Герцшпрунга — Рассела они должны образовать область, форма которой зависит только от их

возраста и начального химического состава. Сравнивая решения уравнений эволюции звезд, полученные на ЭВМ, с плотностью звезд на диаграммах Герцшпрунга — Рассела для большого числа шаровых скоплений, Ибен [49] (см. также [50]) пришел к выводу, что шаровые скопления образовались от $8 \cdot 10^9$ до $18 \cdot 10^9$ лет назад, что соответствует начальному содержанию гелия (по массе) от 33 до 24%. Нельзя исключить того, что все скопления имеют один и тот же возраст, который в этом случае, вероятнее всего, был бы между $9{,}5 \cdot 10^9$ и $15{,}5 \cdot 10^9$ лет. Если возраст Вселенной действительно больше $9 \cdot 10^9$ лет и если $H_0^{-1} = 13 \cdot 10^9$ лет, то $q_0 < {}^1/_2$ и Вселенная должна иметь отрицательную кривизну и быть бесконечной, как это и получалось из оценок плотности масс в предыдущем параграфе.

Было бы, конечно, преждевременно из этих оценок возраста Вселенной делать какие-либо определенные выводы о кривизне пространства, но тот факт, что возраст урана и шаровых скоплений в какой-то степени сравним с временем Хаббла H_0^{-1}, является сильным аргументом в пользу того, что наблюдаемая корреляция красного смещения и фотометрического расстояния действительно как-то связана с эволюцией Вселенной.

Используя явное решение для $R(t)$ в эру преобладания вещества, можно продемонстрировать существование горизонтов, которые ограничивают то, что мы в принципе можем увидеть во Вселенной. Скорость света является верхним пределом для локальной скорости распространения любого сигнала. Поэтому в момент t наблюдатель в точке $r = 0$ может принимать сигналы, излученные в момент t_1 только в точках с радиальными координатами $r < r_1$, где r_1 — радиальная координата точек, от которых световой сигнал, излученный в момент t_1, пришел бы в точку $r = 0$ как раз в момент t. Согласно (14.3.1), r_1 определяется равенством

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_1}^{t} \frac{dt'}{R(t')}. \qquad (15.3.31)$$

Если интеграл по t' расходится при $t_1 \to 0$, то в принципе можно принять сигнал, излученный достаточно давно, от любой сопутствующей частицы (вроде «типичной галактики») во Вселенной. Наоборот, если интеграл по t' сходится при $t_1 \to 0$ (или в моделях без сингулярности при $t_1 \to -\infty$), то поле нашего зрения ограничено тем, что Риндлер [51] называет *горизонтом частиц*. В момент времени t можно принять сигнал только от сопутствующих частиц, радиальные координаты которых не больше $r_г(t)$, определяемого уравнением

$$\int_0^{r_г(t)} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_0^{t} \frac{dt'}{R(t')}.$$

Собственное расстояние (14.2.21) до этого горизонта равно

$$d_{\text{г}}(t) = R(t)\int_0^{r_{\text{г}}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = R(t)\int_0^t \frac{dt'}{R(t')}. \qquad (15.3.32)$$

Из (15.1.20) легко видеть, что горизонт частиц будет существовать, если ρ растет быстрее, чем $R^{-2-\varepsilon}$ при $R \to 0$, чего и следовало ожидать из общих соображений. В частности, если наибольший вклад в интеграл по t' дает эра преобладания вещества, то можно, пользуясь (15.3.4), выразить dt' через $R(t')$ и $dR(t')$ и таким образом получить

$$d_{\text{г}}(t) = \begin{cases} \dfrac{R(t)}{R_0 H_0 \sqrt{2q_0-1}} \arccos\left\{1 - \dfrac{(2q_0-1)R(t)}{q_0 R_0}\right\}, & \\ & q_0 > \dfrac{1}{2} \quad (k=+1), \\ \dfrac{2}{H_0}\left(\dfrac{R(t)}{R_0}\right)^{3/2}, & q_0 = \dfrac{1}{2} \quad (k=0), \\ \dfrac{R(t)}{R_0 H_0 \sqrt{1-2q_0}} \operatorname{arcch}\left\{1 + \dfrac{(1-2q_0)R(t)}{q_0 R_0}\right\}, & \\ & q_0 < \dfrac{1}{2} \quad (k=-1). \end{cases} \qquad (15.3.33)$$

В ранние моменты эры преобладания вещества $R \ll R_0$, и поэтому горизонт частиц находился на небольшом собственном расстоянии

$$d_{\text{г}}(t) \to H_0^{-1}\left(\frac{q_0}{2}\right)^{-1/2}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{3/2} \approx \frac{t}{3}. \qquad (15.3.34)$$

Если $q_0 \leqslant 1/2$, $R(t)$ неограниченно возрастает при $t \to \infty$, и поскольку $d_{\text{г}}(t)$ растет быстрее, чем $R(t)$, то в пределах горизонта частиц рано или поздно окажется любая заданная частица. При $q_0 > 1/2$ пространство Вселенной конечно и, согласно (14.2.4), длина наибольшей окружности в нем равна

$$L(t) = 2\pi R(t). \qquad (15.3.35)$$

В любом данном направлении мы можем увидеть сопутствующие частицы в пределах некоторого угла, составляющего лишь часть этой окружности; эта часть определяется уравнениями (15.3.33) и (15.2.5):

$$\frac{d_{\text{г}}(t)}{L(t)} = \frac{1}{2\pi}\arccos\left\{1 - \frac{(2q_0-1)R(t)}{q_0 R_0}\right\}. \qquad (15.3.36)$$

Когда $R(t)$ возрастет до максимального значения (15.3.9), эта доля будет равна $1/2$, и мы сможем увидеть все, что находится

между нами и «антиподами». Однако эта доля остается все время меньше единицы до тех пор, пока $R(t)$ опять не обратится в нуль, и до этого нам не рассмотреть Вселенную со всех сторон. Если $q_0 = 1$ и $H_0^{-1} = 13 \cdot 10^9$ лет, то длина окружности (15.3.35) в настоящее время определяется с помощью соотношения (15.2.5) и равна $82 \cdot 10^9$ световых лет, а горизонт частиц составляет четверть этого расстояния, или $20 \cdot 10^9$ световых лет.

Аналогично тому как существуют некоторые сопутствующие частицы, которые мы не можем сейчас увидеть, в некоторых космологических моделях могут быть события, которые мы никогда не увидим. Событие, которое произошло в точке r_1 в момент t_1, станет видимым в точке $r = 0$ в момент t, определяемый уравнением (15.3.31). Если интеграл по t' расходится при $t \to \infty$ (или в момент следующего сжатия к $R = 0$), тогда в принципе можно принять сигнал любого события, если ждать достаточно долго. Наоборот, если интеграл по t' сходится при больших t, то мы сможем принять сигналы только тех событий, для которых

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \leqslant \int_{t_1}^{t_{\text{макс}}} \frac{dt'}{R(t')},$$

где $t_{\text{макс}}$ равно или бесконечности, или моменту следующего сжатия к $R = 0$. Риндлер [51] называет это явление *горизонтом событий*. При $q_0 < {}^1/_2$ или $q_0 = {}^1/_2$ $R(t)$ растет при $t \to \infty$, как t или $t^{2/3}$; следовательно, интеграл по t' расходится при $t = \infty$, и нет горизонта событий. При $q_0 > {}^1/_2$ интеграл по t' сходится в верхнем пределе, и, следовательно, имеется горизонт событий. Из событий, происходивших в момент t_1, станут видимыми до коллапса Вселенной только те, которые по собственному расстоянию ближе, чем

$$d_c(t_1) = R(t_1) \int_{t_1}^{t_{\text{макс}}} \frac{dt'}{R(t')} = \frac{R(t_1)}{R_0 H_0 \sqrt{2q_0 - 1}} \times$$

$$\times \left[2\pi - \arccos \left\{ 1 - \frac{(2q_0 - 1) R(t_1)}{q_0 R_0} \right\} \right]. \quad (15.3.37)$$

Если $q_0 = 1$ и $H_0^{-1} = 13 \cdot 10^9$ лет, то из событий, происходящих сейчас, «мы» когда-либо увидим только те, что произошли на собственном расстоянии менее $61 \cdot 10^9$ световых лет.

§ 4. Процессы излучения и поглощения в межгалактическом пространстве

До сих пор мы имели дело только со световыми сигналами, которые излучаются удаленными дискретными источниками и распространяются к нам, по сути дела, сквозь пустое пространство.

Однако в § 2 этой главы мы видели, что уравнения Эйнштейна требуют, чтобы космическая плотность энергии была около $2 \cdot 10^{-29}$ г/см^3 [если $H_0 \approx 75$ км/(с·Мпс) и $q_0 \approx 1$], что в 70 раз больше наблюдаемой плотности масс галактик. Если недостающую массу составляет ионизованный или нейтральный газ, заполняющий межгалактическое пространство, то можно надеяться измерить его плотность, наблюдая поглощение или запаздывание света при прохождении через межгалактический газ или наблюдая фоновое излучение этого газа. Измерение этой плотности позволило бы сделать выбор среди космологических моделей. Поглощение световых сигналов, фоновое излучение и его поглощение становятся еще более существенными, если мы обратимся к ранней Вселенной, когда плотность была значительно больше, а прозрачность — значительно меньше, чем сейчас.

Чтобы иметь основу для изучения этой проблемы, рассмотрим эффекты поглощения и излучения луча света, который покидает источник в момент t_1, имея частоту ν_1, и достигает Земли в момент t_0. Если среда сама не излучает, то уменьшение потока светового луча описывается уравнением вида

$$\dot{N}(t) = -\Lambda\left(\nu_1 \frac{R(t_1)}{R(t)},\ t\right) N(t), \tag{15.4.1}$$

где N — плотность числа фотонов в луче и $\Lambda(\nu, t)$ — коэффициент поглощения (в единицу собственного времени) света с частотой ν. [Здесь подразумевается, что к моменту t фотоны в луче имеют смещенную частоту $\nu_1 R(t_1)/R(t)$.] Решение этого уравнения обычно представляется в виде

$$N(t_0) = e^{-\tau} N(t_1), \tag{15.4.2}$$

где τ — *оптическая толща*:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_0} \Lambda\left(\nu_1 \frac{R(t_1)}{R(t)},\ t\right) dt. \tag{15.4.3}$$

Предположим теперь, что единица объема самой среды излучает $\Gamma(\nu, t)$ фотонов в единицу времени в единичном интервале частот при частоте ν. Эти фотоны не становятся частью упомянутого луча света, а добавляются к изотропному фону излучения, обсуждаемому ниже. Однако статистика Бозе требует, чтобы к лучу добавлялись фотоны за счет *индуцированного излучения* (см., например, [52]); его интенсивность (в расчете на один фотон из луча) в единицу времени дается следующей вполне строгой формулой:

$$\Omega(\nu, t) = \frac{\Gamma(\nu, t)}{8\pi\nu^2}. \tag{15.4.4}$$

Теперь для скорости изменения плотности фотонов в луче вместо (15.4.2) имеем

$$\dot{N}(t) = -\Lambda\left(\nu_1 \frac{R(t_1)}{R(t)}, t\right) N(t) + \Omega\left(\nu_1 \frac{R(t_1)}{R(t)}, t\right) N(t), \qquad (15.4.5)$$

так что оптическая толща теперь равна

$$\tau = \int_{t_1}^{t_0} \left(\Lambda\left(\nu_1 \frac{R(t_1)}{R(t)}, t\right) - \Omega\left(\nu_1 \frac{R(t_1)}{R(t)}, t\right)\right) dt. \qquad (15.4.6)$$

Если среда находится в тепловом равновесии (но не обязательно в равновесии с излучением), то Ω и Λ связаны формулой Эйнштейна [53]:

$$\Omega(\nu, t) = \exp\left[-\frac{h\nu}{kT(t)}\right] \Lambda(\nu, t), \qquad (15.4.7)$$

где h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана и $T(t)$ — температура *среды* в момент t. [Этот результат просто получается из принципа детального равновесия. Число фотонов, спонтанно излученных в единицу времени, в единицу фазового объема при любом данном переходе в веществе, равно числу фотонов, поглощаемых при обратном переходе, умноженному на отношение заселенностей верхнего и нижнего уровней, которое равно просто больцмановскому фактору $\exp(-h\nu/kT)$. Этот фактор зависит только от ν и T, и поэтому общее количество спонтанного излучения в единице объема фазового пространства, которое, согласно (15.4.4), есть как раз Ω, равно полному количеству поглощенного излучения Λ, умноженному на $\exp(-h\nu/kT)$.] Отсюда оптическая толща равна

$$\tau = \int_{t_1}^{t_0} \left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu_1 R(t_1)}{kT(t) R(t)}\right)\right) \Lambda\left(\nu_1 \frac{R(t_1)}{R(t)}, t\right) dt. \qquad (15.4.8)$$

Даже если среда не находится в строгом тепловом равновесии, формулы (15.4.7) и (15.4.8), в которых $T(t)$ рассматривается как *эффективная температура*, часто являются хорошим приближением. Обычно $T > 0$, т. е. $e^{-\tau} < 1$, и луч света становится слабее по мере прохождения сквозь среду. Однако иногда в среде возможно обращение заселенностей уровней, эффективная температура при этом отрицательна, $e^{-\tau} > 1$, и луч усиливается средой. Такие *мазерные* явления наблюдались внутри Галактики, но пока не обнаружены в межгалактическом пространстве.

Помимо излучения дискретных источников, существует также *изотропный фон излучения*, создаваемый Вселенной в целом. Пусть $\mathcal{N}(\nu_0, t)\, d\nu_0$ есть плотность в момент t таких фотонов, которые в момент t_0 будут иметь частоту между ν_0 и $\nu_0 + d\nu_0$. Если не

происходит поглощения или излучения, то по тем же соображениям, которые привели к (14.2.17), зависимость $\mathscr{N}(\nu_0, t)$ от времени дается просто множителем $R^{-3}(t)$, возникающим из-за общего расширения Вселенной. Чтобы вычислить скорость изменения величины $\mathscr{N}(\nu_0, t) R^3(t)$ вследствие процессов спонтанного излучения, заметим, что фотоны, частоты которых в момент t_0 лежат в интервале $[\nu_0, \nu_0 + d\nu_0]$, в момент t имеют частоты, лежащие в интервале $[\nu_0 R(t_0)/R(t), (\nu_0 + d\nu_0) R(t_0)/R(t)]$. Следовательно, скорость изменения числа фотонов $\mathscr{N}(\nu_0, t) R^3(t) d\nu_0$ в собственном объеме $R^3(t)$ и в интервале частот $d\nu_0$ в момент t_0 равна

$$\Gamma\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t)}, t\right) R^3(t) \left(\frac{R(t_0)\, d\nu_0}{R(t)}\right),$$

где Γ — снова интенсивность спонтанного излучения в единице собственного объема и в единичном интервале частот, причем теперь учитываются как сама среда, так и все дискретные источники. Скорость изменения величины $\mathscr{N}(\nu_0, t) R^3(t) d\nu_0$ из-за поглощения и индуцированного излучения равна

$$\left(\Omega\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t)}, t\right) - \Lambda\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t)}, t\right)\right) \mathscr{N}(\nu_0, t) R^3(t)\, d\nu_0,$$

как и в (15.4.5). Таким образом, влияние спонтанного и индуцированного излучения и поглощения приводит к следующей скорости изменения $\mathscr{N}(\nu_0, t) R^3(t)$:

$$\frac{d}{dt}\{\mathscr{N}(\nu_0, t) R^3(t)\} = \Gamma\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t)}, t\right) R^2(t) R(t_0) + \\ + \left(\Omega\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t)}, t\right) - \Lambda\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t)}, t\right)\right) \mathscr{N}(\nu_0, t) R^3(t).$$

Пользуясь формулой (15.4.4), получим решение этого уравнения:

$$\mathscr{N}(\nu_0, t) R^3(t) = \exp\left\{-\int_{t_1}^{t} \left[\Lambda\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t')}, t'\right) - \right.\right. \\ \left.\left. - \Omega\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t')}, t'\right)\right] dt'\right\} \mathscr{N}(\nu_0, t_1) R^3(t_1) + \\ + 8\pi\nu_0^2 R^3(t_0) \int_{t_1}^{t} \exp\left\{-\int_{t'}^{t} \left[\Lambda\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t'')}, t''\right) - \right.\right. \\ \left.\left. - \Omega\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t'')}, t''\right)\right] dt''\right\} \Omega\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t')}, t'\right) dt'$$

с произвольным t_1. Первый член дает число фотонов, оставшихся к моменту t_1, а второй — число фотонов, излученных с момента t_1; в обоих случаях экспоненциальные множители учитывают влияние

последующего поглощения и индуцированного излучения. Этот результат упрощается, если взять момент t совпадающим с настоящим моментом t_0, а момент t_1 считать удаленным в прошлое настолько, чтобы можно было почти весь фон считать излученным после этого момента. Тогда современная плотность фотонов на единичный интервал частот равна

$$n_{\gamma 0}(\nu_0) \equiv \mathcal{N}(\nu_0, t_0) =$$

$$= 8\pi\nu_0^2 \int_{t_1}^{t_0} \exp\left\{-\int_t^{t_0}\left[\Lambda\left(\nu_0\frac{R(t_0)}{R(t')}, t'\right)-\Omega\left(\nu_0\frac{R(t_0)}{R(t')}, t'\right)\right]dt'\right\}\times$$

$$\times\,\Omega\left(\nu_0\frac{R(t_0)}{R(t)}, t\right)dt. \qquad (15.4.9)$$

Если *среда* находится в тепловом равновесии, то можно, пользуясь (15.4.7), выразить Ω через Λ и получить плотность фотонов в настоящее время в виде

$$n_{\gamma 0}(\nu_0) = 8\pi\nu_0^2 \int_{t_1}^{t_0} \exp\left(-\frac{h\nu_0 R(t_0)}{kT(t)R(t)}\right)\Lambda\left(\nu_0\frac{R(t_0)}{R(t)}, t\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-\int_t^{t_0}\left[1-\exp\left(-\frac{h\nu_0 R(t_0)}{kT(t')R(t')}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\,\Lambda\left(\nu_0\frac{R(t_0)}{R(t')}, t'\right)dt'\right\}dt. \qquad (15.4.10)$$

Осталось еще не рассмотренным влияние рассеяния фотонов. Любого рода рассеяние выводит фотоны из пучка, и это не сопровождается возвращением части фотонов в пучок путем индуцированного излучения. С учетом этого для оптической толщи вместо (15.4.8) имеем

$$\tau = \int_{t_1}^{t_0}\left[1-\exp\left(-\frac{h\nu_1 R(t_1)}{kT(t)R(t)}\right)\right]\Lambda\left(\nu_1\frac{R(t_1)}{R(t)}, t\right)dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_0}\sum\left(\nu_1\frac{R(t_1)}{R(t)}, t\right)dt, \qquad (15.4.11)$$

где $\sum(\nu, t)$ есть коэффициент рассеяния фотона частоты ν в момент t. Намного труднее учесть влияние рассеяния фотонов изотропным фоном, поскольку при каждом акте рассеяния в составе фона появляется новый фотон вместо исчезнувшего. Одним из простых случаев является томсоновское рассеяние, при котором и $h\nu$, и kT много меньше массы заряженной частицы. Такое рассеяние не меняет частоты фотона, и оно просто не влияет на изотропный фон. В наших вычислениях изотропного фона мы будем

вынуждены предположить, что акты рассеяния (не считая томсоновского) происходят намного реже, чем акты поглощения. (Заметим, однако, что резонансное рассеяние нужно считать поглощением, если среднее время жизни резонансного состояния значительно больше среднего времени свободного пробега частиц в среде.)

Применим теперь этот формализм к проблеме обнаружения «недостающей массы» в межгалактической среде. Если межгалактическая среда состоит из разреженного газа нейтральных атомов, таких, как водород, то он будет поглощать излучение на строго определенных дискретных частотах, соответствующих различным переходам между атомными состояниями. Предположим для простоты, что все поглощение происходит в пределах малого частотного интервала, симметричного относительно одиночной частоты поглощения $\nu_{\text{п}}$. Коэффициент поглощения имеет тогда вид

$$\Lambda(\nu, t) = n(t)\,\sigma_{\text{п}}(\nu),$$

где $n(t)$ — плотность атомов в момент t космического времени, $\sigma_{\text{п}}$ — сечение поглощения, которое предполагается пренебрежимо малым при всех ν, кроме резкого пика при $\nu_{\text{п}}$. Согласно (15.4.8), поглощение луча света, покидающего источник в момент t_1 с частотой $\nu_1 > \nu_{\text{п}}$ и доходящего до наблюдателя в момент t_0 с частотой $\nu_0 < \nu_{\text{п}}$, будет почти всецело происходить в момент $t_{\text{п}}$, такой, что

$$R(t_{\text{п}}) = \frac{\nu_1 R(t_1)}{\nu_{\text{п}}} = \frac{\nu_0 R(t_0)}{\nu_{\text{п}}}, \tag{15.4.12}$$

и, следовательно, оптическая толща равна

$$\tau \approx n(t_{\text{п}}) \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{\text{п}}}{kT(t_{\text{п}})}\right)\right] \int \sigma_{\text{п}}\left(\nu_1 \frac{R(t_1)}{R(t)}\right) dt.$$

Заменой переменной t на $\nu \equiv \nu_1 R(t_1)/R(t)$ получим

$$\tau \approx n(t_{\text{п}}) \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{\text{п}}}{kT(t_{\text{п}})}\right)\right] \left[\frac{R(t_{\text{п}})}{\dot{R}(t_{\text{п}})}\right] I_{\text{п}}, \tag{15.4.13}$$

где

$$I_{\text{п}} \equiv \frac{1}{\nu_{\text{п}}} \int \sigma(\nu)\, d\nu, \tag{15.4.14}$$

причем интеграл берется по полосе частот, ширина которой достаточна, чтобы включить всю линию поглощения. Выбор конкретной космологической модели необходим при этом только для определения «постоянной» Хаббла $\dot{R}/R$ в момент $t_{\text{п}}$; согласно (15.3.3), (15.4.12) и (15.3.22),

$$\frac{\dot{R}(t_{\text{п}})}{R(t_{\text{п}})} = \frac{R(t_0)}{R(t_{\text{п}})} H_0 \left[1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{R(t_0)}{R(t_{\text{п}})}\right]^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{\nu_{\text{п}}}{\nu_0}\right) H_0 \left[1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{\nu_{\text{п}}}{\nu_0}\right]^{1/2}. \tag{15.4.15}$$

Используя (15.4.15) в (15.4.13), мы видим, что оптическая толща на *принимаемой* частоте ν_0 равна

$$\tau(\nu_0) = \frac{\nu_0 n(t_п) I_п}{\nu_п H_0}\left[1-\exp\left(-\frac{h\nu_п}{kT(t_п)}\right)\right]\left[1-2q_0+2q_0\frac{\nu_п}{\nu_0}\right]^{-1/2}. \tag{15.4.16}$$

Разумеется, этот результат имеет место, только когда можно удовлетворить условию (15.4.12) вдоль луча, т. е. только для ν_0 из интервала

$$\frac{\nu_п}{(1+z)} \leqslant \nu_0 \leqslant \nu_и, \tag{15.4.17}$$

где $z \equiv (\nu_1/\nu_0) - 1$ — красное смещение *источника*. Следовательно, нужно ожидать *окна* в пределах этого интервала. Оптическая толща, порожденная одиночной линией поглощения на частоте $\nu_п$, исчезает при $\nu_0 < \nu_п/(1+z)$, круто поднимается при $\nu_п/(1+z)$ до значения

$$\tau\left(\frac{\nu_п}{(1+z)}+\right) = \frac{n(t_1) I_п}{H_0(1+z)}\left[1-\exp\left(-\frac{h\nu_п}{kT(t_1)}\right)\right][1+2q_0 z]^{-1/2}, \tag{15.4.18}$$

затем меняется более или менее плавно, пока $\nu_п > \nu_0$, принимая при $\nu_0 = \nu_п$ значение

$$\tau(\nu_п-) = H_0^{-1} n(t_0) I_п\left[1-\exp\left(-\frac{h\nu_п}{kT(t_0)}\right)\right] \tag{15.4.19}$$

и, наконец, резко спадает к нулю при $\nu_0 > \nu_п$.

Одновременно с поглощением световых сигналов межгалактическая среда будет испускать изотропное фоновое излучение. Если среда обладает линией поглощения на частоте $\nu_п$, то она будет иметь и одиночную линию излучения на той же частоте и соответствующее излучение будет наблюдаться на «покрасневших» частотах $\nu_0 < \nu_п$. Используя (15.4.10) и следуя тем же рассуждениям, которые привели к (15.4.16), получим, что современная плотность числа фоновых фотонов в единице интервала частот при частоте наблюдения ν_0 равна

$$\mathscr{N}(\nu_0, t_0) = \frac{8\pi\nu_0^3 n(t_п) I_п}{\nu_п H_0}\exp\left(-\frac{h\nu_п}{kT(t_п)}\right)\left[1-2q_0+2q_0\frac{\nu_п}{\nu_0}\right]^{-1/2}, \tag{15.4.20}$$

где $I_п$ и $t_п$ определяются соответственно выражениями (15.4.14) и (15.4.12).

При изменении частоты ν_0 плотность n — числа фоновых фотонов — изменяется более или менее плавно до некоторой частоты $\nu_п$, определяемой соотношением

$$\mathscr{N}(\nu_п-, t_0) = 8\pi\nu_п^2 H_0^{-1} n(t_0) I_п \exp\left(-\frac{h\nu_п}{kT(t_0)}\right), \tag{15.4.21}$$

а при $\nu_0 > \nu_п$ резко падает до нуля.

Более точный характер зависимости оптической толщи (15.4.16) и плотности фоновых фотонов (15.4.20) от частоты ν_0 определяется предысторией плотности $n(t)$ и температуры $T(t)$. Если атомы, поглощающие и излучающие линию с частотой $\nu_п$, не возникают и не исчезают в течение интервала от $t_п$ до t_0, то

$$n(t_п) = n(t_0)\left[\frac{R(t_0)}{R(t_п)}\right]^3 = n(t_0)\left[\frac{\nu_п}{\nu_0}\right]^3 \qquad (15.4.22)$$

в соответствии с (14.2.17). В частности, при $\nu_п = \nu_0(1+z)$ имеем $t_п = t_1$ и, следовательно,

$$n(t_1) = n(t_0)[1+z]^3. \qquad (15.4.23)$$

Если «недостающая масса» состоит из атомов межгалактического нейтрального водорода, то при $q_0 \approx 1$ и $H_0 \approx 75$ км/(с·Мпс) плотность этого газа должна быть $\rho_0 \approx 2\cdot10^{-29}$ г/см^3 (§ 2 гл. 15) и соответственно плотность атомов

$$n(t_0) = \frac{\rho_0}{m_н} \approx 1{,}2\cdot10^{-5}\ \text{см}^{-3}. \qquad (15.4.24)$$

Верим мы этой конкретной оценке или нет, но плотность атомов порядка 10^{-5} см$^{-3}$ должна служить той выделенной целью, к которой следует стремиться при попытках обнаружить межгалактическую среду.

Наиболее четкой радиочастотной линией поглощения атомов водорода является сверхтонкий переход на длине волны 21 см, вызванный переворотом спинов протона и электрона в 1s-состоянии, при этом происходит изменение полного спина от 0 к 1. Частота этой линии $\nu_п = 1420$ МГц и соответствует температуре $h\nu_п/k = 0{,}068$ К, что почти наверняка много ниже любой «спиновой температуры», которая может быть у межгалактического водорода. Следовательно, множитель, учитывающий индуцированное излучение, в данном случае можно записать приближенно:

$$1 - \exp\left(-\frac{h\nu_п}{kT}\right) \approx \frac{h\nu_п}{kT} = \frac{0{,}068\ \text{К}}{T}. \qquad (15.4.25)$$

Коэффициент поглощения (15.4.14) равен

$$I_{21\text{см}} = 2{,}73\cdot10^{-23}\ \text{см}^2. \qquad (15.4.26)$$

Остроумный метод обнаружения эффектов слабого поглощения в районе 21 см был предложен в 1959 г. Филдом [54] и применен им для поиска таких эффектов в спектре радиогалактики Лебедь А. Красное смещение этого источника $z = 0{,}056$, и согласно условию (15.4.17) в полосе частот наблюдения 1342—1420 МГц должно оказаться окно. Поскольку эта полоса достаточно узка, оптическую толщу в пределах окна можно хорошо аппроксимировать

значением (15.4.19). Вместе с (15.4.25) и (15.4.26) это дает для отношения плотности к температуре величину (в единицах СГС)

$$\frac{n_{\text{H}}(t_0)}{T(t_0)} \approx \frac{kH_0\tau}{h\nu_{\text{п}} I_{\text{п}} c} \approx 4{,}4\cdot 10^{-5}\tau \text{ см}^{-3}\cdot\text{град}^{-1}\left[\frac{H_0}{75 \text{ км/(с}\cdot\text{Мпс)}}\right]. \quad (15.4.27)$$

Филд [54] не обнаружил какого-либо окна и получил оценку $\tau < 0{,}0075$, откуда при $H_0 = 75$ км/(с·Мпс) получается, что верхний предел $n_{\text{H}}(t_0)/T(t_0) < 3{,}3\cdot 10^{-7}$ см$^{-3}$·град$^{-1}$ для отношения плотности атомов нейтрального водорода к его температуре в настоящий момент времени. Этот эксперимент с тех пор повторялся и Филдом [55] и другими [56—60], но пока никакого окна в этой полосе частот достоверно не установлено. Недавнее измерение Пензиаса и Скотта [69] дало $\tau < 5\cdot 10^{-4}$, откуда при $H_0 = 75$ км/(с·Мпс) следует

$$\frac{n_{\text{H}}(t_0)}{T(t_0)} < 2{,}3\cdot 10^{-8} \text{ см}^{-3}\cdot\text{град}^{-1}. \quad (15.4.28)$$

Представляется разумным предположить [61], что эффективная спиновая температура межгалактического водорода должна быть около 2,7 К, т. е. равна температуре фонового микроволнового излучения (§ 5 этой главы). В таком случае неравенство (15.4.28) накладывает ограничение сверху на плотность атомов межгалактического водорода

$$n_{\text{H}}(t_0) < 6\cdot 10^{-8} \text{ см}^{-3}, \quad (15.4.29)$$

что в 200 раз меньше ожидаемого значения (15.4.24). Если межгалактическим водородом действительно восполняется недостающая масса, то неравенство (15.4.28) требует, чтобы его температура была выше 500 К.

Предпринимались попытки обнаружить «покрасневшие» абсорбционные эффекты на длине волны 21 см, в спектрах квазаров 3C191, PKS 1116 + 12 и 3C287, но ничего подобного не обнаружено [62].

Одна из возможностей так установить верхний предел для плотности нейтрального водорода в межгалактическом пространстве, чтобы этот предел не зависел от предположений о верхней границе спиновой температуры, состоит в том, чтобы найти «покрасневшее» 21-сантиметровое излучение, которое должен испускать водород. Поскольку в любом случае имеется микроволновый фон, фон за счет 21-сантиметрового излучения должен был бы проявиться в виде скачка в плотности фотонов на частоте $\nu_0 = \nu_{\text{п}} = 1420$ МГц. Согласно (15.4.21), этот скачок в единичном интервале частот должен быть равен (в единицах СГС)

$$\Delta\mathscr{N} = 8\pi\nu_{\text{п}}^2 H_0^{-1} c^{-2} I_{\text{п}} n_{\text{H}}(t_0). \quad (15.4.30)$$

[Здесь предполагается, что $T \gg h\nu_{\text{п}}/k = 0{,}068$ К. В противном случае отсутствие окна ниже 21 см приводит к еще более низкому верхнему пределу для $n_{\text{Н}}(t_0)$, чем (15.4.28) или (15.4.29).] Результаты измерений фонового излучения обычно выражают через эквивалентную «температуру антенны» $T_{\text{а}}$, определяемую по формуле Рэлея — Джинса

$$\mathscr{I} \equiv 8\pi\nu_{\text{п}} k T_{\text{а}} h^{-1} c^{-3}, \tag{15.4.31}$$

так что из (15.4.30) получаем

$$n_{\text{Н}}(t_0) = \frac{k\Delta T_{\text{а}} H_0}{h\nu_{\text{п}} I_{\text{п}} c} = 4{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-3} \left(\frac{\Delta T_{\text{а}}}{1 \text{ К}}\right)\left(\frac{H_0}{75 \text{ км/(с·Мпс)}}\right), \tag{15.4.32}$$

где $\Delta T_{\text{а}}$ — скачок температуры антенны при 1420 МГц. По данным Пензиаса и Вилсона [63], $\Delta T_{\text{а}} < 0{,}08$ К, т. е.

$$n_{\text{Н}}(t_0) < 3 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-3}, \tag{15.4.33}$$

если $H_0 = 75$ км/(с·Мпс). Эта верхняя граница лишь в четыре раза меньше ожидаемого значения (15.4.24), и пока нельзя полностью исключить то, что недостающая масса состоит из нейтрального атомарного водорода.

Другая четкая линия поглощения, используемая при поисках межгалактического водорода,— это линия α серии Лаймана в спектре водорода, возникающая при переходе электрона из $1s$- в $2p$-состояние. Длина волны этой линии $\lambda = 1215$ Å, т. е. она лежит в ультрафиолетовой области; поэтому нормальная линия α Лаймана не может проникнуть сквозь земную атмосферу. Однако фотон с $\lambda = 1215$ Å при $1{,}5 < z < 6$ сдвигается в «окно» видимой области (3000—7000 Å) к моменту достижения Земли и может быть зарегистрирован наземными астрономами. Таким образом, атомы межгалактического водорода в принципе могли бы быть обнаружены при наблюдении эффектов поглощения в спектрах квазаров с $z > 1{,}5$ на частотах испускания линии α Лаймана.

Имеется несколько причин, по которым эта линия поглощения может служить более чувствительным индикатором наличия атомов межгалактического водорода, чем поглощение на 21 см. Прежде всего для нее характерен больший коэффициент поглощения (15.4.14):

$$I_{\text{Ly}\alpha} = 4{,}5 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2. \tag{15.4.34}$$

Кроме того, $\nu_{\text{а}} = 2{,}47 \cdot 10^{15}$ Гц, что соответствует температуре $h\nu_{\text{п}}/k = 118\,000$ К, и поскольку мы здесь предполагаем, что ионизация мала, то с необходимостью получаем

$$\frac{h\nu_{\text{п}}}{kT} \gg 1. \tag{15.4.35}$$

Множители $1 - \exp(-h\nu_{\text{п}}/kT)$ в формулах (15.4.16), (15.4.18) и (15.4.19), которые соответствуют ослаблению поглощения вследствие индуцированного излучения, можно теперь положить равными единице. Наконец, в спектрах квазаров часто присутствует линия α Лаймана как линия *излучения*; если поблизости имеются заметные количества нейтрального водорода, то голубое крыло этой линии должно быть заметно подавлено из-за множителя $e^{-\tau}$ с τ, определяемым в соответствии с (15.4.18), (15.4.34) и (15.4.35) следующим выражением (в единицах СГС):

$$\tau\left(\frac{\nu_{\text{п}}}{1+z}+\right) = \frac{n_{\text{H}}(t_1)\, cI_{\text{п}}}{H_0(1+z)(1+2q_0z)^{1/2}} = \\ = \frac{5{,}5\cdot 10^{10}}{(1+z)(1+2q_0z)^{1/2}}\left(\frac{n_{\text{H}}(t_1)}{\text{см}^{-3}}\right)\left(\frac{75\ \text{км/(с}\cdot\text{Мпс)}}{H_0}\right). \quad (15.4.36)$$

Отметим, что подавление голубого крыла линии α Лаймана определяет плотность нейтрального водорода вскоре после момента излучения, а не в настоящее время. (Кроме того, если квазары представляют собой локальные явления, то вообще не следует ожидать какого-либо подавления.)

Попытки обнаружить эффекты поглощения линии α Лаймана были связаны в основном с квазаром 3C9 с $z = 2{,}012$. Первые измерения были сделаны в 1965 г. Ганном и Петерсоном [64] (см. также [65]); они обнаружили подавление на 40% в голубом крыле линии излучения α Лаймана, что дает

$$\tau\left(\frac{\nu_{\text{п}}}{1+z}+\right) \approx 0{,}5.$$

Полагая $q_0 = {}^1/_2$ и $H_0^{-1} = 10^{10}$ лет, они пришли к заключению, что при $z \approx 2$ плотность атомов водорода равна $6\cdot 10^{-11}$ см$^{-3}$ или около того. В последующих фотометрических измерениях Оке [66] вообще не обнаружено какого-либо подавления голубого крыла этой линии излучения в спектре 3C9, и это, по интерпретации Бэрбиджей [67, стр. 146], означает, что $\tau < 0{,}05$. При $q_0 = 1$ и $H_0 = 75$ км/(с·Мпс) это дает

$$n_{\text{H}}(z \approx 2) < 6\cdot 10^{-12}\ \text{см}^{-3}. \quad (15.4.37)$$

Если верить равенству (15.4.23), то ожидаемое значение n_{H} при $z = 2$ в 27 раз больше, чем $n(t_0)$ из (15.4.24), и, следовательно, наблюдаемая верхняя граница (15.4.37) на восемь порядков меньше, чем ожидаемая величина!

Можно думать, что отсутствие нейтрального водорода поблизости от 3C9 вызвано ионизирующим излучением самого этого квазара. Поэтому важны поиски окна, возникающего вследствие поглощения линии α Лаймана на больших расстояниях от 3C9 и простирающегося от этой линии излучения дальше

в сторону бо́льших частот [см. (15.4.16) и (15.14.17)]. Оке [66] вообще не обнаружил такого окна, а по наблюдениям Уамплера [68] имеется лишь легкое подавление с $\tau(\nu_1) < 0{,}3$.

Были предприняты иные попытки обнаружить межгалактическое поглощение ультрафиолетовой части спектров квазаров, но они также не имели успеха. Филд, Соломон и Уомплер [69] искали эффекты поглощения межгалактического молекулярного водорода в спектре 3C9 и получили, что плотность его меньше, чем 10^{-32} г/см^3. Имеется еще возможность, что межгалактический водород сконцентрирован в виде облаков; в таком случае должно было бы наблюдаться поглощение линии α Лаймана в спектрах квазаров в виде более или менее широких линий, по одной линии на каждое облако вдоль луча зрения. Анализ спектров квазаров, проведенный Бакалом и Солпитером [70], Вагонером [71] и Пиблзом [72], не обнаружил такого рода эффектов, из чего Пиблз заключил, что общая плотность атомов нейтрального водорода, если даже он сконцентрирован в облака, должна быть менее нескольких процентов от ожидаемого значения (15.4.24). Недавно были найдены три или четыре квазара с различными красными смещениями линий поглощения, много меньшими красного смещения соответствующей линии излучения [73]; выглядит это так, словно поглощение происходило вдоль луча зрения вдали от источника. Однако такое явление встречается редко и вполне может быть объяснено процессами, происходящими внутри самого квазара [74—77].

Если недостающую массу нельзя обнаружить в виде атомов или молекул нейтрального водорода, то, быть может, она состоит из ионизованной межгалактической водородной плазмы, возможно, с малой примесью более тяжелых ионов. Высокая степень ионизации, о чем свидетельствует отсутствие поглощения линии α Лаймана в спектрах квазаров, может быть объяснена равновесием между ионизацией при столкновениях и радиационной рекомбинацией, что требует температуры выше 10^6 К при $z \approx 2$ [25].

Такой горячий газ испускал бы рентгеновские лучи вследствие тормозного излучения, вызванного тепловыми электронными столкновениями. Интенсивность рентгеновского излучения на единицу объема и на единичный интервал частот дается формулой

$$\Gamma(\nu) = \left[\frac{32\pi g e^6 Z^3 n_i^2}{3h\nu c^3}\right]\left[\frac{2\pi}{3kTm_e^3}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{h\nu}{kT}\right],$$

где n_i — плотность числа ионов, Z^3 — средний куб атомного числа, g — поправочный фактор Гаунта, имеющий, по оценкам [78], вблизи пика спектра фотонов значение между $^1/_2$ и 2. Филд и Генри [79] вычислили результирующий космический рентгеновский

фон в предположении, что недостающая масса состоит из H и He^4 (10% по числу атомов), внезапно нагретых до начальной температуры T_0 (между 10^4 и 10^{10} К) в период, когда фактор R был где-то между $R_0/2$ и $R_0/10$, и затем остывавших адиабатически по закону $T \sim R^{-2}$. Соответствующий спектр быстро спадает при $h\nu > kT_0$, и если учесть, что межзвездная среда в Галактике непрозрачна для мягких рентгеновских лучей с $h\nu < 0{,}1$ кэВ, то рентгеновский фон, создаваемый межгалактической средой, может быть наблюдаемым лишь при условии, что начальная температура T_0 была выше 10^6 К.

Действительно, ракетные наблюдения (подытоженные недавно Бречером и Бэрбиджем [80]) свидетельствуют о существовании диффузного фона рентгеновских и γ-лучей по меньшей мере в диапазоне от 250 эВ до 100 МэВ. Этот фон в высшей степени изотропен [81], что позволяет предполагать внегалактическое происхождение хотя бы части его. Однако до последнего времени рентгеновский фон, вообще говоря, не рассматривался как возможное свидетельство того, что недостающая масса состоит из ионизованного межгалактического водорода. В частности, это было вызвано тем, что оценки интенсивности рентгеновского излучения были ниже, чем в настоящее время, и вместе с тем Филд и Генри [79] брали несколько большее значение для постоянной Хаббла и, следовательно, для плотности недостающей массы. Поэтому было трудно построить такую температурную историю межгалактической среды, при которой температура была бы достаточно высокой для согласия с вышеприведенными результатами по поглощению линий α Лаймана и по поглощению и излучению на длине волны 21 см, но в то же время и достаточно низкой для того, чтобы не возникало мягкого рентгеновского излучения, большего, чем наблюдалось. К тому же после открытия космического микроволнового фона оказалось возможным объяснить рентгеновский фон обратным комптон-эффектом (см. конец следующего параграфа).

Недавно Коусик и Кобетич [82, 83] вновь рассмотрели вопрос о происхождении космического рентгеновского фона. Они нашли, что рентгеновский спектр ниже 1 кэВ можно приписать обратному комптон-эффекту, а выше 100 кэВ он согласуется с ожидаемым γ-излучением белых карликов. Однако от 1 до 100 кэВ рентгеновский спектр имеет избыточный «излом», который грубо может быть описан следующим потоком в единичном интервале энергии:

$$\Phi_{\text{изб}}(E) \approx 3 \text{ кэВ} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{кэВ}^{-1} \cdot \exp\left(-\frac{E}{30 \text{ кэВ}}\right).$$

Именно такого спектра следует ожидать для тормозного излучения межгалактического водорода при эффективной температуре

$3{,}3 \cdot 10^8$ К и интегральной плотности квадрата числа ионов $\int n^2_i ds$ порядка 10^{17} см$^{-5}$. Такая среда могла бы восполнить недостающую массу, особенно если H_0 имеет значение, близкое к 50 км/(с·Мпс), т. е. несколько ниже, чем принято считать. Однако Филд [79] указывает, что избыток рентгеновского фона может быть создан также «сгустками» вещества, такими, как ионизованный газ внутри скоплений галактик [25] (§ 3 этой главы). В таком случае требующаяся средняя плотность уменьшается в число раз, равное отношению среднеквадратичной массы к средней, и становится ниже критической плотности $\rho_{кр}$.

Приведем некоторые соображения, подсказанные последними исследованиями ([84—90] и др.) температурной истории межгалактической среды. Риз [91] выдвинул интересное предположение о том, что межгалактическая среда стала ионизованной в момент времени, соответствующий некоторому критическому красному смещению $z_{кр}$, причем $2 < z_{кр} < 3$. В этом случае поглощение света нейтральным водородом на лаймановских α-, β-, . . .-линиях и в лаймановском континууме снизило бы светимость квазаров, имеющих $z > z_{кр}$, в частности, в голубой области спектра. Тогда заметное отсутствие квазаров с $z > 3$ могло бы быть объяснено эффектом селекции, если идентифицировать квазары на паломарских обзорных фотографиях, как обычно, по их голубому цвету. Если быстрый рост плотности квазаров с ростом z, обнаруженный Шмидтом [40] (§ 3 гл. 15), действительно продолжается за значениями $z = 2$, то эти квазары могут дать количество энергии, вполне достаточное для ионизации межгалактического водорода при $z = z_{кр}$. С другой стороны, возможно, что при $z = z_{кр}$ *происходит образование* квазаров и именно при этом процессе ионизуется межгалактическая среда. Так или иначе, весьма похоже, что с космической лестницей расстояний происходит нечто особенное при $z \approx 3$.

Влияние ионизованного межгалактического водорода на распространение световых сигналов может быть вычислено без детальных предположений о температуре плазмы. Пока $h\nu$ и kT много меньше 1 МэВ, происходит главным образом изотропное упругое рассеяние, причем сечение, отнесенное к одному электрону, равно $\sigma_T = 0{,}6652 \cdot 10^{-24}$ см^2 (томсоновское сечение). Оптическая толща вычисляется тогда по формуле (15.4.11) без первого члена и с коэффициентом рассеяния, равным

$$\Sigma(\nu, t) = \sigma_T n_e(t), \qquad (15.4.38)$$

где n_e — плотность электронов, равная плотности протонов. Предположим, что вся недостающая масса состоит из ионизован-

ного водорода; тогда из (15.1.22), (15.2.6) и (15.2.3) следует

$$n_e(t) \approx \frac{\rho(t)}{m_H} = \frac{3q_0H_0^2}{4\pi G m_H}\left(\frac{R(t_0)}{R(t)}\right)^3. \qquad (15.4.39)$$

Согласно уравнению (15.3.3),

$$dt = \frac{dR}{\dot{R}} = \frac{dR(t)}{R(t_0)H_0}\left[1 - 2q_0 + 2q_0\left(\frac{R(t_0)}{R(t)}\right)\right]^{-1/2}. \qquad (15.4.40)$$

Используя (15.4.38) — (15.4.40) в формуле (15.4.11), найдем оптическую толщу

$$\tau = \frac{3q_0H_0\sigma_T R^2(t_0)}{4\pi G m_H}\int_{R(t_1)}^{R(t_0)} dR\, R^{-3}\left[1 - 2q_0 + 2q_0\left(\frac{R(t_0)}{R}\right)\right]^{-1/2}.$$

Отсюда для источника с красным смещением $z \equiv R(t_0)/R(t_1) - 1$ оптическая толща [92]

$$\tau(z) = \frac{\tau_c}{q_0}\left[(3q_0 + q_0z - 1)(1 + 2q_0z)^{1/2} + 1 - 3q_0\right], \qquad (15.4.41)$$

где (в единицах СГС)

$$\tau_c = \frac{H_0\sigma_T c}{4\pi G m_H} = 0{,}035\left(\frac{H_0}{75\ \text{км/(с·Мпс)}}\right). \qquad (15.4.42)$$

Поскольку квазары с $z = 2$ не кажутся особенно тусклыми, $\tau(2)$, по-видимому, меньше единицы; при $H_0 = 75$ км/(с·Мпс) это дает $q_0 < 10$; при $q_0 = 1$ оптическая толща меньше единицы вплоть до $z = 6$, и поэтому томсоновское рассеяние, вероятно, не имеет большого значения для изучения квазаров.

Межгалактическая среда из ионизованного водорода не только рассеивала бы радиосигналы, она также и *задерживала* бы их [93]. Групповая скорость электромагнитной волны с частотой ν в ионизованном газе с плотностью электронов n_e равна (см., например, [94])

$$\beta = \left(1 - \frac{\nu_p^2}{\nu^2}\right)^{1/2}, \qquad (15.4.43)$$

где ν_p — плазменная частота:

$$\nu_p \equiv \left(\frac{e^2n_e}{m_e\pi}\right)^{1/2} = 8{,}97\cdot10^3\ \text{Гц}\,(n_e\,[\text{см}^{-3}])^{1/2} \qquad (15.4.44)$$

(опять же все это справедливо, лишь если и $h\nu$, и kT много меньше массы покоя электрона). В локально-инерциальной системе координат имеем $|\,d\mathbf{x}\,| = \beta dt$, так что инвариантное собственное время

$$d\tau^2 = (1 - \beta^2)\,dt^2.$$

Приравнивая это выражение элементу длины Робертсона — Уокера с $d\theta = d\phi = 0$, получаем

$$(1-\beta^2)\,dt^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)\,dr^2}{1-kr^2}$$

или проще

$$\beta\frac{dt}{R} = \pm\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}.$$

Радиосигнал, покидающий источник с радиальной координатой r_1 в момент t_1, приходит с задержкой на Δt, определяемой равенством

$$\int_{t_1}^{t_0+\Delta t}\beta\frac{dt}{R} = \int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}, \tag{15.4.45}$$

где t_0 — момент времени, в который пришел бы сигнал, если бы не было дисперсии, т. е. t_0 определяется из равенства

$$\int_{t_1}^{t_0}\frac{dt}{R} = \int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{15.4.46}$$

Во всех практически важных случаях $v_p \ll v$, и поэтому β почти равно единице:

$$\beta \approx 1 - \frac{v_p^2(t)}{2v^2(t)} = 1 - \frac{v_p^2(t)\,R^2(t)}{2v_0^2R^2(t_0)}, \tag{15.4.47}$$

где v_0 — частота, наблюдаемая в момент t_0. Вычитая (15.4.46) из (15.4.45) и разлагая до первого порядка по Δt и $1-\beta$, получаем

$$\frac{\Delta t}{R(t_0)} = \int_{t_1}^{t_0}[1-\beta]\frac{dt}{R} \tag{15.4.48}$$

или, подставляя (15.4.47),

$$\Delta t = \frac{1}{2v_0^2R(t_0)}\int_{t_1}^{t_0} v_p^2(t)\,R(t)\,dt. \tag{15.4.49}$$

Эта полная задержка не равна в точности интегралу от $v_p^2/2v^2$ по времени, как этого можно было ожидать. В формуле (15.4.48) появляется дополнительный множитель $R(t_0)/R(t)$ из-за того, что задержка, образовавшаяся к моменту достижения фотоном данной точки на его пути, вызывает дополнительное увеличение расстояния, которое он еще должен пройти.

При вычислении Δt удобно перейти от переменной t к

$$z' \equiv \frac{R(t_0)}{R(t)} - 1.$$

Тогда, согласно (15.3.3),

$$dt = -H_0^{-1}[1+2q_0z']^{-1/2}(1+z')^{-2}\,dz'.$$

Кроме того, если свободные электроны не рождаются и не исчезают, то

$$\nu_p^2(t) = \nu_{p0}^2\left(\frac{R(t_0)}{R(t)}\right)^3 = \nu_{p0}^2(1+z')^3.$$

Теперь из (15.4.49) получаем

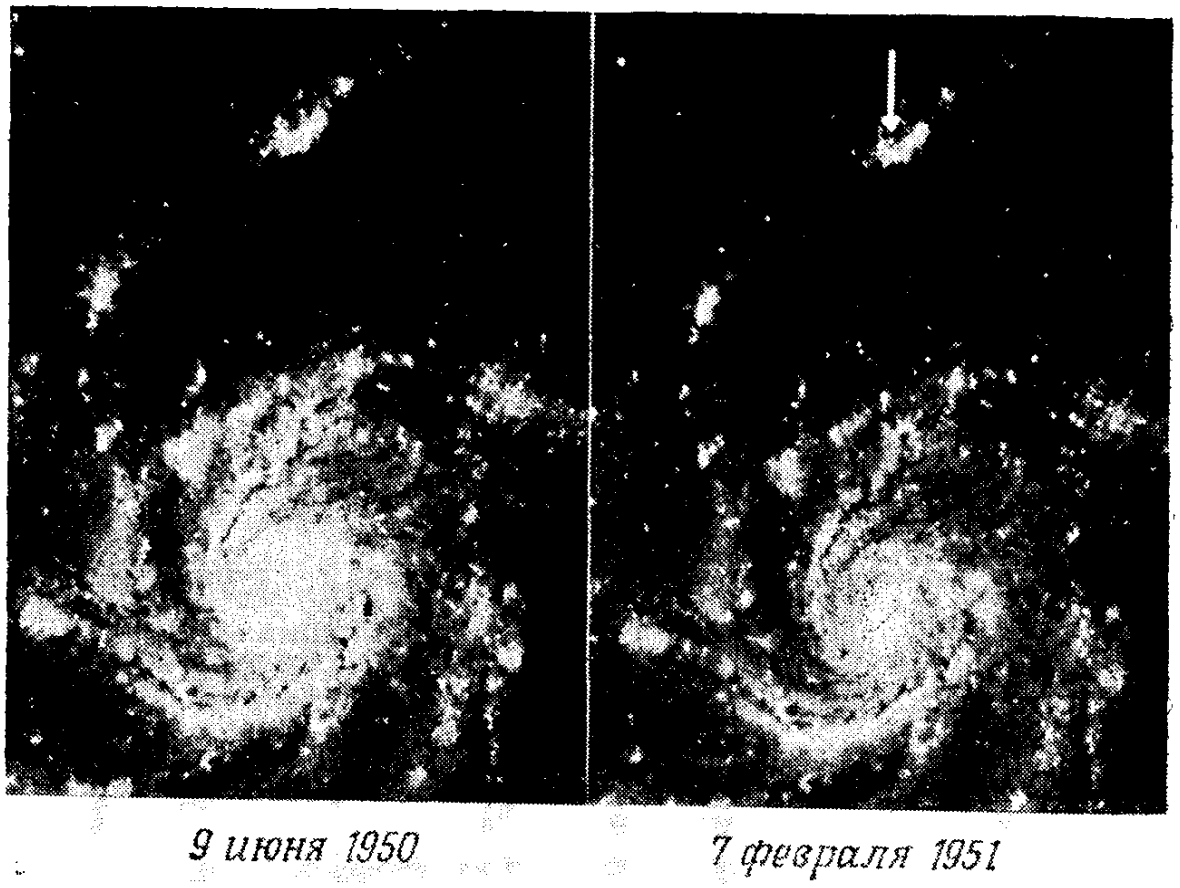
$$\Delta t = \frac{\nu_{p0}^2}{2\nu_0^2 H_0}\int_0^z [1+2q_0z']^{-1/2}\,dz',$$

и отсюда

$$\Delta t = \frac{\nu_{p0}^2}{2q_0\nu_0^2 H_0}\{[1+2q_0z]^{1/2}-1\}. \qquad (15.4.50)$$

К примеру, предположим, что $q_0 \approx 1$ и $H_0 \approx 75$ км/(с·Мпс). Тогда следует ожидать, что плотность электронов в настоящее время равна $n_{e0} \approx 1{,}2\cdot10^{-5}$ см$^{-3}$ [см. (15.4.24)], и в таком случае нынешняя плазменная частота $\nu_{p0} \approx 31$ Гц. Для сравнения укажем, что частоты, на которых наблюдаются флуктуации у квазаров [95], порядка 10 000 МГц, т. е. больше ν_{p0} примерно на семь порядков, поэтому возможные задержки сигналов вообще предельно малы. Резкая флуктуация в квазаре с $z \approx 2$ была бы видна нам на частоте $\nu_0 = 10\,000$ МГц на $\Delta t \approx 2{,}5$ с позднее, чем на очень высоких частотах. Хотя у квазаров действительно наблюдаются флуктуации, к сожалению, не похоже, чтобы имелись какие-либо флуктуации на радиочастотах с временным масштабом короче нескольких дней (см., например, [67], гл. 6). К тому же, даже если бы такие флуктуации существовали, межгалактическая задержка могла бы быть завуалирована дисперсией в пределах самого источника. Однако если бы эти трудности удалось преодолеть, то и ν_{p0} и q_0 могли бы в принципе быть определены измерением задержки при различных красных смещениях и сравнением результатов с (15.4.50).

Более скромная и, по-видимому, практически более доступная программа состоит в измерении межгалактической плотности числа электронов вблизи Галактики путем наблюдения зависящей от частоты задержки радиосигналов пульсара, расположенного в какой-нибудь относительно близкой галактике. (Это непосредственное расширение метода, используемого для определения расстояний до пульсаров в пределах Галактики, где плотность электронов известна с вполне приемлемой точностью.) Пульсары считаются остатками сверхновой, и, следовательно, они должны обнаруживаться в других галактиках при поисках очень частых радио- или оптических пульсаций в местах недавних сверхновых,



Фиг. 15.2. Недавняя сверхновая в галактике NGC5457 (M101).
Сфотографирована 200-дюймовым телескопом на г. Паломар.

например таких, как сверхновая в галактике M101, удаленная на $d \approx 4$ Мпс (фиг. 15.2). При таких коротких расстояниях следует в (15.4.50) заменить z на малую величину $H_0 d$. Кроме того, только что образовавшиеся пульсары испускают, вероятно, около 10^4 импульсов в секунду, поэтому мы будем интересоваться теперь разницей в задержке на соседних частотах ν_0 и $\nu_0 + d\nu_0$:

$$-\left(\frac{d\Delta t}{d\nu_0}\right)\delta\nu_0 = \nu_{p0}^2 \nu_0^{-3} \delta\nu_0 d.$$

Например, если $\nu_{p0} = 31$ Гц, разница во времени прихода импульсов пульсара в M101 на частотах 1000 и 1001 МГц будет $4 \cdot 10^{-4}$ с, что сравнимо с ожидаемым периодом пульсара. Работа на частоте 100 МГц вместо 1000 МГц позволила бы обнаружить электронные плотности около 10^{-9} см$^{-3}$. Трудность будет состоять в том, чтобы найти пульсар в какой-либо другой галактике.

К числу других воздействий ионизованной межгалактической среды на световые сигналы относятся сцинтилляция [96, 25], свободно-свободное поглощение [97, 25] и, возможно, фарадеевское вращение [98—101]. В настоящее время обнадеживающим индикатором недостающей массы можно считать только сцинтилляцию.

§ 5. Космический фон микроволнового излучения

Уравнения Эйнштейна требуют, чтобы масштабный фактор $R(t)$ был предельно мал в некоторый период в прошлом, отделенный от нас конечным промежутком времени (§ 1 этой главы). В эту раннюю эпоху вещество и излучение были предположительно в тепловом равновесии при очень высокой температуре. При последующем расширении Вселенной и излучение, и вещество остывали. Наконец, когда температура упала до ~ 4000 К, свободные электроны были связаны в атомные оболочки, прозрачность вещества резко возросла и тепловой контакт между веществом и излучением нарушился. Все имевшееся в то время излучение претерпело с тех пор значительное красное смещение, но попрежнему заполняет пространство вокруг нас.

Широко распространено, хотя и не является единодушным, мнение, что фон микроволнового излучения, открытый в 1965 г., есть как раз это остаточное излучение, претерпевшее красное смещение с множителем, равным примерно 1500, с момента, когда Вселенная стала прозрачна. Коль скоро это так, то микроволновый фон дает ни с чем не сравнимую по ценности информацию об истории Вселенной не только с момента, когда электроны стали связанными, но и с намного более раннего времени — от нескольких первых секунд космической истории.

Во-первых, рассмотрим, какого рода спектра фонового излучения следует ожидать чисто теоретически. Плотность собственной энергии остаточных фотонов, частота которых в настоящий момент времени t_0 находится между ν и $\nu + d\nu$, определяется равенством (15.4.10)

$$\rho_{\gamma 0}(\nu)\, d\nu = h\nu \cdot 8\pi\nu^2\, d\nu \int_0^{t_0} \exp\left(-\frac{h\nu R_0}{kT(t)\,R(t)}\right) \times$$

$$\times \Lambda\left(\frac{\nu R_0}{R(t)}, t\right) P(t_0, t; \nu)\, dt, \qquad (15.5.1)$$

где h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана, R_0 — сокращенное обозначение для $R(t_0)$, $T(t)$ — температура *вещества* в момент t, $\Lambda(\nu, t)$ — коэффициент поглощения фотона с частотой ν в момент t; $P(t_0, t; \nu)$ — вероятность того, что фотон с частотой $\nu R_0/R(t)$, существовавший в момент t, «выживет» (с учетом индуцированного излучения) до настоящего времени:

$$P(t_0, t; \nu) \equiv \exp\left\{-\int_t^{t_0} \left[1 - \exp\frac{h\nu R_0}{kT(t')\,R(t')}\right] \Lambda\left(\frac{\nu R_0}{R(t')}, t'\right) dt'\right\}. \qquad (15.5.2)$$

Нижним пределом в интервале (15.5.1) можно выбрать любой момент t_1, в который вероятностью $P(t_0, t_1; \nu)$ можно пренебречь; выбор $t_1 = 0$, конечно, удовлетворяет этому требованию.

Формулу (15.5.1) можно для удобства переписать в виде

$$\rho_{\gamma 0}(\nu)\, d\nu = 8\pi h\nu^3\, d\nu \int_0^{t_0} \left[\exp\left(\frac{h\nu R_0}{kT(t)\,R(t)}\right) - 1\right]^{-1} \frac{d}{dt} P(t_0, t; \nu)\, dt. \tag{15.5.3}$$

Вероятность выживания P возрастает от $P = 0$ при $t = 0$ до $P = 1$ при $t = t_0$, и она как раз равна взвешенному *среднему от распределения* Планка для излучения черного тела. Если прозрачность возрастает скачкообразно в некоторый момент t_R, то P меняется почти скачком при $t = t_R$ и, согласно (15.5.3),

$$\rho_{\gamma 0}(\nu)\, d\nu \approx \frac{8\pi h\nu^3\, d\nu}{[\exp(h\nu/kT_{\gamma 0}) - 1]}, \tag{15.5.4}$$

где

$$T_{\gamma 0} \equiv \frac{T(t_R)\,R(t_R)}{R_0}. \tag{15.5.5}$$

Таким образом, *в предположении резкого увеличения прозрачности нынешний фон излучения должен иметь спектр излучения черного тела* с температурой $T_{\gamma 0}$.

Результаты измерения фонового излучения принято выражать через поток энергии $\phi_{\gamma 0}(\nu)$, принятой в единицу времени единичной площадкой в единичном телесном угле и в единичном интервале частот. Этот поток (в единицах СГС) можно вычислить из предыдущих формул для $\rho_{\gamma 0}(\nu)$, используя выражение

$$\phi_{\gamma 0}(\nu) = \frac{\rho_{\gamma 0}(\nu)\, c}{4\pi}.$$

Результаты измерения фона часто выражают через *эквивалентную температуру черного тела* $T_{\gamma 0}(\nu)$, определяемую как температура, при которой излучение черного тела будет иметь данную плотность или поток энергии на частоте ν, т. е.

$$\rho_{\gamma 0}(\nu)\, d\nu \equiv \frac{8\pi h\nu^3\, d\nu}{[\exp(h\nu/kT_{\gamma 0}(\nu)) - 1]}. \tag{15.5.6}$$

Тогда спектр излучения черного тела характеризуется тем, что для него $T_{\gamma 0}(\nu)$ не зависит от ν. Наконец, иногда удобно выражать фоновые измерения через *температуру антенны* $T_a(\nu)$, определяемую как температура, при которой данный поток или плотность на частоте ν получаются из формулы (15.5.4) в низкочастотном рэлей-джинсовском приближении ν:

$$\rho_{\gamma 0}(\nu)\, d\nu \equiv 8\pi k T_a(\nu)\, \nu^2 d\nu. \tag{15.5.7}$$

Везде, где это возможно, мы будем пользоваться в обсуждении температурой черного тела $T_{\gamma 0}(\nu)$.

Если не делать никаких предположений относительно температурной истории вещества до резкого увеличения прозрачности, то мы можем сказать только, что фоновое излучение должно иметь приблизительно спектр черного тела с температурой, которая указывает нам на значение $R(t)/R_0$ в момент, когда Вселенная стала прозрачной. Положение с теорией значительно улучшается, если ввести допущение, что в течение того времени, когда вещество и излучение были в тепловом контакте, температура вещества убывала по закону

$$T(t) = \frac{A}{R(t)} \tag{15.5.8}$$

с постоянной A. В этом случае первый множитель подынтегрального выражения в (15.5.3) можно вынести за знак интегрирования и таким образом получить формулу излучения черного тела (15.5.4) *независимо от того, насколько постепенным был переход от непроницаемой к прозрачной Вселенной.* Далее, приняв t_0 в (15.5.3) за произвольный момент времени t, мы видим, что выражение для $\rho_{\gamma 0}$ записывается в виде формулы для излучения черного тела

$$\rho_\gamma(\nu, t)\, d\nu = \frac{8\pi h\nu^3\, d\nu}{[\exp(h\nu/kT_\gamma(t)) - 1]}, \tag{15.5.9}$$

причем

$$T_\gamma(t) = \frac{A}{R(t)} \tag{15.5.10}$$

во все времена — после, во время и до увеличения прозрачности. Конечно, не удивительно, что в период, когда излучение находится в равновесии с веществом, оно описывается формулой для черного тела, и естественно, что его температура (15.5.10) равна в этот период температуре вещества. Замечательно здесь то, что излучение продолжает подчиняться формуле для излучения черного тела (15.5.9) с температурой (15.5.10) как в течение всего периода перехода от низкой к высокой прозрачности, так и после этого перехода, вплоть до настоящего времени. Постоянную A можно определить, положив в (15.5.8) $t = t_0$, и, следовательно, температура излучения во все времена равна

$$T_\gamma(t) = T_{\gamma 0}\left[\frac{R_0}{R(t)}\right], \tag{15.5.11}$$

а температура вещества совпадает с ней в период теплового равновесия:

$$T(t) = T_{\gamma 0}\left[\frac{R_0}{R(t)}\right]. \tag{15.5.12}$$

Таким образом, нынешняя температура излучения $T_{\gamma 0}$ определяет температурную историю ранней Вселенной в течение всего периода, когда величина TR была постоянной.

Чтобы посмотреть, в какие периоды вероятно постоянство TR, рассмотрим модель, представляющую собой идеальный газ в равновесии с излучением черного тела. Плотность энергии этого излучения получается интегрированием (15.5.9) по ν:

$$\rho_\gamma(t) = aT_\gamma^4(t),$$

где (в единицах СГС)

$$a \equiv \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3c^3} = 7{,}5641 \cdot 10^{-15} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{град}^{-4}.$$

Следовательно, полное давление и полная плотность энергии в этой модели равны

$$p = nkT + \frac{1}{3}aT^4,$$

$$\rho = nm + (\gamma - 1)^{-1} nkT + aT^4,$$

где n — плотность частиц газа, m — их масса и γ — отношение удельных теплоемкостей газа, равное $^5/_3$ для одноатомного газа, вроде атомарного водорода. Уравнение сохранения числа частиц можно записать в виде

$$nR^3 = n_0 R_0^3, \tag{15.5.13}$$

а уравнение сохранения энергии (15.1.21) имеет теперь вид

$$\frac{d}{dR}\left[nmR^3 + (\gamma - 1)^{-1} nkTR^3 + aT^4R^3\right] = -3nkTR^2 - aT^4R^2.$$

С помощью (15.5.13) и простых преобразований получим

$$\frac{R}{T}\frac{dT}{dR} = -\left[\frac{\sigma + 1}{\sigma + \frac{1}{3}(\gamma - 1)^{-1}}\right], \tag{15.5.14}$$

σk — *энтропия фотонов, приходящаяся на одну частицу газа*:

$$\sigma \equiv \frac{4aT^3}{3nk} = 74{,}0\,\frac{[T\ (\text{град})]^3}{n\ (\text{см}^{-3})}. \tag{15.5.15}$$

При $\sigma \ll 1$ из (15.5.14) следует, что

$$T \sim R^{-3(\gamma - 1)}, \tag{15.5.16}$$

а это совпадает с обычным соотношением между температурой и объемом при адиабатическом расширении идеального газа. С другой стороны, при $\sigma \gg 1$ то же уравнение (15.5.14) дает

$$T \sim R^{-1}. \tag{15.5.17}$$

Далее, при больших σ, если вещество перестает быть в равновесии с излучением, температурная кривая вещества в конечном итоге

смещается от (15.5.17) к (15.5.16). Однако при предельно больших σ, пока есть хоть сколько-нибудь значительный тепловой контакт между веществом и излучением, излучение будет по-прежнему доминировать над веществом и температура вещества будет иметь желаемое поведение (15.5.8). В этом случае из соотношений (15.5.12), (15.5.13) и (15.5.15) получается, что σ *постоянна*:

$$\sigma = \frac{4aT_{\gamma 0}^3}{3n_0 k}. \qquad (15.5.18)$$

Отсюда, если энтропия σ была когда-нибудь очень велика, то она остается очень большой все время. Тогда мы говорим, что имеем дело с *горячей Вселенной*. В горячей Вселенной фоновое излучение приближенно удовлетворяет соотношениям (15.5.9) и (15.5.11) во все времена, а температура вещества подчиняется равенству (15.5.12) до тех пор, пока прозрачность не становится предельно большой. Заметим, что плотность фотонов в излучении черного тела есть интеграл от $\rho_\gamma(\nu)/h\nu$ по ν или

$$n_\gamma = \frac{30\rho(3)}{\pi^4}\frac{aT_\gamma^3}{k} = 3{,}7\frac{aT_\gamma^3}{k},$$

откуда

$$\sigma = 0{,}36\frac{n_{\gamma 0}}{n_0},$$

и, следовательно, условием того, что Вселенная горячая, является наличие большого числа фотонов на каждый протон или нейтрон в современной Вселенной. Однако все, что до сих пор рассматривалось, не позволяет вычислить значение $T_{\gamma 0}$ и даже не позволяет судить о том, действительно ли Вселенная горячая.

Первая теоретическая оценка температуры излучения была основана на теории синтеза элементов, разработанной в конце 1950-х гг. Г. Гамовым с сотрудниками [102—108]. (Более детально этот вопрос будет обсужден в § 7 этой главы.) В то время, когда температура была 10^9 К (температура диссоциации дейтерия), для того чтобы 10—50% общего числа протонов и нейтронов могли слиться в ядра более тяжелых элементов, плотность нуклонов должна была равняться приблизительно 10^{18} см$^{-3}$. Следовательно, удельная энтропия фотонов (15.5.15) в то время была равна $\sigma \approx 10^{11}$, и в этой модели Вселенная, несомненно, горячая, а поэтому величина σ должна оставаться постоянной как в период непрозрачности Вселенной, так и после него, вплоть до настоящего времени. При современной плотности барионов 10^{-6} см$^{-3}$ масштабный фактор должен быть в $(10^{18}/10^{-6})^{1/3} = 10^8$ раз больше теперь, чем в момент, когда $T \approx 10^9$ К, так что нынешняя температура излучения должна быть равна $10^{-8}\cdot 10^9$ К, т. е. около

10 К. Несколько более детальный анализ этого вопроса, выполненный в 1950 г. Алфером и Германом [108], дал $T_{\gamma 0} \approx 5$ К. К сожалению, эти авторы постоянно выражали сомнения в том, что это излучение могло сохраниться до настоящего времени. Конечно, верно, что конкретные фотоны, существовавшие при $T \approx 10^9$ К, должны быть поглощены задолго до настоящего времени. Однако, поскольку $\sigma \gg 1$, температура вещества должна спадать как R^{-1}, так что фотоны, излученные именно в тот момент, когда Вселенная стала прозрачной, должны иметь то же значение TR, какое было во время синтеза элементов. Так или иначе, примечательному предсказанию фонового излучения черного тела при 5 К позволили кануть в неизвестность.

Проблема определения $T_{\gamma 0}$ была снова поставлена в 1965 г. Дикке, Пиблзом, Роллом и Уилкинсоном [110]. Они доказывали, что Вселенная должна была когда-то быть горячее 10^{10} К, так как она или расширялась от сингулярности с $R = 0$, или, если она подвержена циклическим осцилляциям между конечными значениями R, должна была достигнуть горячего состояния с температурой, достаточной для диссоциации тяжелых элементов, оставшихся от предыдущего цикла. Этот аргумент не фиксирует значения нынешней температуры фонового излучения, но Дикке и др. решили, что плотность энергии космического излучения черного тела не может быть настолько большой, чтобы получилось $q_0 \gg 1$ (§ 2 этой главы); из этого условия вытекало, что $T_{\gamma 0} \leqslant \leqslant 40$ К. Большое достоинство их работы заключалось, однако, не в этой оценке, а прежде всего в том факте, что, наконец, фоновое излучение воспринималось всерьез, причем Роллом и Уилкинсоном был подготовлен эксперимент по измерению $T_{\gamma 0}$.

При измерении температуры излучения менее 40 К трудность состоит, естественно, в том, что цепи приемника имеют значительно большую температуру, и, следовательно, сигнал будет в сотни раз слабее шума приемника. Для выделения сигнала Ролл и Уилкинсон планировали использовать радиометр, изобретенный в 1945 г. Дикке. В этом устройстве приемник сто раз в секунду переключается с одной рупорной антенны, направленной на небо, на другую, направленную на сосуд с жидким гелием. С выхода приемника с помощью фильтров снимается только та часть сигнала, которая изменяется с частотой 100 Гц, и по силе этого сигнала определяется разница между излучением неба и жидкого гелия.

Еще до того, как Ролл и Уилкинсон завершили измерения $T_{\gamma 0}$, они узнали, что Пензиас и Вилсон [109] обнаружили слабый фоновый сигнал на длине волны 7,35 см с помощью рупорной антенны, созданной для наблюдения спутника «Эхо» в Холмделе, штат Нью-Джерси. Температура антенны описывалась кривой

$$T_a(\theta) = 4{,}4 \text{ К} + 2{,}3 \text{ К} \sec \theta,$$

где θ — угол между осью антенны и зенитом. Толщина атмосферы (рассматриваемой как плоская пластина) вдоль луча антенны пропорциональна sec θ, и поэтому второй член мог быть приписан излучению атмосферы. Еще 0,9 К получались по оценкам вклада омических потерь в антенне и излучения Земли, попадающего на боковые стенки антенны. Чистая температура антенны (3,5 ± 1) К оставалась на долю космического микроволнового фона. Поскольку $kT_a \gg h\nu$, она является также и эквивалентной температурой черного тела

$$T_{\gamma 0}\,(7{,}35\text{ см}) = (3{,}5 \pm 1)\text{ К}.$$

Результаты этого эксперимента, являющегося, вероятно, наиболее важным в космологии с тех пор, как Хаббл открыл связь между красным смещением и расстоянием, были опубликованы [109] в 1965 г. под скромным заглавием «Измерение избыточной температуры антенны на частоте 4080 МГц», а в качестве сопровождающей появилась статья Дикке, Пиблза, Ролла и Уилкинсона [110], в которой объяснялось фундаментальное значение этого измерения.

Важно учесть, что, хотя Пензиас и Вилсон сообщали о своем результате как об «избыточной температуре антенны», они измерили поток излучения только на одной частоте. Оставалось еще убедиться в планковской форме (15.5.4) распределения частот этого излучения. В табл. 15.1 перечислены измерения эквивалентной температуры черного тела для фонового излучения, которые были выполнены на различных микроволновых и далеких инфракрасных частотах.

При длинах волн более 100 см космический фон подавлен СВЧ-излучением Галактики. В диапазоне от 75 до 0,3 см фоновое излучение может быть измерено наземными микроволновыми радиометрами, подобными тем, которые использовали Пензиас и Вилсон и Ролл и Уилкинсон. Однако ниже 3 см становятся очень большими помехи от излучения атмосферы и возникает необходимость выполнять наблюдения в высокогорье и на длинах волн, для которых существуют «окна» в атмосфере. например на 0,9 см и 0,3 см. Ниже 0,3 см нет подходящих «окон», и измерительная аппаратура должна быть помещена на шарах-зондах или на ракетах. Кроме того, можно косвенно определить фоновую температуру на некоторых частотах по поглощению света молекулами в межзвездном пространстве. Например, циан имеет видимую линию поглощения при 3874 Å, которая соответствует переходам из основной электронной конфигурации в возбужденную (фиг. 15.3). Обе конфигурации расщеплены на вращательные уровни, различающиеся вращательными угловыми моментами, и поэтому линия расщепляется на некоторое число компонент [134], наиболее важными из которых являются $R\,(0)\,[J = 0 \rightarrow J = 1;\ \lambda = 3874{,}608$ Å],

Таблица 15.1

Сводка измерений потока фонового излучения в микроволновой и далекой инфракрасной областях

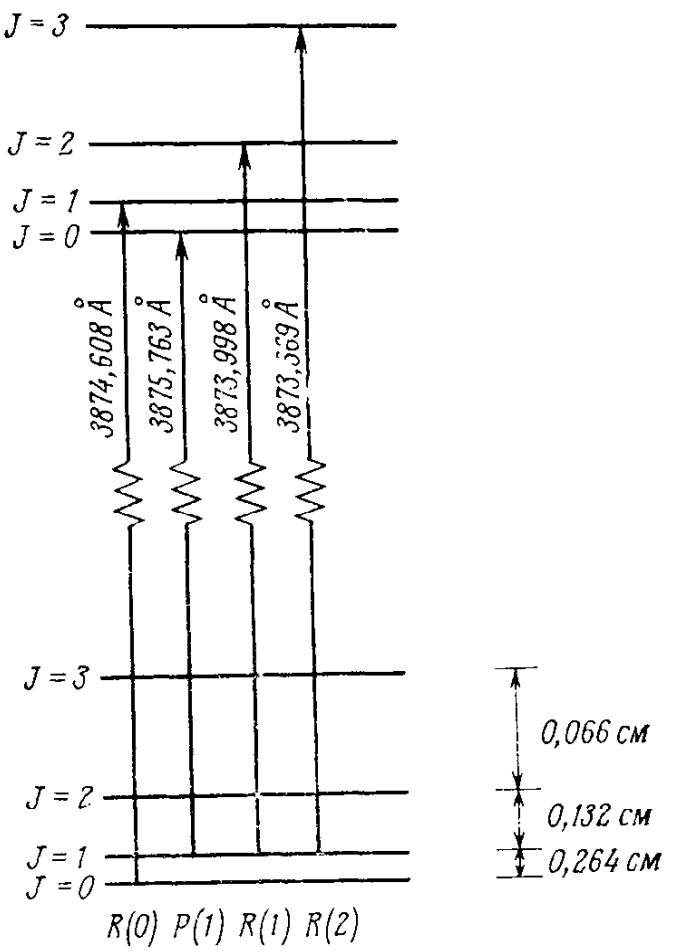
Указанные здесь температуры равны температуре излучения черного тела, которое имело бы наблюдаемый поток на соответствующей длине волны

λ, см	Метод измерения	$T_\nu(\lambda)$, К	Литература
73,5	Наземный радиометр	$3,7\pm1,2$	[111]
49,2	» »	$3,7\pm1,2$	[111]
21,0	» »	$3,2\pm1,0$	[112]
20,7	» »	$2,8\pm0,6$	[113]
7,35	» »	$3,5\pm1,0$	[109]
3,2	» »	$3,0\pm0,5$	[114]
3,2	» »	$2,69\ {}^{+0,16}_{-0,21}$	[115]
1,58	» »	$2,78\ {}^{+0,12}_{-0,17}$	[115]
1,50	» »	$2,0\pm0,8$	[116]
0,924	» »	$3,16\pm0,26$	[117]
0,856	» »	$2,56\ {}^{+0,17}_{-0,22}$	[118]
0,82	» »	$2,9\pm0,7$	[119]
0,358	» »	$2,4\pm0,7$	[120]
0,33	» »	$2,46\ {}^{+0,40}_{-0,44}$	[121]
0,33	» »	$2,61\pm0,25$	[122]
0,263	CN ($J=1/J=0$)	$\approx 2,3$	[123]
0,263	CN ($J=1/J=0$)	$3,22\pm0,15$ ζOph** $3,0\pm0,6$ ζ Per	[124]
0,263	CN ($J=1/J=0$)	$3,75\pm0,50$	[125]
0,263	CN ($J=1/J=0$)	$\leqslant 2,82$	[126]
0,132	CN ($J=2/J=1$)	$<7,0$	[125]
0,132	CN ($J=2/J=1$)	$<4,74$	[126]
0,0559	CH	$<6,6$	[125]
0,0559	CH	$<5,43$	[126]
0,0359	CH^+	$<8,11$	[126]
0,04—0,13	ИК-телескоп на ракете	$8,3\ {}^{+2,2}_{-1,3}$	[127 128]*
$>0,05$	ИК-радиометр на шаре-зонде	$\approx 3,6,\ 5,5,\ 7,0$	[131]
0,6—0,008	ИК-радиометр на ракете	$3,1\ {}^{+0,5}_{-2,0}$	[132]
0,18—1,0	ИК-радиометр на шаре-зонде	$2,7\ {}^{+0,4}_{-0,2}$	[133]
0,13—1,0	То же	$2,8\pm0,2$	[133]
0,09—1,0	»	$\leqslant 2,7$	[133]
0,054—1,0	»	$\leqslant 3,4$	[133]

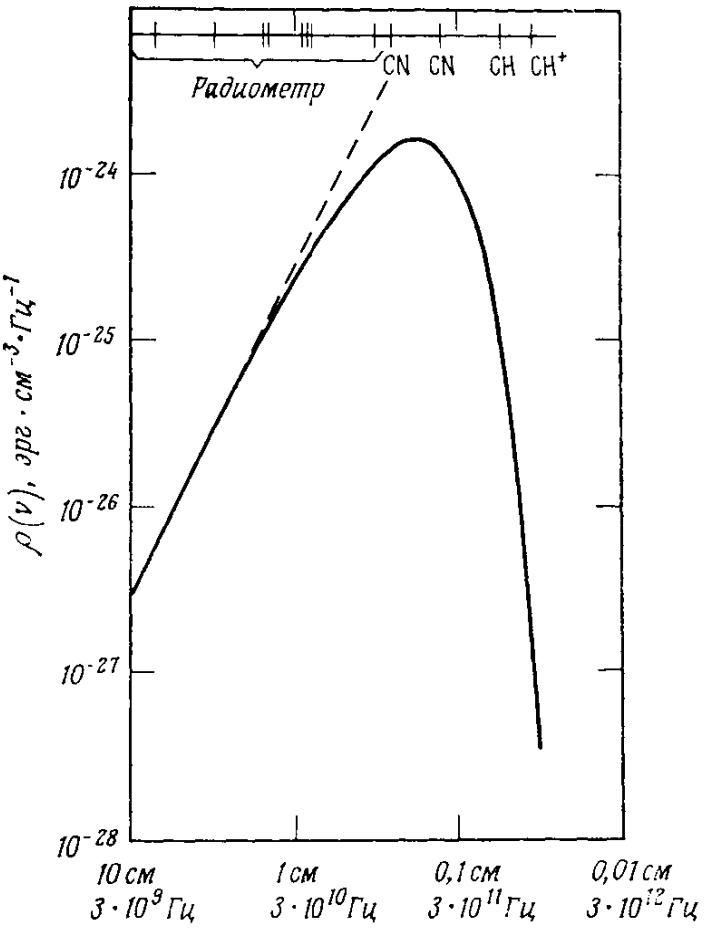
* Перекалибровку этих данных см. в работах [129, 130].
** Ophiuchus – Змееносец, Perseus – Персей.

R (1) [$J = 1 \to J = 2$; $\lambda =$ $=3873{,}998$ Å], P (1) [$J =$ $= 1 \to J = 2$; $\lambda = 3875{,}763$ Å] и R (2) [$J = 2 \to J = 3$; $\lambda = 3873{,}369$ Å].

(Эти переходы подчиняются дипольному правилу отбора $\Delta J = \pm 1$.) В 1941 г. Мак-Келлар [123] обнаружил, что радикалы циана в межзвездном облаке между нами и звездой ζ Змееносца поглощают свет этой звезды не только за счет R (0)-перехода из основного состояния $J = 0$, но также и за счет R (1)-перехода с первого возбужденного вращательного уровня с энергией возбуждения, соответствующей длине волны 2,64 мм. По относительной интенсивности этих двух линий можно было установить, что населенность уровня $J = 1$ соответствует температуре 2,3 К. Мак-Келлар не мог быть уверен, что здесь не действовал какой-то особый механизм возбуждения, и поэтому единственный вывод, который он мог сделать, состоял в том, что фоновое излучение при $\lambda = 2{,}64$ мм имеет эквивалентную температуру черного тела меньше 2.3 К. После открытия Пензиасом и Вилсоном [109] излучения с температурой 3,5 К на 7,35 см Филд [124, 135], Вульф [136] и Шкловский [137] независимо пришли к выводу, что давние наблюдения Мак-Келлара могли бы служить в действительности измерением температуры фонового излучения, а не только определением ее верхнего предела. Это подтвердилось при теоретическом анализе [124, 125], исключившем все другие механизмы вращательного возбуждения. Измерения были повторены, причем дополнительно были получены данные для линии поглощения P (1) [126] и по некоторым другим звездам. Какой-либо точной температуры излучения эти измерения не дали, но стало более или менее ясно, что $2.7\ \text{К} \leqslant T_{\gamma 0} \leqslant 3{,}7$ К на длине волны



Фиг. 15.3. Переходы в спектре поглощения циана, использованные для установления верхней границы температуры космического микроволнового фона.



Фиг. 15.4. Плотность энергии в единичном интервале частоты излучения черного тела при 2,7 К.

Сплошная кривая дает спектр Планка (15.5.4); пунктирная — спектр Рэлея — Джинса (15.5.7) при температуре антенны 2,7 К. Короткими вертикальными линиями вверху отмечены частоты, на которых радиометром или по наблюдениям межзвездного поглощения измерена температура космического микроволнового фона или установлен ее верхний предел.

2,64 мм. Были проведены также безуспешные поиски [126] линии поглощения R (2) в CN и различных линий поглощения из возбужденных вращательных состояний у CH и CH^+, что позволило установить верхние границы для $T_{\nu 0}$ на длинах волн 1,32, 0,559 и 0,359 мм.

Знакомство с табл. 15.1 показывает, что, за исключением измерений на ракетах и шарах-зондах, все наблюдения согласуются со спектральным распределением для черного тела при 2,7 К. Но прежде чем сделать окончательный вывод о том, что имеет место распределение черного тела, мы должны задаться вопросом, насколько существенным является указанное согласие, и позаботиться об объяснении измерений на больших высотах. Все данные при длинах волн более 1 см лежат, к несчастью, в той части распределения Планка для 2,7 К, которая хорошо аппроксимируется формулой Рэлея — Джинса

$$\rho_{\nu 0}(\nu) \approx 8\pi k T_{\nu 0} \nu^2 d\nu, \qquad (15.5.19)$$

которую можно получить, устремив ν к нулю в формуле (15.5.4). Например, если $\lambda = 1{,}5$ см, поток излучения черного тела при 2,7 К только на 15% меньше того, что задается формулой Рэлея — Джинса (15.5.19), и даже при $\lambda = 0{,}856$ см поток по Планку только на 35% ниже потока по Рэлею — Джинсу (фиг. 15.4). Это серьезный недостаток, поскольку можно придумать несколько моделей, которые будут выдавать кривую Рэлея — Джинса в той области длин волн, где с ней совпадает кривая Планка. Допустим для примера, что наблюдаемый фон излучен

в момент t_R, когда вероятность поглощения фотона $1 - P$ резко падает не от 1 до 0, а от некоторого значения $\alpha < 1$ до 0. Тогда вместо закона черного тела (15.5.3) будет иметь место *закон серого тела*

$$\rho_{\gamma 0}(\nu)\, d\nu \approx \frac{8\pi\alpha h\nu^3\, d\nu}{[\exp(h\nu/kT_\alpha) - 1]} \qquad (15.5.20)$$

с $0 < \alpha < 1$ и $T_\alpha = T(t_R)\, R(t_R)/R(t_0)$. В этом случае для учета данных при $\lambda > 1$ см будет необходимо принять

$$T_\alpha \approx \frac{27\text{K}}{\alpha},$$

и поток будет определяться законом Рэлея — Джинса при длинах волн, больших $\lambda \approx \alpha$ см. Полная плотность лучистой энергии должна быть меньше 10^{-7} эрг/см^3 (§ 2 гл. 15), поэтому α в принципе может быть около 0,08. Чтобы исключить теорию такого сорта, нужно иметь данные для $\lambda < 1$ см и желательно для $\lambda < 0{,}2$ см, где находится максимум распределения Планка при 2,7 К. К сожалению, именно на этих длинах волн атмосфера начинает влиять на радиометрические измерения. Поэтому основанием для того, чтобы считать, что выполняется распределение для черного, а не серого тела, являются результаты радиометрических измерений [120—122] на высокогорье, которые при $\lambda \approx 3$ мм дают втрое меньший поток, чем следует из формулы Рэлея — Джинса, и спектры поглощения межзвездных молекул, которые дают верхние границы [126] для потока при $\lambda = 2{,}63$, 1,32, 0,559 и 0,359 мм соответственно в 2,9, 2,2, 12 и 9,3 раза меньшие, чем получаются по Рэлею — Джинсу. Эти данные ясно свидетельствуют о том, что распределение не все время имеет рэлей-джинсовский вид, а постепенно загибается в окрестности $\lambda = 0{,}2$ см, как того и следует ожидать для излучения черного тела.

Однако этой простой картине противоречат некоторые из данных, полученные в далекой инфракрасной области с помощью ракет и шаров-зондов. Эти измерения являются существенно болометрическими: наблюдается полная мощность в единичном телесном угле, принятая единичной площадью детекторов, имеющих разнообразные и сложные функции спектральной чувствительности. Первоначальные измерения на ракетах в Корнеле [127, 128] и на шарах-зондах в Массачусетсском технологическом институте (МТИ) [131] зарегистрировали поток, во много раз больший, чем ожидалось для фонового излучения с 2,7 К. В совокупности с измерениями межзвездного поглощения эти данные не согласовывались ни с одним гладким спектральным распределением, будь то распределение Планка или Рэлея — Джинса. С тех пор корнельские измерения были перекалибро-

ваны [129], повторены [130] и теперь дают значительно меньший поток, но он все же еще на два порядка больше, чем ожидается по распределению Планка при 2,7 К. Однако результаты, согласующиеся с этим ожиданием, были получены при других ракетных измерениях [132] и в новых измерениях на шарах-зондах группы МТИ [133]. Эти противоречия возникают, возможно, от наложения интенсивных линий на 2,7-градусный фон или вызваны неожиданными источниками излучения в атмосфере на больших высотах. Эти неясности останутся, вероятно, до проведения измерений в далекой инфракрасной области с помощью криогенной аппаратуры на спутниках.

При проверке согласия наблюдаемого потока фонового излучения на разных частотах с формулой Планка полезно иметь в виду отклонения от этой формулы, которых можно ожидать теоретически, даже если наблюдаемое микроволновое излучение представляет собой космический фон, оставшийся от ранней Вселенной. При температуре черного тела $T_{\gamma 0} = 2{,}7$ К и современной плотности $n_0 m_{\text{н}} = 1{,}8 \cdot 10^{-29}$ г/см^3 удельная энтропия фотонов (15.5.15) равна $\sigma = 1{,}35 \cdot 10^8$, а если $n_0 m_{\text{н}} = 4{,}5 \cdot 10^{-31}$ г/см^3, то $\sigma = 5{,}4 \cdot 10^9$. Как мы уже видели, при таких больших значениях σ следует ожидать, что температура вещества T определяется температурой излучения $T_\gamma \sim R^{-1}$, пока есть сколько-нибудь значительный тепловой контакт вещества и излучения. Это ожидание подтверждается проведенными Пиблзом [138] [1]) детальными вычислениями рекомбинации во Вселенной, наполненной понизованным водородом. Для плотности, равной в настоящий момент $n_0 m_{\text{н}} = 1{,}8 \cdot 10^{-29}$ г/см^3, относительная ионизация резко падает от 99,8% при $T_\gamma = 5000$ К до 0,98% при $T_\gamma = 3000$ К и затем до 0,0053% при $T_\gamma = 1500$ К. Однако, несмотря на то что средняя длина пробега фотонов при столь малых уровнях ионизации была очень большой, все же температура вещества была равна $T = 1920$ К при $T_\gamma = 2000$ К и $T = 1280$ К при $T_\gamma = 1500$ К. При меньших плотностях разница между T и T_γ была даже меньше. Вследствие этого отклонения от распределения Планка должны быть очень небольшими. Согласно Пиблзу, наибольший эффект связан с избытком фотонов, оставшихся от лаймановских α-переходов $2p \to 1s$ и двухфотонных переходов $2s \to 1s$, через которые рекомбинированные атомы водорода достигают своего основного состояния. Из-за красного смещения длины волн этих фотонов сейчас примерно в 1000 раз больше, чем λ (α Лаймана) = = 1215 Å и λ (2γ) $\approx$ 2500 Å, и, следовательно, они вызывают отклонения от распределения Планка на длинах волн короче 0,015 мм. К сожалению, при таких коротких длинах волн интенсивность фона космического излучения намного меньше излу-

[1]) См. также [139, 140].

чения межзвездной пыли [141] и газа [142] в Галактике, и маловероятно, что мы сможем наблюдать эти отклонения от спектрального распределения излучения черного тела.

Есть еще один важный потенциальный источник отклонений от планковского спектра. Вычисления Пиблза [138] показывают, что к тому времени, когда температура излучения упала до 200 К, остаточная ионизация водорода была крайне мала — порядка 10^{-4} — 10^{-5}. С другой стороны, из обсуждавшегося в предыдущем параграфе эксперимента по поглощению линии α серии Лаймана следует, что позднее того времени, когда температура T_γ была около 8 К ($z \approx 2$), не могло быть заметной плотности *нейтрального* водорода. Если же в действительности все-таки имеется значительное количество межгалактического газа из водорода, как следует из измерений q_0 (§ 2 гл. 15), то этот водород должен быть каким-то образом ионизован снова за время, за которое температура T_γ падала от 4000 К до 8 К. Если эта реионизация произошла очень рано, то должен был заново установиться тепловой контакт между излучением и веществом и планковский спектр должен был исказиться за счет увеличения индивидуальной энергии фотонов. Согласно Сюняеву [143—145], совпадение наблюдаемого спектра фонового излучения с формулой Планка уже говорит о том, что реионизация не могла произойти раньше, чем T_γ упала до $\sim$800 К.

Многое может прояснить угловое распределение микроволнового фона. Если это излучение и в самом деле осталось от раннего периода, когда вещество и излучение были в тепловом равновесии, то следует ожидать, что поток излучения будет изотропным. Однако возможно существование анизотропии малых угловых масштабов, порожденной неоднородностями в первичной плазме, которые в свою очередь могут быть связаны с образованием галактик [141] (§ 8 этой главы). Кроме того, могла бы быть анизотропия больших угловых масштабов, связанная с отклонениями Вселенной в целом или нашего локального гравитационного поля от полной изотропии [146—148]. Наконец, определенно имеется небольшая анизотропия масштаба 360°, вызванная движением Солнечной системы относительно фона излучения. Если это излучение возникло не в ранний период теплового равновесия, то его угловое распределение может указать на его источник; например, если излучение идет от большого числа дискретных источников, то должна обнаруживаться большая анизотропия малых угловых масштабов, если же оно возникает в пределах Галактики, то следует ожидать крупномасштабной анизотропии, коррелированной с галактической широтой.

При поисках *мелкомасштабной по углу анизотропии* большая антенна, фиксированная под определенным углом, «просматривает» небо при вращении Земли. Если не приняты особые меры

по поддержанию устойчивой калибровки, то измеренная температура антенны будет иметь дрейф, который для нас пока не важен. Кроме того, будет небольшая флуктуация относительно этого общего дрейфа, характеризуемая корнем из среднеквадратичной флуктуации $(\Delta T_a)_{\text{набл}}$. Если на самом деле существует флуктуация самого излучения ΔT_a с угловым масштабом θ, сравнимым с шириной луча антенны B, то $(\Delta T_a)^2_{\text{набл}}$ есть сумма $(\Delta T_a)^2$ и вклада от шума приемника, так что

$$\Delta T_a \leqslant (\Delta T_a)_{\text{набл}} \text{ при } \theta \approx B. \qquad (15.5.21)$$

Наоборот, если масштаб θ интересующей нас флуктуации много меньше B, то можно рассматривать луч как состоящий из N пучков углового диаметра θ, причем

$$N \approx \left(\frac{B}{\theta}\right)^2.$$

Флуктуация ΔP мощности P в каждом пучке дается формулой (15.5.7)

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{\Delta T_a}{T_a}.$$

Полная принятая мощность равна NP, но флуктуация имеет случайный знак, и поэтому корень из среднеквадратичной флуктуации полной мощности равен $N^{1/2}\Delta P$. С учетом шума приемника наблюдаемая относительная флуктуация принятой мощности будет больше, чем $N^{1/2}\Delta P/NP$:

$$\frac{(\Delta T_a)_{\text{набл}}}{T_a} \geqslant N^{-1/2}\frac{\Delta P}{P} \approx N^{-1/2}\frac{\Delta T_a}{T_a},$$

и отсюда

$$\Delta T_a \leqslant N^{1/2}(\Delta T_a)_{\text{набл}} \approx \left(\frac{B}{\theta}\right)(\Delta T_a)_{\text{набл}} \text{ (для } \theta \ll B). \qquad (15.5.22)$$

Более детальный анализ [149] показал, что для флуктуаций произвольного углового масштаба

$$\Delta T_a \leqslant \left[1 + \frac{B^2}{\theta^2}\right]^{1/2}(\Delta T_a)_{\text{набл}}$$

в согласии с (15.5.21) и (15.5.22). При очень больших флуктуациях излучения с $\Delta T_a \approx T_a$ неравенство (15.5.22) накладывает ограничение сверху на угловой масштаб

$$\theta_{\text{макс}} \approx \frac{B(\Delta T_a)_{\text{набл}}}{T_a}. \qquad (15.5.23)$$

Значения $(\Delta T_a)_{\text{набл}}$ на различных длинах волн и при различной ширине луча приведены в табл. 15.2. Анизотропия, очевидно, меньше нескольких процентов при любом угловом масштабе, большем нескольких угловых секунд.

Таблица 15.2

Сводка результатов измерений флуктуаций микроволнового фона в малых угловых масштабах

λ, см	T_a, К	B	$\Delta T_{a\,набл}$, К	$\theta_{макс}$	Литература
7,35	2,56	40′	0,006	5″	[109]
3,95	2,50	1,4′×20′	0,0007	0,1″	[150]
2,80	2,45	1°	0,051	75″	[151]
		6°	0,036	—	
2,80	2,45	10′	0,0061	1,5″	[149]
		2°	0,0017	—	
0,35	1,14	≈ 75″	0,024	1,6″	[152]
0,35	1,14	80″—100″	0,008	0,7″	[153]
0,34	1,11	12,5′	0,2	—	[154]

Обозначения: λ — длина волны, T_a — температура антенны для излучения черного тела при 2,7 К, B — ширина луча, $\Delta T_{a\,набл}$ — наблюдаемая среднеквадратичная флуктуация температуры антенны, $\theta_{макс}$ — наибольший угловой масштаб, в котором данное наблюдение не исключает существования значительной анизотропии [см. (15.5.23)]. «Ширины луча» 1, 2 и 6° получены интегрированием данных измерений при ширине луча 10′. Значение ΔT_a при 0,34 см получено в действительности из измерения наклона кривой $T_a(\theta)$ в интервале 12,5″.

При поисках *крупномасштабной по углу анизотропии* нет необходимости использовать большую антенну, но следует заботиться о поддержании устойчивой калибровки приемника при прохождении луча антенны по небу за счет вращения Земли. В работе Патриджа и Уилкинсона [155, 156] это достигается тем, что рупор антенны направляется на небесный экватор, а в течение 15 мин каждого получаса вводится вертикальный рефлектор, отклоняющий луч в направлении северного полюса неба. Как с рефлектором, так и без него угол между лучом антенны и вертикалью один и тот же (48°), поэтому влияние нагревания атмосферы и аппаратуры не меняется. Однако, когда рефлектор отсутствует, луч с вращением Земли сканирует небесный экватор, а при введенном рефлекторе он направлен на более или менее фиксированную точку небесной сферы. Следовательно, любая вариация во времени *разности* между потоком излучения, принятым с рефлектором и без него, была бы мерой собственно изменения потока с прямым восхождением (т. е. с азимутом) вблизи небесного экватора. Эта вариация должна иметь 24-часовой сидерический период и поэтому может быть разложена на фурье-компоненты с периодами $24/n$ ч, где n — произвольное целое число.

Измерения анизотропии подытожены в табл. 15.3. Очевидно, нет никакой статистически существенной анизотропии, а максимальное изменение $T_{\gamma 0}$ по небосводу, вероятно, меньше 1%.

Таблица 15.3

Сводка результатов измерений флуктуаций микроволнового фона в больших угловых масштабах

Во всех случаях принято, что $T_{\gamma 0} = 2{,}7$ К.

λ, см	Вид флуктуации	$\Delta T_\gamma / T_{\gamma 0}$, %	Литература
7,35	Корень из среднеквадратичной	$\leqslant 10$	[109]
7,35		$\leqslant 3{,}7$	[157]
3,75	24 ч	$0{,}06 \pm 0{,}03$	[158]
3,2	12 ч	$0{,}18 \pm 0{,}08$	[155]
	24 ч	$0{,}03 \pm 0{,}08$	
3,2	12 ч	$0{,}06 \pm 0{,}06$	[156]
	24 ч	$0{,}04 \pm 0{,}06$	
0,8	12 ч	$0{,}20 \pm 0{,}24$	[159]
	24 ч	$0{,}28 \pm 0{,}43$	

Особенно интересны верхние пределы 24-часовой компоненты анизотропии $\Delta T_\gamma / T_{\gamma 0}$, поскольку они устанавливают строгие ограничения сверху на скорость Солнечной системы относительно остальной Вселенной. Допустим, что имеется фундаментальная система отсчета, в которой фоновое излучение абсолютно изотропно и имеет планковский спектр, и предположим, что Земля движется со скоростью $\mathbf{v}_\oplus$ относительно этой системы отсчета. В этой фундаментальной системе фотоны, имеющиеся в телесном угле $\sin\theta d\theta d\varphi$ и в частотном интервале $d\nu$, вносят в тензор энергии-импульса вклад:

$$dT^{\mu\nu} = \left(\frac{p^\mu p^\nu}{h^2\nu^2}\right)\left(\frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{4\pi}\right)\rho_{\gamma 0}(\nu)\, d\nu = \\ = 2p^\mu p^\nu h^{-1}\left[e^{h\nu/kT_{\gamma 0}} - 1\right]^{-1}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\nu\, d\nu,$$

где p^μ — 4-вектор импульса фотона:

$$p^\mu = h\nu\,(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta,\ 1).$$

[Из (2.8.4) следует, что $dT^{\mu\nu}$ пропорционально $p^\mu p^\nu$; коэффициент при $p^\mu p^\nu$ определяется так, чтобы интеграл от dT^{00} по θ и φ был равен $\rho_{\gamma 0} d\nu$.] В системе отсчета, связанной с Землей, тензор энергии-импульса этих фотонов определяется через закон преобразования

$$dT'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma\, dT^{\rho\sigma},$$

где Λ — преобразование Лоренца, задаваемое формулами (2.1.17) — (2.1.21), в которых нужно положить $\mathbf{v} = -\mathbf{v}_\oplus$. Чтобы выразить $dT'^{\mu\nu}$ через величины в системе отсчета Земли, заметим, что

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$$

или, выбирая ось z в направлении скорости Земли,

$$\nu' = \frac{\nu\,[1 - v_\oplus \cos\theta]}{[1 - v_\oplus{}^2]^{1/2}},$$

$$\cos\theta' = \frac{[-v_\oplus + \cos\theta]}{[1 - v_\oplus \cos\theta]}, \qquad \varphi' = \varphi.$$

Здесь θ — угол между скоростями Земли и фотона. Тогда правило преобразования телесного угла имеет вид

$$\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

и поэтому дифференциальный тензор энергии-импульса в системе отсчета Земли равен

$$dT'^{\mu\nu} = 2p'^\mu p'^\nu h^{-1}\,[e^{h\nu/kT_{\gamma 0}} - 1]^{-1} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \nu\, d\nu =$$

$$= 2p'^\mu p'^\nu h^{-1}\,[e^{h\nu'/kT'_{\gamma 0}} - 1]^{-1} \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' \nu'\, d\nu',$$

где

$$T'_{\gamma 0} \equiv \left(\frac{\nu'}{\nu}\right) T_{\gamma 0} = [1 - v_\oplus{}^2]^{-1/2}\,[1 - v_\oplus \cos\theta]\, T_{\gamma 0}. \quad (15.5.24)$$

Мы видим, что $dT'_{\mu\nu}$ имеет ту же форму, что и $dT_{\mu\nu}$, и, следовательно, *фоновое излучение в системе отсчета, связанной с Землей, имеет спектр Планка, но с зависящей от угла температурой* $T'_{\gamma 0}$. При $v_\oplus \ll 1$ отклонение измеренной температуры от «истинной» температуры черного тела $T_{\gamma 0}$ равно

$$\Delta T_{\gamma 0} \approx -v_\oplus \cos\theta T_{\gamma 0}. \quad (15.5.25)$$

В экспериментах Партриджа, Уилкинсона и Конклина луч антенны в течение суток описывает по небесной сфере круг с фиксированным склонением δ, и ввиду этого величина $\Delta T_{\gamma 0}$ должна обладать 24-часовым периодом с максимальным значением, которое дается условием

$$\frac{(\Delta T_{\gamma 0})_{\text{макс}}}{T_{\gamma 0}} \approx \frac{v_\oplus(\delta)}{c}, \quad (15.5.26)$$

где $v_\oplus(\delta)$ — составляющая скорости Земли вдоль конуса с углом склонения δ. Этот максимум достигается, когда антенна смотрит по азимуту направления движения Земли. Результаты Партриджа и Уилкинсона [155, 156] в совокупности дают в качестве наиболее вероятной скорости $v_\oplus(0^\circ) \approx 120$ км/с направленной к точке

с прямым восхождением 0 ч; при этом имеется *векторная* погрешность, равная по величине 180 км/с. Конклин [158] получает наиболее вероятную скорость $v_\oplus$ (32°N) ≈ 160 км/с, направленную в сторону прямого восхождения 13 ч (точно в противоположную сторону по сравнению с определением Патриджа и Уилкинсона!), и векторную ошибку, равную по величине 85 км/с. Из этих двух результатов следует, что

$$|\mathrm{v}_\oplus| \lesssim 300 \text{ км/с}. \tag{15.5.27}$$

Этот верхний предел почти того же порядка, что и скорость Солнечной системы в Местной Группе галактик (возникающая в основном от вращения Галактики), которая равна по оценкам [160] 315 км/с и направлена к прямому восхождению 22 ч. Ясно, что ни Земля, ни Местная Группа в целом не обладают большой скоростью относительно фона излучения. Было бы очень интересно узнать, как быстро мы в действительности движемся и в каком направлении.

Кроме влияния движения Земли и локального гравитационного поля, в микроволновом фоне может обнаружиться анизотропия, обязанная своим происхождением космической неоднородности в момент t_R последнего взаимодействия излучения с веществом. Если не было никакого рассеяния фонового излучения после рекомбинации водорода при 4000 К, то время t_R соответствует красному смещению z_R, определяемому из равенства

$$1 + z_R \equiv \frac{R_0}{R(t_R)} = \frac{T_\gamma(t_R)}{T_{\gamma 0}} \approx \frac{4000\text{К}}{2{,}7\text{К}} = 1500.$$

С другой стороны, если есть межгалактический газ свободных электронов с плотностью частиц $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ см$^{-3}$, то, как отмечено в предыдущем параграфе, время последнего рассеяния будет соответствовать красному смещению $z_R \approx 6$. Было бы весьма интересно использовать наблюдаемую изотропию (или анизотропию) нынешнего микроволнового фона для определения масштабов расстояний, на которых Вселенная была однородной (или неоднородной) в момент времени t_R.

Для этой цели рассмотрим два фотона, вылетающие из сопутствующих источников A и B в момент t_R и попадающие на Землю в момент t_0 по лучам, угол между которыми равен θ. Принимая Землю за начало координат, получаем по формуле (14.3.1) радиальные координаты источников

$$r_A = r_B = r_1, \tag{15.5.28}$$

где r_1 определяется уравнением

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_R}^{t_0} \frac{dt}{R(t)}. \tag{15.5.29}$$

Поскольку фотоны летят к Земле по траекториям с постоянным направлением $\mathbf{x}/r$, эти источники отстоят в координатной системе Робертсона — Уокера как раз на наблюдаемый углом между световыми лучами на Земле, т. е.

$$\frac{\mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_B}{r_1^2} = \cos\theta, \tag{15.5.30}$$

где скалярное произведение определяется через координаты Робертсона — Уокера x^i, как если бы эти координаты были декартовы:

$$\mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_B \equiv x_A{}^1 x_B{}^1 + x_A{}^2 x_B{}^2 + x_A{}^3 x_B{}^3 = \\ = r_A r_B [\sin\theta_A \sin\theta_B \cos(\varphi_A - \varphi_B) + \cos\theta_A \cos\theta_B]. \tag{15.5.31}$$

Наша задача состоит в том, чтобы определить собственное расстояние вдоль геодезической от A до B в момент t_R как функцию θ при различных значениях z_R от 6 до 1500.

Согласно (14.4.3), геодезическая от A до B может быть выбрана (если положить $\mathbf{x}_1$ равным вектору $a\mathbf{e}$, ортогональному $\mathbf{n}$) в виде

$$\mathbf{x}(\rho) = \mathbf{n}\rho + a\mathbf{e}(1 - k\rho^2)^{1/2}, \tag{15.5.32}$$

где a — постоянная, ρ — параметр вдоль геодезической, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}$ — ортогональные единичные векторы

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e} = 0, \qquad \mathbf{n}^2 = \mathbf{e}^2 = 1, \tag{15.5.33}$$

причем скалярное произведение определено по формуле (15.5.31). Начальное и конечное значения ρ равны $-\rho_1$ и $+\rho_1$, а ρ_1 определяется условием (15.5.28), т. е.

$$r_1^2 = |\mathbf{x}(\pm\rho_1)|^2 = \rho_1^2 + a^2(1 - k\rho_1^2).$$

Кроме того, из условия (15.5.30) получаем

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}(+\rho_1)\cdot\mathbf{x}(-\rho_1)}{r_1^2} = \frac{[-\rho_1^2 + a^2(1 - k\rho_1^2)]}{r_1^2}.$$

Оба параметра, ρ_1 и a, можно теперь выразить через r_1 и θ:

$$\rho_1 = r_1 \sin\frac{\theta}{2},$$

$$a = r_1 \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - k r_1^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right]^{-1/2}.$$

Собственное расстояние от A до B можно вычислить, интегрируя элемент длины Робертсона — Уокера от $-\rho_1$ до $+\rho_1$:

$$d(\theta) = R(t_R) \int_{-\rho_1}^{\rho_1} \left(\left(\frac{d\mathbf{x}(\rho)}{d\rho} \right)^2 + \frac{k(\mathbf{x}(\rho)\cdot d\mathbf{x}(\rho)/d\rho)^2}{1 - k\mathbf{x}^2(\rho)} \right)^{1/2} d\rho,$$

откуда

$$d(\theta) = \frac{2R_0}{1+z_R} \int_0^{r_1 \sin(\theta/2)} \frac{d\rho}{\sqrt{1-k\rho^2}}. \qquad (15.5.34)$$

Если момент t_R последнего акта рассеяния или излучения был позднее начала эры преобладания вещества, то для выражения R_0 и r_1 через H_0, q_0 и z_R можно использовать (15.2.5) и (15.3.23); тогда получим

$$d(\theta) = \frac{2}{H_0(1+z_R)\sqrt{2q_0-1}} \times$$
$$\times \arcsin\left\{\frac{\sqrt{2q_0-1}\,[z_R q_0 + (q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0 z_R+1})]}{q_0^2(1+z_R)} \sin\frac{\theta}{2}\right\}$$
$$\text{при } q_0 > \frac{1}{2}, \qquad k=+1, \qquad (15.5.35)$$

$$d(\theta) = \frac{4}{H_0(1+z_R)}\{1-(1+z_R)^{-1/2}\}\sin\frac{\theta}{2} \text{ при } q_0 = \frac{1}{2}, \qquad k=0, \qquad (15.5.36)$$

$$d(\theta) = \frac{2}{H_0(1+z_R)\sqrt{1-2q_0}} \times$$
$$\times \operatorname{Arsh}\left(\frac{\sqrt{1-2q_0}\,[z_R q_0 + (q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0 z_R+1})]}{q_0^2(1+z_R)} \sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\text{при } q_0 < \frac{1}{2}, \qquad k=-1. \qquad (15.5.37)$$

В частности, при $\theta \to 0$ из равенств (15.5.35) — (15.5.37) следует, что

$$d(\theta) \to \frac{[z_R q_0 + (q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0 z_R+1})]\,\theta}{q_0^2(1+z_R)^2 H_0} \text{ при } \theta \to 0.$$

Если однородность Вселенной достигнута за счет переноса энергии и импульса от одного места к другому со скоростями, меньшими скорости света, то следует ожидать [161], что Вселенная к моменту t_R была неоднородной на расстояниях, вдвое превышающих «горизонт частиц» (15.3.32), поскольку никакой «гомогенизирующий» сигнал, исходящий из какой-либо точки, не может достичь ко времени t_R двух сопутствующих частиц, разделенных собственным расстоянием, большим чем $2d_г(t_R)$. Если это верно, то в микроволновом фоне должны проявляться большие анизотропии при угловых масштабах, больших чем угол $\theta_г$, который вычисляется приравниванием расстояния $2d_г(t_R)$, определяемого формулами (15.3.33), и $d(\theta_г)$ из (15.5.35) — (15.5.37):

$$\sin\frac{\theta_г}{2} = \frac{q_0\sqrt{2q_0 z_R+1}}{z_R q_0 + (q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0 z_R+1})}. \qquad (15.5.38)$$

Если $z_R \approx 1500$, то можно использовать приближенное выражение

$$\theta_r \approx 2\left(\frac{2q_0}{z_R}\right)^{1/2} \approx 4{,}2^\circ \sqrt{q_0}. \qquad (15.5.39)$$

(Этот результат не слишком бы изменился, если бы эра преобладания вещества началась несколько позднее рекомбинации водорода.) Если $z_R \approx 6$ и $q_0 = {}^1/_2$ или 1, то $\theta_H \approx 75^\circ$. Однако нет никаких признаков заметной анизотропии микроволнового фона при углах такого масштаба, наоборот, фон оказывается в высшей степени изотропным при всех угловых масштабах больше 1°. В свете вышеизложенного анализа трудно понять, как такая изотропия могла возникнуть в ходе какого-либо физического процесса, имевшего место когда-либо после начальной сингулярности [1]).

Наблюдаемые распределения фона излучения по частоте и углу определенно указывают на то, что изотропное излучение черного тела осталось от раннего периода, когда вещество и излучение были в тепловом равновесии. Однако имеющиеся данные пока еще не исключают и других возможностей. Плотность энергии света звезд в пределах Галактики порядка $5 \cdot 10^{-13}$ эрг/см^3, т. е. того же порядка, что и плотность энергии излучения черного тела при 2,7 К. По этой причине Хойл, Нарликар и Викрамсингх [162—164] высказали мысль, что большая доля света звезд на оптических частотах нашей и других галактик может поглощаться пылинками в межзвездном пространстве, которые нагреваются до нескольких градусов и снова излучают энергию на микроволновых частотах в виде непрерывного спектра или отдельных линий. Нельзя исключить полностью, что вновь испущенное излучение будет изотропным и имитирует спектр Планка, но такое допущение выглядит искусственным. Другая широко обсуждавшаяся возможность состоит в том, что микроволновый фон может возникнуть от большого числа дискретных источников [165—167]. И в этом случае нельзя считать невозможным совпадение с планковским спектром в достаточно широкой полосе частот, но нет никаких особых причин ожидать этого. Кроме того, в этом случае наблюдаемая изотропия будет накладывать жесткие ограничения на любую теорию дискретных источников. Например, если микроволновый фон излучается источниками, расположенными на среднем расстоянии порядка H_0^{-1}, то следует ожидать большой анизо-

[1]) Изотропия фридмановской Вселенной могла возникнуть в тот начальный период расширения, когда были значительны квантовые процессы рождения частиц в сильном нестационарном «космологическом» гравитационном поле. По грубым полуколичественным оценкам [338], эти процессы способны быстро изотропизовать любой анизотропный «большой взрыв».—*Прим. перев.*

тропии в масштабе угла θ, удовлетворяющего условию, чтобы на объем $H_0^{-3}\theta^2$ приходился примерно один источник, т. е. при

$$H_0^{-3}\theta^2 d^{-3} \approx 1, \qquad (15.5.40)$$

где d — среднее расстояние между источниками. Ограничение $\theta \leqslant 1''$, вытекающее из табл. 15.2, приводит, таким образом, к верхнему пределу для d, а именно $d \leqslant 1$ Мпс, что примерно равно среднему расстоянию между галактиками. Детальный анализ [152, 168] данных в рамках конкретных моделей дает плотность источников даже большую, чем плотность числа галактик, что, по-видимому, исключает такие теории.

Наиболее интересные явления, связанные с космическим фоном излучения, имели место в ранние периоды, когда температура была много выше, чем сейчас. Эти явления будут предметом обсуждения следующих шести параграфов. Однако есть несколько эффектов, связанных с фоновым излучением, которые могут представить интерес даже в настоящее время.

А. Релятивистский электрон с энергией $\gamma_e m_e$ будет испытывать обратное комптоновское рассеяние на микроволновых фотонах с излучением фотонов отдачи со средней энергией [169]

$$\overline{E} = 3{,}6\gamma_e^2 kT_{\gamma 0} = 8{,}4\cdot 10^{-4}\gamma_e^2 \text{ эВ}\left(\frac{T_{\gamma 0}}{2{,}7\text{К}}\right). \qquad (15.5.41)$$

Хойл [170] высказал предположение о том, что обратное комптоновское рассеяние электронов космических лучей в Галактике ответственно за диффузный фон [33] космических рентгеновских лучей. Однако Гулд [171] указал, что интенсивность, получающаяся при таком механизме, в несколько сот раз меньше, чем наблюдаемый рентгеновский фон. Вскоре после этого Фелтон [172] показал, что обратное комптоновское рассеяние электронов космических лучей в межгалактическом пространстве могло бы создать рентгеновское излучение наблюдаемой интенсивности. Эта модель получила поддержку в замечании Бречера и Морисона [173, 174], которое сводится к тому, что наблюдаемый излом в спектре электронов космических лучей при $\gamma_e \approx 7\cdot 10^3$ приводит, согласно (15.5.41), к излому в спектре диффузного рентгеновского фона при 40 кэВ как раз там, где этот излом действительно наблюдается [33]. Однако совсем недавние вычисления, обсуждавшиеся в предыдущем параграфе, указывают на то, что этот излом обязан своим происхождением тепловому тормозному излучению в горячем межгалактическом водороде, а обратное комптоновское излучение становится важным лишь ниже 1 кэВ. Пробег электронов высокой энергии в 2,7-градусном фоне резко спадает при $\gamma_e \geqslant 10^4$. Поэтому если электроны космических лучей действительно приходят к нам сквозь межгалактическое

пространство, то наблюдаемый энергетический спектр электронов должен резко обрываться при энергиях свыше 10 ГэВ.

Б. Из наблюдений [175] следует, что весьма мощная радиогалактика Центавр А испускает рентгеновские лучи в области 1—10 кэВ с общей мощностью $L_x = (11 \pm 4) \cdot 10^{40}$ эрг/с Оценки (см. [34]) с использованием теории синхротронного излучения для учета наблюдаемого потока радиоизлучения показали, что Центавр А содержит $1{,}7 \cdot 10^{59}$ эрг в виде электронов космических лучей в среднем с $\gamma_e \approx 2{,}5 \cdot 10^3$. Обратное комптоновское рассеяние этих электронов на 2,7-градусном фоне порождает рентгеновские лучи, средняя энергия которых, согласно (15.5.41), равна 5 кэВ, а полная мощность $L_x \approx 5 \cdot 10^{40}$ эрг/с, что согласуется с наблюдаемым значением. Наиболее важным свойством этого результата является то, что предсказываемая величина мощности рентгеновского излучения исключительно чувствительна к значению потока фонового излучения на коротких длинах волн.

Например, если бы температура фона на этих длинах волн, полученная из первых наблюдений на ракетах [127, 128] и шарах-зондах [131], соответствовала действительности, то рентгеновское излучение Центавр А было бы более чем на порядок интенсивнее наблюдаемого. Однако изложенное здесь объяснение рентгеновского источника Центавр А пока еще вызывает сомнения.

В. При соударении под углом θ частицы с массой m и с импульсом p и фотона с энергией w полная энергия в системе центра масс равна

$$E_c^2 = (w + (p^2 + m^2)^{1/2})^2 - (p^2 + 2pw\cos\theta + w^2) = \\ = 2w\,[(p^2 + m^2)^{1/2} - p\cos\theta] + m^2. \qquad (15.5.42)$$

Чтобы сечение рассеяния нуклона на фотоне было первого, а не второго порядка по $\alpha = {}^1/_{137}$, необходимо, чтобы энергия E_c была больше порога $m_N + m_\pi$ для процесса $\gamma + N \to \pi + N$:

$$(p^2 + m^2)^{1/2} - p\cos\theta \geqslant \frac{m_\pi^2 + 2m_N m_\pi}{2w} \approx \frac{m_N m_\pi}{w}.$$

Таким образом, следует ожидать резкого обрезания [176—178] энергетического спектра протонов космических лучей при

$$E_{p,\,\text{макс}} \approx \frac{m_N m_\pi}{kT_{\gamma 0}} \approx 3 \cdot 10^{20}\ \text{эВ}.$$

(Последние данные по фотонуклонным сечениям см. в [179].) Эта величина как раз совпадает с верхним пределом энергии космических лучей, наблюдаемым в настоящее время. Аналогично для космических фотонов процесс рождения пары приводит

к резкому спаду в спектре [180, 181] в области γ-лучей с $\langle E_c \rangle \geqslant \geqslant 2m_e$, т. е. при энергии

$$E_{e,\ \text{макс}} \approx \frac{2m_e{}^2}{kT_{\gamma 0}} \approx 10^{15}\ \text{эВ}.$$

Эти ограничения справедливы только в предположении, что космические лучи протонов и фотонов высоких энергий возникают вне пределов Галактики.

Все же пока нельзя утверждать с полной уверенностью, что наблюдаемый микроволновый фон действительно представляет собой излучение черного тела, оставшееся от ранней эры в эволюции Вселенной. Ясно, однако, что такая точка зрения обоснована достаточно хорошо, чтобы оправдать серьезное изучение выводов относительно ранней Вселенной, к которым она приводит. Теперь мы перейдем к рассмотрению этих выводов.

§ 6. Температурная история ранней Вселенной

Плотность энергии микроволнового фона при 2,7 К равна

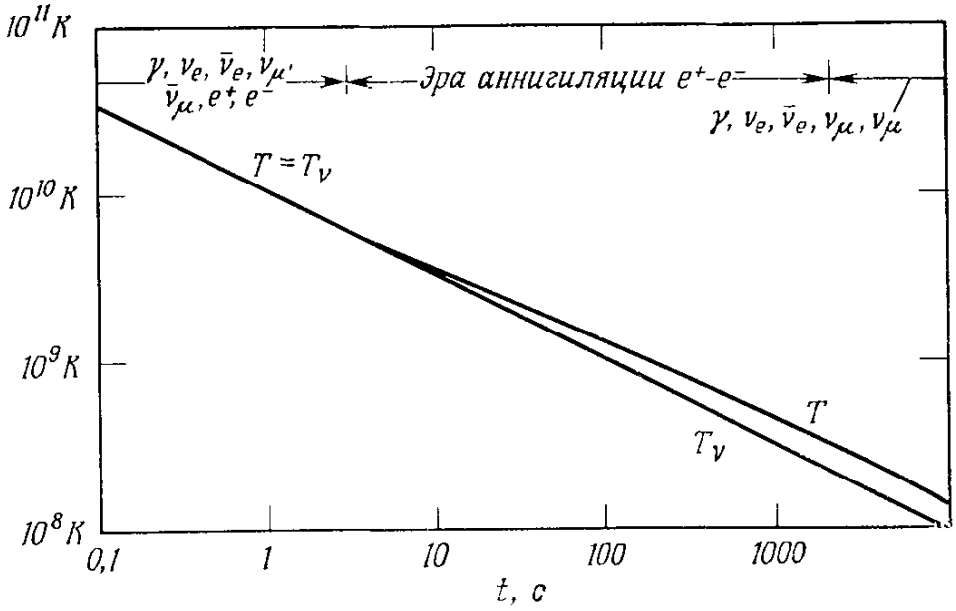
$$\rho_{\gamma 0} = aT_{\gamma 0}^4 = 3{,}97 \cdot 10^{-13}\ \text{эрг/см}^3 = 4{,}40 \cdot 10^{-34}\ \text{г/см}^3. \quad (15.6.1)$$

Как уже было отмечено в § 2 этой главы, эта величина меньше, чем современная плотность масс покоя нуклонов, так что мы живем в эру преобладания вещества, которая составляет бóльшую часть истории Вселенной. Эта эра подробно обсуждалась в § 3 гл. 15.

Теперь мы обратим наше внимание на более ранний период, когда излучение и релятивистские частицы играли большую роль, чем обычное вещество. Чтобы нить изложения не терялась за деталями вычислений, полезно сначала обрисовать принятую в настоящее время общую картину ранней истории Вселенной, а затем перейти к подробным вычислениям, подтверждающим эту картину. Обычно считается, что история Вселенной выглядит в общих чертах примерно так (фиг. 15.5):

А. На очень ранней стадии, когда температура T выше 10^{12} К, Вселенная содержит большое разнообразие частиц: фотонов, лептонов, мезонов, нуклонов и их античастиц, находившихся в тепловом равновесии. Сильные взаимодействия между мезонами и нуклонами делают эту эру весьма трудной для изучения; она кратко обсуждается в § 11 этой главы.

Б. Во время, когда $T \approx 10^{12}$ К, Вселенная содержит фотоны, мюоны и антимюоны, электроны, позитроны, нейтрино и антинейтрино. Кроме того, имеется небольшая нуклонная примесь из одинакового числа протонов и нейтронов. Все эти частицы находятся в тепловом равновесии.



Фиг. 15.5. Температурная история ранней Вселенной.

Здесь T — температура γ — e^+ — e^- плазмы и T_ν — температура ν_e, $\bar{\nu}_e$, ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$, находящихся в состоянии свободного расширения.

В. Когда температура падает ниже 10^{12} К, начинают аннигилировать μ^+ и μ^-. После исчезновения почти всех мюонов при $T \approx 1{,}3 \cdot 10^{11}$ К нейтрино и антинейтрино перестают взаимодействовать с другими частицами, а в тепловом равновесии с температурой $T \sim R^{-1}$ остаются $e^\pm$, γ и небольшое количество нуклонов. (Электронные нейтрино могли оставаться в равновесии с остальными частицами несколько дольше, но это не приводит к каким-либо особенностям.)

Г. При падении температуры ниже 10^{11} К ($t \approx 0{,}01$ с) в малой примеси нуклонов из-за разности масс протона и нейтрона начинается сдвиг в сторону увеличения числа протонов и уменьшения числа нейтронов.

Д. Когда температура падает ниже $5 \cdot 10^9$ К ($t \approx 4$ с), начинают аннигилировать электрон-позитронные пары; доминирующими составляющими Вселенной остаются лишь фотоны, нейтрино и антинейтрино, которые находятся, по существу, в состоянии свободного расширения, причем температура фотонов на 40,1 % больше температуры нейтрино. В то же время охлаждение нейтрино и исчезновение электронов и позитронов «замораживают» нейтрон-протонное отношение примерно на уровне 1 : 5.

Е. При температуре около 10^9 К ($t \approx 180$ с) нейтроны и протоны начинают быстро собираться в более тяжелые ядра, в результате чего образуется ионизованный газ, состоящий из водорода, He^4 (27 % по массе) со следами d, He^3 и других элементов.

Ж. Продолжается свободное расширение фотонов, нейтрино и антинейтрино, при этом $T_\gamma = 1{,}401 T_\nu \sim R^{-1}$. Температура ионизованного газа остается «привязанной» к температуре фотонов до рекомбинации водорода при $T \approx 4000$ К.

З. При некоторой температуре между 10^3 и 10^5 К плотность энергии фотонов, нейтрино и антинейтрино становится ниже плотности масс покоя водорода и гелия и Вселенная вступает в эру преобладания вещества.

Для детализации этой истории будет удобным посвятить настоящий параграф температурной эволюции определяющих составных частей ранней Вселенной — фотонов и лептонов, а обсуждение синтеза ядер (нуклеосинтеза) отложить до следующего параграфа.

Рассмотрим, во-первых, уравнение, задающее временной масштаб расширения ранней Вселенной. Оно несколько проще, чем в эру преобладания вещества, поскольку можно пренебречь кривизной пространства. При $k = \pm 1$ современное значение правой части уравнения Эйнштейна (15.1.20) определяется из (15.2.5) и (15.2.6):

$$\frac{8\pi G \rho_0 R_0^2}{3} = \frac{2q_0}{|2q_0 - 1|}. \qquad (15.6.1)$$

В § 2 этой главы было показано, что, по всей вероятности, $q_0 > 0{,}014$ и, следовательно, в настоящее время $8\pi G\rho R^2/3 > 0{,}03$. В течение эры преобладания вещества эта величина убывала как $R^{-1} \sim T$; поэтому в более ранние периоды она была больше, например около 10 при $T_\gamma \approx 1000$ К. Отсюда видно, что на протяжении всей ранней истории Вселенной постоянная k была много меньше, чем правая часть уравнения (15.1.20), и потому приведенное выше уравнение можно упростить:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho R^2}{3}. \qquad (15.6.2)$$

Поэтому для обсуждения ранней Вселенной безразлично, является ли пространство открытым или закрытым.

Теперь мы должны рассмотреть, что представляет собой содержимое ранней Вселенной. Можно ожидать, что в любой заданный момент времени некоторые частицы будут в тепловом равновесии друг с другом, другие — в состоянии свободного расширения и, возможно, часть — в процессе перехода из первого состояния во второе. В приближении идеального газа, находящегося в тепловом равновесии, плотность числа частиц $n_i(q)\,dq$ i-го сорта с импульсом между q и $q + dq$ определяется распределением Ферми или Бозе (см., например, [182], § 52, 53):

$$n_i(q) = 4\pi h^{-3} g_i q^2\, dq \left[\exp\left(\frac{E_i(q) - \mu_i}{kT}\right) \pm 1\right]^{-1}, \qquad (15\ 6\ 3)$$

где $E_i(q) \equiv (m_i^2 + q^2)^{1/2}$ — энергия частицы, μ_i — химический потенциал; в квадратных скобках выбирается знак «+» для фермионов и знак «—» для бозонов, g_i — число спиновых состояний: $g = 1$ для нейтрино и антинейтрино и $g = 2$ для фотонов, электронов, нуклонов и их античастиц.

Химические потенциалы должны быть определены из рассмотрения законов сохранения, которым подчиняются различные возможные реакции. Основное правило состоит в том, что μ_i аддитивно сохраняется во всех реакциях (см., например, [182], формула (99.2)). В частности:

А. Фотоны могут быть испущены или поглощены в любой реакции в любом числе, и $\mu_\gamma = 0$. [Формула (15.6.3) переходит тогда в распределение Планка (15.5.9) с $n_\gamma = \rho_\gamma/h\nu$ и $q = E = h\nu$.]

Б. Пары частица — античастица аннигилируют в фотоны, поэтому химические потенциалы частицы и ее античастицы должны быть равны и иметь противоположные знаки.

В. Электроны и мюоны могут превратиться в соответствующие им нейтрино ν_e и ν_μ при столкновении друг с другом или нуклонами, т. е. в реакциях

$$e^- + \mu^+ \to \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \quad e^- + p \to \nu_e + n,$$
$$\mu^- + p \to \nu_\mu + n \text{ и т. д.}$$

Следовательно, химические потенциалы связаны равенствами

$$\mu_{e^-} - \mu_{\nu_e} = \mu_{\mu^-} - \mu_{\nu_\mu} = \mu_n - \mu_p. \qquad (15.6.4)$$

Всего имеются четыре независимых сохраняющихся внутренних квантовых числа: заряд, барионное число (нуклоны и гипероны минус антинуклоны и антигипероны), электронное лептонное число (e^- и ν_e минус e^+ и $\bar{\nu}_e$) и мюонное лептонное число [1]) (μ^- и ν_μ минус μ^+ и $\bar{\nu}_\mu$). Следовательно, имеются четыре независимых химических потенциала, в качестве которых можно взять μ_p, μ_{e^-}, μ_{ν_e}, μ_{ν_μ}. Эти независимые химические потенциалы должны определяться значениями плотности заряда N_Q, плотности барионного числа N_B, плотности электронного лептонного числа N_E и плотности мюонного лептонного числа N_M; все они изменяются как R^{-3}. Задача нахождения химических потенциалов сводится, таким образом, к определению значений этих четырех плотностей.

Мы знаем, что средняя плотность заряда N_Q равна нулю или во всяком случае очень мала [2]). Мы знаем также, что плотность

[1]) Обсуждение законов сохранения электронного лептонного числа и мюонного лептонного числа по отдельности см., например, в [183], § 1.2 и 3.4.

[2]) Возможность отличного от нуля N_Q обсуждается в работах [184, 185].

барионного числа N_B много меньше плотности фотонов n_γ, поскольку в настоящее время $N_B \approx n_p + n_n - n_{\bar{p}} - n_{\bar{n}}$ на 8—10 порядков меньше n_γ, тогда как в ранние периоды величина $N_B R^3$ была строго постоянной, а величина $n_\gamma R^3 \sim (T_\gamma R)^3$ — постоянной лишь весьма приближенно. К сожалению, мы очень мало знаем о нынешней плотности нейтрино и поэтому не можем оценить значение $N_E = n_{e^-} + n_{\nu_e} - n_{e^+} - n_{\bar{\nu}_e}$ или $N_M = n_{\mu^-} + n_{\nu_\mu} - n_{\mu^+} - n_{\bar{\nu}_\mu}$. Все же, поскольку N_B на 8—10 порядков меньше, чем n_γ, весьма разумно предположить, что N_E и N_M также много меньше n_γ. Если это так, то будет хорошим приближением положить все сохраняющиеся квантовые числа равными нулю:

$$N_Q = N_B = N_E = N_M = 0. \tag{15.6.5}$$

Конечно, на самом деле N_B не равно нулю и нам нужно будет ввести в расчеты барионы, когда мы в следующем параграфе станем рассматривать синтез элементов, но при установлении весьма приблизительной температурной истории ранней Вселенной числом N_B можно пренебречь. Вопрос о том, можно ли пренебречь также и числами N_E и N_M, будет поднят в конце этого параграфа.

Задача нахождения химических потенциалов решается теперь очень просто. Химические потенциалы частиц и античастиц равны и противоположны по знаку, поэтому четыре плотности N_Q, N_B, N_E и N_M являются *нечетными* функциями четырех независимых химических потенциалов μ_p, μ_{e^-}, μ_{ν_e}, μ_{ν_μ}. Следовательно, значения μ_i, определяемые условием (15.6.5), равны попросту нулю:

$$\mu_i = 0. \tag{15.6.6}$$

Это приближение дает возможность весьма просто использовать сохранение энергии. Полная плотность энергии и полное давление всех частиц, находящихся в тепловом равновесии, теперь являются, очевидно, функциями только температуры:

$$\rho_{\text{равн}}(T) \equiv \sum_{i\,(\text{равн})} \int E_i(q)\, n_i(q;\, T)\, dq, \tag{15.6.7}$$

$$p_{\text{равн}}(T) \equiv \sum_{i\,(\text{равн})} \int \left[\frac{q^2}{3E_i(q)}\right] n_i(q;\, T)\, dq \tag{15.6.8}$$

[см. (2.10.21) и (2.10.22)]. Согласно второму началу термодинамики, энтропия частиц, находящихся в равновесии при температуре T и в объеме V, есть функция $S(V, T)$, такая, что

$$dS(V, T) = \frac{1}{T}\{d(\rho_{\text{равн}}(T)\, V) + p_{\text{равн}}(T)\, dV\}. \tag{15.6.9}$$

Отсюда

$$\frac{\partial S(V, T)}{\partial V} = \frac{1}{T}\{\rho_{\text{равн}}(T) + p_{\text{равн}}(T)\},$$

$$\frac{\partial S(V, T)}{\partial T} = \frac{V}{T}\frac{d\rho_{\text{равн}}(T)}{dT}.$$

Плотность энергии и давление должны удовлетворять условию интегрируемости

$$\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}[\rho_{\text{равн}}(T) + p_{\text{равн}}(T)]\right\} = \frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{V}{T}\frac{d\rho_{\text{равн}}(T)}{dT}\right]$$

или после небольших преобразований

$$\frac{dp_{\text{равн}}(T)}{dT} = \frac{1}{T}\{\rho_{\text{равн}}(T) + p_{\text{равн}}(T)\}. \qquad (15.6.10)$$

Это равенство можно также вывести непосредственно из (15.6.7) и (15.6.8), так как частицы, находящиеся в тепловом равновесии, взаимодействуют только между собой, их полная энергия и давление должны, кроме того, удовлетворять уравнению сохранения энергии (14.2.19):

$$R^3\frac{dp_{\text{равн}}}{dt} = \frac{d}{dt}[R^3(\rho_{\text{равн}} + p_{\text{равн}})]. \qquad (15.6.11)$$

Используя условие (15.6.10), можно переписать это равенство так

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{R^3}{T}[\rho_{\text{равн}}(T) + p_{\text{равн}}(T)]\right\} = 0. \qquad (15.6.12)$$

Этот закон сохранения имеет простую интерпретацию в терминах энтропии. Использование равенства (15.6.10) в (15.6.9) дает

$$dS(V, T) = \frac{1}{T}d\{[\rho_{\text{равн}}(T) + p_{\text{равн}}(T)]V\} - \frac{V}{T^2}[\rho_{\text{равн}}(T) + p_{\text{равн}}(T)]\,dT,$$

и, следовательно, с точностью до возможной аддитивной постоянной

$$S(V, T) = \frac{V}{T}[\rho_{\text{равн}}(T) + p_{\text{равн}}(T)]. \qquad (15.6.13)$$

Равенство (15.6.12) устанавливает, таким образом, постоянство энтропии в объеме $R^3(t)$:

$$S \equiv S(R^3, T) = \frac{R^3}{T}[\rho_{\text{равн}}(T) + p_{\text{равн}}(T)]. \qquad (15.6.14)$$

В частности, когда все частицы, находящиеся в равновесии, являются ультрарелятивистскими, в интегралах (15.6.7) и (15.6.8)

можно положить $E = q$, так что

$$p_{\text{равн}}(T) = \frac{1}{3}\rho_{\text{равн}}(T). \tag{15.6.15}$$

Тогда из (15.6.10) следует, что

$$\rho_{\text{равн}}(T) \sim T^4 \tag{15.6.16}$$

с «постоянной» пропорциональности, зависящей от того, какие именно типы частиц находятся в равновесии при данной температуре. [Этот результат можно получить также непосредственно из (15.6.7) и (15.6.8).] Теперь, подставляя (15.6.15) и (15.6.16) в (15.6.12), определяем, как падает температура:

$$T \sim R^{-1}. \tag{15.6.17}$$

Мы увидим, что эта закономерность верна в течение большей (но все же не всей) части ранней эволюции Вселенной.

Нашей следующей целью является установление того, какие частицы были в тепловом равновесии в различные периоды. Одно из упрощений, возникших из-за пренебрежения химическими потенциалами, состоит в том, что иметь заметную плотность (15.6.3) и быть в тепловом равновесии могут только частицы с $m < kT$. При $kT < m_\pi$ или $T < 1{,}5 \cdot 10^{12}$ К такими частицами являются $\mu^\pm$, $e^\pm$, ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$, ν_e, $\bar{\nu}_e$ и γ. Гравитоны не рассматриваются здесь по причинам, изложенным в § 11 этой главы. В ходе всей ранней истории Вселенной процессы рождения пар, аннигиляции и комптоновского рассеяния поддерживали все остающиеся заряженные частицы в равновесии с фотонами. Следовательно, фотоны подчинялись распределению Планка (15.5.9), а $e^\pm$ и $\mu^\pm$ — распределению Ферми с нулевым химическим потенциалом:

$$n_{e^-}(q)\,dq = n_{e^+}(q)\,dq = 8\pi h^{-3} q^2\,dq\left[\exp\left(\frac{\sqrt{q^2+m_e^2}}{kT}\right)+1\right]^{-1}, \tag{15.6.18}$$

$$n_{\mu^-}(q)\,dq = n_{\mu^+}(q)\,dq = 8\pi h^{-3} q^2\,dq\left[\exp\left(\frac{\sqrt{q^2+m_\mu^2}}{kT}\right)+1\right]^{-1}. \tag{15.6.19}$$

Что можно сказать относительно нейтрино и антинейтрино? Известно, что они могут рождаться, исчезать и рассеиваться в реакциях

$$\begin{aligned} &e^- + \mu^+ \leftrightarrow \nu_e + \bar{\nu}_\mu, && e^+ + \mu^- \leftrightarrow \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \\ &\nu_e + \mu^- \leftrightarrow \nu_\mu + e^-, && \bar{\nu}_e + \mu^+ \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu + e^+, \\ &\nu_\mu + \mu^+ \leftrightarrow \nu_e + e^+, && \bar{\nu}_\mu + \mu^- \leftrightarrow \bar{\nu}_e + e^-. \end{aligned} \tag{15.6.20}$$

Коль скоро $kT < m_\mu$, сечения всех этих реакций будут примерно иметь порядок

$$\sigma_{wk} \approx g_{wk}^2 \hbar^{-4} (kT)^2, \tag{15.6.21}$$

где $g_{wk} = 1{,}4 \cdot 10^{-49}$ эрг·см^3 — константа слабого взаимодействия, известная по наблюдаемой скорости распада мюона $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$. При рассматриваемых температурах все скорости частиц порядка единицы, поэтому для плотностей заряженных лептонов $e^\pm$ и $\mu^\pm$ из (15.6.18), (15.6.19) получаем

$$n_l \approx \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3. \tag{15.6.22}$$

Следовательно, длина, на которой нейтрино рассеивается или рождается в расчете на один заряженный лептон, имеет порядок

$$\sigma_{wk} n_l \approx g_{wk}^2 \hbar^{-7} (kT)^5. \tag{15.6.23}$$

Полная плотность энергии приблизительно равна

$$\rho \approx kT \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3, \tag{15.6.24}$$

и, согласно (15.6.2), относительная скорость расширения порядка

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R} \approx (G\rho)^{1/2} \approx G^{1/2} \hbar^{-3/2} (kT)^2. \tag{15.6.25}$$

Отсюда, пока $kT > m_\mu$, т. е. $T > 10^{12}$ К, в единицах СГС имеем

$$\frac{\sigma n_l}{H} \approx G^{-1/2} \hbar^{-11/2} c^{-7/2} g_{wk}^2 (kT)^3 \approx \left(\frac{T}{10^{10}\text{К}}\right). \tag{15.6.26}$$

Однако все реакции (15.6.20) требуют либо присутствия μ^- или μ^+, либо энергии, достаточной для образования $\mu^\pm$. Когда $kT < m_\mu$, плотности мюонов и других частиц с энергией $E > m_\mu$ убывают пропорционально величине порядка $\exp(-m_\mu/kT)$ и вследствие этого

$$\frac{\sigma n_l}{H} \approx \left(\frac{T}{10^{10}\text{К}}\right)^3 \exp\left(-\frac{10^{12}\text{К}}{T}\right). \tag{15.6.27}$$

Нейтрино и антинейтрино выпадают из теплового равновесия с другими частицами, когда это отношение становится меньше единицы, т. е. при $T \approx 1{,}3 \cdot 10^{11}$ К.

Возможно, что в действительности ν_e и $\bar{\nu}_e$ оставались в тепловом равновесии несколько дольше, чем ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$. По современным представлениям (см., например, [186] § 3.3) слабые взаимодействия возникают вследствие взаимодействия «слабого тока» с самим собой или непосредственно, или через посредство заряженной частицы со спином 1, «промежуточного векторного мезона». Если это верно,

то есть дополнительные реакции с участием ν_e и $\bar{\nu}_e$:

$$e^- + e^+ \leftrightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e, \quad e^\pm + \nu_e \to e^\pm + \nu_e, \quad e^\pm + \bar{\nu}_e \to e^\pm + \bar{\nu}_e, \quad (15.6.28)$$

сечения которых того же порядка, что и (15.6.21) при $kT > m_e$. В этих реакциях не участвуют $\mu^\pm$, поэтому отношение скоростей реакций ν_e и $\bar{\nu}_e$ к относительной скорости расширения H будет определяться равенством (15.6.26) при $kT > m_e$, т. е. до температуры $T \approx 5 \cdot 10^9$ К. Следовательно, реакции (15.6.28) могли поддержать тепловое равновесие ν_e и $\bar{\nu}_e$ с γ и $e^\pm$ до температуры $T \approx \approx 10^{10}$ К, при которой отношение (15.6.26) падает до единицы. То же самое может оказаться справедливым даже для ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$ (см., в частности, [343—345]).

Теперь мы в состоянии изложить температурную историю ранней Вселенной. Начнем с температуры между 10^{12} К и $1{,}3 \cdot 10^{11}$ К, когда μ^+ и μ^- были уже достаточно редки для того, чтобы их вкладом в $\rho_{\text{равн}}$ и $p_{\text{равн}}$ можно было пренебречь, но их оставалось еще достаточно для поддержания теплового равновесия нейтрино и антинейтрино с другими частицами. Основными составляющими Вселенной были в то время $e^\pm$, γ, ν_e, $\bar{\nu}_e$, ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$, находящиеся в тепловом равновесии. Фотоны подчинялись распределению Планка, $e^\pm$ — распределению Ферми (15.6.18), нейтрино и антинейтрино — распределению Ферми вида

$$n_{\nu_e}(q)\,dq = n_{\bar{\nu}_e}(q)\,dq = n_{\nu_\mu}(q)\,dq = \\ = n_{\bar{\nu}_\mu}(q)\,dq = 4\pi h^{-3} q^2 \left[\exp\left(\frac{q}{kT}\right) + 1\right]^{-1} dq. \quad (15.6.29)$$

Поскольку все эти частицы были ультрарелятивистскими, температура падала по закону (15.6.17), а именно $T \sim R^{-1}$. Когда она упала примерно до $1{,}3 \cdot 10^{11}$ К, ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$, а возможно, также и ν_e, $\bar{\nu}_e$ перестали взаимодействовать с частицами, находящимися в тепловом равновесии, и начали свободно расширяться. *Однако это выключение взаимодействия не имело никакого влияния ни на одну из функций распределения.* Частицы, остающиеся в равновесии, по-прежнему образуют ультрарелятивистский газ, и их температура продолжает падать как R^{-1}.

При этом плотность числа нейтрино и антинейтрино спадает, как R^{-3}, и их импульсы испытывают красное смещение, пропорциональное R^{-1} (как и импульсы фотонов), так что вид распределения (15.6.29) сохраняется, причем температура нейтрино T_ν пропорциональна R^{-1}. Поскольку $T_\nu = T$ до выключения взаимодействия и поскольку после этого и T_ν, и T убывают как R^{-1}, нейтрино и антинейтрино продолжают подчиняться распределе-

нию Ферми (15.6.29) с $T_\nu = T$, как если бы они оставались в тепловом равновесии с другими частицами. При $T \approx 10^{10}$ К могло произойти второе выключение взаимодействия — для ν_e и $\bar{\nu}_e$, но опять же при этом не происходит никакого изменения в функции распределения нейтрино и антинейтрино, если только во время этого выключения $e^\pm$ еще остаются релятивистскими. Итак, в течение всего времени, когда 10^{12} К $> T > 5 \cdot 10^9$ К, нейтрино и антинейтрино вели себя так, как если бы они были в тепловом равновесии и все частицы γ, $e^\pm$, ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$, ν_e и $\bar{\nu}_e$ имели распределение Планка или Ферми с одной и той же температурой T, падающей как R^{-1}. Плотности энергии нейтрино и антинейтрино были равны

$$\rho_{\nu_e} = \rho_{\bar{\nu}_e} = \rho_{\nu_\mu} = \rho_{\bar{\nu}_\mu} \equiv \rho_\nu, \tag{15.6.30}$$

где

$$\rho_\nu = 4\pi h^{-3} \int_0^\infty q^3\, dq \left[\exp\left(\frac{q}{kT}\right) + 1\right]^{-1} = \frac{7\pi^5}{30h^3}(kT)^4 = \frac{7}{16} aT^4. \tag{15.6.31}$$

Кроме того, при $kT > m_e$ $e^\pm$ были релятивистскими и поэтому

$$\rho_{e^-} = \rho_{e^+} = 2\rho_\nu = \frac{7}{8} aT^4 \tag{15.6.32}$$

($\rho_{e^\pm} = 2\rho_\nu$ из-за того, что e^+ и e^- имеют по два спиновых состояния). Полная плотность энергии Вселенной в период, когда 10^{10} К $\leqslant T < 10^{12}$ К, была, таким образом, равна

$$\rho = \rho_{\nu_e} + \rho_{\bar{\nu}_e} + \rho_{\nu_\mu} + \rho_{\bar{\nu}_\mu} + \rho_{e^-} + \rho_{e^+} + \rho_\gamma = \frac{9}{2} aT^4. \tag{15.6.33}$$

Далее картина несколько усложняется. При температуре ниже 10^{10} К единственными, оставшимися в тепловом равновесии и игравшими существенную роль частицами были $e^\pm$ и γ. Их энергия в объеме R^3 определяется формулами (15.6.14), (15.6.7), (15.6.8) и (15.6.18):

$$S = \frac{R^3}{T}(\rho_{e^-} + \rho_{e^+} + \rho_\gamma + p_{e^-} + p_{e^+} + p_\gamma). \tag{15.6.34}$$

При $T > 5 \cdot 10^9$ К электроны и позитроны были релятивистскими, поэтому в (15.6.34) можно подставить выражения (15.6.15) и (15.6.32):

$$S = \frac{4R^3}{3T}(\rho_{e^-} + \rho_{e^+} + \rho_\gamma) = \frac{11}{3} a(RT)^3. \tag{15.6.35}$$

Когда температура T упала ниже $5 \cdot 10^9$ К, e^+ и e^- аннигилировали и окончательно остались только фотоны с энтропией

$$S = \frac{4R^3}{3T}\rho_\gamma = \frac{4}{3} a(RT)^3. \tag{15.6.36}$$

Но поскольку $s = \text{const}$, то результатом исчезновения e^+ и e^- было возрастание RT в $(^{11}/_4)^{1/3}$ раз [186]:

$$\frac{(RT)_{T<10^9\text{К}}}{(RT)_{T>5\cdot 10^9\text{К}}} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}. \qquad (15.6.37)$$

Нейтрино и антинейтрино не были «подогреты» электронно-позитронной аннигиляцией; поэтому их температура продолжала падать, как R^{-1}. Следовательно, при $T < 5\cdot 10^9$ К уже нужно различать температуру нейтрино и антинейтрино T_ν и общую температуру фотонов и всех других оставшихся заряженных частиц T. Поскольку $RT_\nu = \text{const}$, а RT подскочило в $(^{11}/_4)^{1/3}$ раз, фотонная температура становится в итоге больше нейтринной в это же число раз:

$$\left(\frac{T}{T_\nu}\right)_{T<10^9\text{К}} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} = 1{,}401. \qquad (15.6.38)$$

Чтобы определить поведение RT или T/T_ν между $5\cdot 10^9$ и 10^9 К, необходимо использовать выражение (15.6.34) или

$$s = \frac{4}{3}\, a\,(RT)^3 \mathcal{S}\left(\frac{m_e}{kT}\right), \qquad (15.6.39)$$

где

$$\mathcal{S}(x) \equiv 1 + \frac{45}{2\pi^4}\int_0^\infty y^2\, dy \left[\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{3\sqrt{x^2+y^2}}\right] \times$$

$$\times \left[\exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 1\right]^{-1}. \qquad (15.6.40)$$

Постоянную s можно выразить через постоянную RT_ν, заменяя в (15.6.35) T на T_ν, и тогда

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T\left[\mathcal{S}\left(\frac{m_e}{kT}\right)\right]^{1/3}. \qquad (15.6.41)$$

Численный расчет [186, 187] функции $\mathcal{S}$ показывает, что отношение T/T_ν увеличилось только до 1,001 ко времени, когда температура упала до $3\cdot 10^9$ К, и было меньше 1,4 при $T = 10^9$ К (табл. 15.4).

При $T < 10^9$ К в тепловом равновесии с фотонами было только небольшое количество нуклонов и электронов, оставшихся после того, как все пары $e^- - e^+$ аннигилировали. Обе температуры, T_ν и T, продолжали падать как R^{-1}, оставаясь в фиксированном отношении (15.6.37). В предыдущем параграфе было установлено, что температура фотонов T_γ перестала совпадать с температурой вещества T при $T \lesssim 4000$ К, но и после этого она продолжала падать, как R^{-1}. Таким образом, сейчас должно существовать космическое нейтринно-антинейтринное фоновое излучение черного тела. описываемое формулой (15.6.29) с температурой

$$T_{\nu 0} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{\gamma 0} = 1{,}9\ \text{К}.$$

Таблица 15.4

Температурная история Вселенной с момента аннигиляции пар $\mu^+\mu^-$ до выключения взаимодействия между веществом и излучением *

T, К	R/R_0	T/T_ν	t, с
10^{12}	$1{,}9\cdot10^{-12}$	1,100	0
$6\cdot10^{11}$	$3{,}2\cdot10^{-12}$	1,000	$1{,}94\cdot10^{-4}$
$3\cdot10^{11}$	$6{,}4\cdot10^{-12}$	1,000	$1{,}129\cdot10^{-3}$
$2\cdot10^{11}$	$9{,}6\cdot10^{-12}$	1,000	$2{,}61\cdot10^{-3}$
10^{11}	$1{,}9\cdot10^{-11}$	1,000	$1{,}078\cdot10^{-2}$
$6\cdot10^{10}$	$3{,}2\cdot10^{-11}$	1,000	$3{,}01\cdot10^{-2}$
$3\cdot10^{10}$	$6{,}4\cdot10^{-11}$	1,001	0,1209
$2\cdot10^{10}$	$9{,}6\cdot10^{-11}$	1,002	0,273
10^{10}	$1{,}9\cdot10^{-10}$	1,008	1,103
$6\cdot10^{9}$	$3{,}1\cdot10^{-10}$	1,022	3,14
$3\cdot10^{9}$	$5{,}9\cdot10^{-10}$	1,081	13,83
$2\cdot10^{9}$	$8{,}3\cdot10^{-10}$	1,159	35,2
10^{9}	$2{,}6\cdot10^{-9}$	1,346	$1{,}82\cdot10^{2}$
$3\cdot10^{8}$	$9{,}0\cdot10^{-9}$	1,401	$2{,}08\cdot10^{3}$
10^{8}	$2{,}7\cdot10^{-8}$	1,401	$1{,}92\cdot10^{4}$
10^{7}	$2{,}7\cdot10^{-7}$	1,401	$1{,}92\cdot10^{6}$
10^{6}	$2{,}7\cdot10^{-6}$	1,401	$1{,}92\cdot10^{8}$
10^{5}	$2{,}7\cdot10^{-5}$	1,401	$1{,}92\cdot10^{10}$
10^{4}	$2{,}7\cdot10^{-4}$	1,401	$1{,}92\cdot10^{12}$
$4\cdot10^{3}$	$6{,}3\cdot10^{-4}$	1,401	$1{,}20\cdot10^{13}$

* Значения R/R_0 получены в предположении, что современная температура излучения $T_{\gamma 0} = 2{,}7$ К. Последние несколько значений t получены в предположении, что плотностью энергии вещества все еще можно пренебречь по сравнению с плотностью энергии фотонов и нейтрино. Значения T/T_ν и t при $T > 10^8$ К взяты из работы [187].

Все время, начиная с $T \approx 10^9$ К и до настоящего момента, плотность энергии фотонов, нейтрино и антинейтрино была равна

$$\rho_R \equiv \rho_\gamma + \rho_{\nu_e} + \rho_{\bar{\nu}_e} + \rho_{\nu_\mu} + \rho_{\bar{\nu}_\mu} = aT_\gamma^4 + \frac{7}{4}aT_\nu^4 =$$

$$= \left[1 + \frac{7}{4}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}\right]aT_\gamma^4 = 1{,}45aT_\gamma^4. \quad (15.6.42)$$

Ее можно сравнить с плотностью энергии нерелятивистского вещества $m_N n_N$, которая убывает как R^{-3} или T_γ^3:

$$n_N = n_{N0}\left(\frac{T_\gamma}{T_{\gamma 0}}\right)^3.$$

Отсюда критическая температура $T_{кр}$, при которой $m_N n_N = \rho_R$, равна

$$T_{кр} = \frac{m_N n_{N0}}{1{,}45 a T_{\gamma 0}^3} = 4200\ \text{К} \left[\frac{m_N n_{N0}}{10^{-30}\ \text{г/см}^3}\right]. \qquad (15.6.43)$$

Если $2 \cdot 10^{-29}$ г/см$^3 \geqslant m_N n_{N0} \geqslant 3 \cdot 10^{-31}$ г/см^3, то 84 000 К $\geqslant$ $\geqslant T_{кр} \geqslant$ 1200 К. Можно отметить, что температура $T_R \approx 4000$ К, при которой произошла рекомбинация ионизованного водорода, лежит в этих пределах, поэтому не ясно, была ли плотность энергии излучения больше или меньше плотности энергии вещества в момент исчезновения теплового контакта. Эта неопределенность не сказывалась на нашем обсуждении микроволнового фона в предыдущем параграфе; важно было лишь, что плотность числа фотонов была и остается много больше плотности барионов.

Сколько времени все это занимало? В эру, когда температура была между 10^{12} и $5 \cdot 10^9$ К, и после этого, пока она опускалась до 10^9 К, все имевшиеся в большом количестве частицы были ультрарелятивистскими, а давление $p \approx \rho/3$. Согласно (15.1.23), плотность энергии ρ изменялась как R^{-4}. Для этих периодов динамическое уравнение (15.6.2) можно записать в виде

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{4\dot{R}}{R} = -4\left(\frac{8\pi G\rho}{3}\right)^{1/2}$$

а его решением является

$$t = \left(\frac{3}{32\pi G\rho}\right)^{1/2} + \text{const}. \qquad (15.6.44)$$

При 10^{12} К $> T > 5 \cdot 10^9$ К плотность энергии дается формулой (15.6.33), откуда (в единицах СГС)

$$t = \left(\frac{c^2}{48\pi G a T^4}\right)^{1/2} + \text{const} = 1{,}09\ \text{с} \left[\frac{T}{10^{10}\text{К}}\right]^{-2} + \text{const}.$$

Таким образом, понадобилось 0,0107 с для того, чтобы температура T упала от 10^{12} до 10^{11} К, и еще 1,07 с — для падения до 10^{10} К.

При 10^9 К $> T > T_{кр}$ плотность энергии определяется формулой (15.6.42), поэтому

$$t = \left(\frac{c^2}{15{,}5\pi G a T_\gamma^4}\right)^{1/2} + \text{const} = 1{,}92\ \text{с} \left[\frac{T_\gamma}{10^{10}\text{К}}\right]^{-2} + \text{const}.$$

Время, необходимое для падения температуры от 10^9 до 10^8 К, составляло, таким образом, около 5,3 ч. Если излучение продолжало доминировать над веществом до рекомбинации водорода при $T = 4000$ К, то возраст Вселенной к этому моменту был равен $4 \cdot 10^5$ лет.

К сожалению, если мы хотим описать поведение $T(t)$ и $R(t)$ в ходе всей ранней истории Вселенной, то при «прослеживании» эры электрон-позитронной аннигиляции приходится прибегать

к численному расчету. Чтобы выразить R через T, воспользуемся тем фактом, что при $T < 10^{12}$ К энтропия (15.6.39) оставалась все время постоянной (до настоящего времени, если при $T < 4000$ К подставлять T_γ вместо T). Таким образом,

$$s = \frac{4}{3} a (R_0 T_{\gamma 0})^3 \tag{15.6.45}$$

и, следовательно, (15.6.39) можно переписать в виде

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{T}{T_{\gamma 0}}\right)^{-1} \mathcal{S}^{-1/3}\left(\frac{m_e}{kT}\right). \tag{15.6.46}$$

Плотность энергии ρ является функцией T, такой, что ее при температуре T, меньшей 10^{12} К и большей чем $T_{\text{кр}}$ и 4000 К, можно приравнять

$$\rho = \rho_\gamma + \rho_{\nu_e} + \rho_{\bar{\nu}_e} + \rho_{\nu_\mu} + \rho_{\bar{\nu}_\mu} + \rho_{e+} + \rho_{e-} =$$

$$= aT^4 + \frac{7}{4} aT_\nu^4 + 16\pi h^{-3} \int_0^\infty E_e(q)\, q^2\, dq \left[\exp\left(\frac{E_e(q)}{kT}\right) + 1\right]^{-1}.$$

С помощью (15.6.41) получим

$$\rho = aT^4 \mathscr{E}\left(\frac{m_e}{kT}\right), \tag{15.6.47}$$

где

$$\mathscr{E}(x) = 1 + \frac{7}{4}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \mathcal{S}^{4/3}(x) +$$

$$+ \frac{30}{\pi^4} \int_0^\infty y^2\, dy \sqrt{x^2 + y^2} \left[\exp\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + 1\right]^{-1}. \tag{15.6.48}$$

В динамическом уравнении (15.6.2)

$$dt = \left(\frac{8\pi\rho G}{3}\right)^{-1/2} \frac{dR}{R}$$

можно использовать уравнения (15.6.46) и (15.6.47) и получить формулу для времени как функции температуры:

$$t = -\int \left[\frac{8}{3}\pi G a T^4 \mathscr{E}\left(\frac{m_e}{kT}\right)\right]^{-1/2} \left(\frac{dT}{T} + \frac{d\mathcal{S}(m_e/kT)}{3\mathcal{S}(m_e/kT)}\right). \tag{15.6.49}$$

Численные значения t, R/R_0 и T/T_ν в зависимости от T даны в табл. 15.4 [187].

Единственным по-настоящему произвольным предположением было до сих пор то, что плотности лептонных чисел N_E и N_M считались равными нулю или по крайней мере много меньшими, чем n_γ. Рассмотрим теперь, каким был бы эффект отказа от этого

предположения. После падения температуры ниже 10^{12} К из заряженных частиц оставались только электроны и позитроны; электронейтральность требует, чтобы $N_Q = n_{e^+} - n_{e^-} = 0$. Химический потенциал электрона должен быть тогда равен нулю, и единственными частицами с неисчезающими химическими потенциалами остаются нейтрино и антинейтрино. При $T > 1{,}3 \cdot 10^{11}$ К эти частицы были в равновесии с γ, e^+ и e^- и подчинялись распределению Ферми

$$n_{\nu_e}(q)\,dq = 4\pi h^{-3} q^2\,dq \left[\exp\left(\frac{q-\mu_{\nu_e}}{kT}\right)+1\right]^{-1}, \qquad (15.6.50)$$

$$n_{\bar{\nu}_e}(q)\,dq = 4\pi h^{-3} q^2\,dq \left[\exp\left(\frac{q+\mu_{\nu_e}}{kT}\right)+1\right]^{-1} \qquad (15.6.51)$$

и аналогично для ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$. Плотности лептонных чисел тогда равны

$$N_E = \int [n_{\nu_e}(q) - n_{\bar{\nu}_e}(q)]\,dq = 4\pi \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \mathcal{N}\left(\frac{\mu_{\nu_e}}{kT}\right), \qquad (15.6.52)$$

$$N_M = \int [n_{\nu_\mu}(q) - n_{\bar{\nu}_\mu}(q)]\,dq = 4\pi \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \mathcal{N}\left(\frac{\mu_{\nu_\mu}}{kT}\right), \qquad (15.6.53)$$

где

$$\mathcal{N}(x) \equiv \int_0^\infty [(e^{y-x}+1)^{-1} - (e^{y+x}+1)^{-1}]\,y^2\,dy. \qquad (15.6.54)$$

Поскольку электронное лептонное и мюонное лептонное числа считаются сохраняющимися [183], плотности N_E и N_M должны все время вести себя как R^{-3}, а поскольку мы знаем, что в период, когда 10^{12} К $> T > 5 \cdot 10^9$ К, температура изменяется как R^{-1}, то из всего этого следует, что μ_{ν_e}/kT и μ_{ν_μ}/kT должны быть постоянными с момента аннигиляции $\mu^+ - \mu^-$ до «выключения» взаимодействия нейтрино и антинейтрино с остальной материей.

После «выключения» этого взаимодействия нейтрино и антинейтрино свободно расширяются; при этом их плотности падают как R^{-3}, а импульсы «краснеют» пропорционально R^{-1}. Это красное смещение сохраняет вид распределений (15.6.50) и (15.6.51), но приводит к уменьшению температуры и химических потенциалов в R^{-1} раз. Таким образом, распределения нейтрино в течение всего периода $T < 10^{12}$ К до настоящего времени определяются следующими формулами:

$$n_{\nu_e}(q)\,dq = 4\pi h^{-3} q^2\,dq \left[\exp\left(\frac{q-\mu_{\nu_e}}{kT_\nu}\right)+1\right]^{-1}, \qquad (15.6.55)$$

$$n_{\bar{\nu}_e}(q)\,dq = 4\pi h^{-3} q^2\,dq \left[\exp\left(\frac{q+\mu_{\nu_e}}{kT_\nu}\right)+1\right]^{-1}, \qquad (15.6.56)$$

$$n_{\nu_\mu}(q)\,dq = 4\pi h^{-3} q^2\,dq \left[\exp\left(\frac{q-\mu_{\nu_\mu}}{kT_\nu}\right)+1\right]^{-1}, \quad (15.6.57)$$

$$n_{\bar{\nu}_\mu}(q)\,dq = 4\pi h^{-3} q^2\,dq \left[\exp\left(\frac{q+\mu_{\nu_\mu}}{kT_\nu}\right)+1\right]^{-1}, \quad (15.6.58)$$

где T_ν, μ_{ν_e} и μ_{ν_μ} изменяются как R^{-1}, причем до аннигиляции электронов и позитронов $T_\nu = T$. Распределения нейтрино и антинейтрино не влияют на аннигиляцию $e^+ - e^-$, и все полученные ранее результаты относительно зависимости T_ν и R от T сохраняют силу.

Если N_E и N_M много меньше, чем плотность фотонов $n_\gamma \approx \approx (kT/h)^3$, из (15.6.52) и (15.6.53) получим

$$|\mu_{\nu_e}| \ll kT_\nu, \qquad |\mu_{\nu_\mu}| \ll kT_\nu \quad (15.6.59)$$

и все распределения (15.6.55) — (15.6.58) сводятся к использованному ранее распределению (15.6.29).

Напротив, если N_E или N_M сравнимы с плотностью n_γ или больше ее, то постоянные $|\mu_{\nu_e}/kT_\nu|$ или $|\mu_{\nu_\mu}/kT_\nu|$ будут порядка единицы или больше и функции распределения (15.6.55)—(15.6.58) будут заметно отличаться от (15.6.29). В пределе, когда, скажем, $\mu_{\nu e}/kT_\nu/\gg 1$, функции распределения (15.6.55), (15.6.56) становятся равными

$$n_{\nu_e}(q)\,dq \approx \begin{cases} 4\pi h^{-3} q^2\,dq, & q < \mu_{\nu_e}, \\ 0, & q > \mu_{\nu_e}, \end{cases} \quad (15.6.60)$$

$$n_{\bar{\nu}_e}(q)\,dq \approx 0. \quad (15.6.61)$$

Это случай *полного вырождения нейтрино*. Разумеется, если $\mu_{\nu e}/kT_\nu \ll -1$, то в формулах (15.6.60) и (15.6.61) нейтрино и антинейтрино меняются ролями и имеет место полное вырождение антинейтрино. Возможность полного вырождения нейтрино допускалась [188] некоторое время назад до открытия микроволнового фона, когда представлялось разумным предположить, что Вселенная всегда была холодной и поэтому $kT_\nu \ll |\mu_{\nu e}|$.

Частичное или полное вырождение повлияло бы на наши расчеты только таким образом, что сократилась бы временная шкала. Полная энергия нейтрино и антинейтрино определяется выражением

$$\rho_{\nu+\bar{\nu}} = \int \left[n_{\nu_e}(q) + n_{\bar{\nu}_e}(q) + n_{\nu_\mu}(q) + n_{\bar{\nu}_\mu}(q)\right] q\,dq =$$

$$= 4\pi h^{-3} (kT_\nu)^4 \left[\mathcal{F}\left(\frac{\mu_{\nu_e}}{kT_\nu}\right) + \mathcal{F}\left(\frac{\mu_{\nu_\mu}}{kT_\nu}\right)\right], \quad (15.6.62)$$

где

$$\mathcal{F}(x) \equiv \int_0^\infty [(e^{y-x}+1)^{-1}+(e^{y+x}+1)^{-1}]\, y^3\, dy.$$

Эта величина всегда больше, чем плотность энергии при нулевом химическом потенциале $^7/_4 aT_\nu^4$ [см. (15.6.30) и (15.6.31)], и, следовательно, скорость расширения (15.6.2) возрастает при вырождении. В пределе, когда $|\mu_{\nu_e}/kT_\nu| \gg 1$ или $|\mu_{\nu_\mu}/kT_\nu| \gg 1$ или когда выполняются оба эти условия вместе, мы имеем

$$\rho \approx \rho_{\nu+\bar{\nu}} \approx \pi h^{-3}[\mu_{\nu_e}{}^4 + \mu_{\nu_\mu}{}^4]. \qquad (15.6.63)$$

Тогда вырожденные нейтрино или антинейтрино дают основной вклад в плотность энергии и определяют скорость расширения.

Интересно узнать, можем ли мы обнаружить космический фон нейтрино и антинейтрино. Наиболее жесткий верхний предел на $|\mu_{\nu_e}|$ и $|\mu_{\nu_\mu}|$ накладывается измерениями параметра замедления q_0. Поскольку q_0 ненамного больше единицы, полная плотность энергии не может быть много больше чем 10^{-29} г/см^3 (см. § 2 этой главы) и поэтому, согласно (15.6.63),

$$[\mu_{\nu_e 0}{}^4 + \mu_{\nu_\mu 0}{}^4]^{1/4} \leqslant 0{,}0075 \text{ эВ}. \qquad (15.6.64)$$

Как мы уже видели, нынешняя температура нейтрино $T_{\nu 0}$ равна примерно 1,9 К, т. е. $kT_{\nu 0} = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ эВ. Отсюда ограничение сверху на химический потенциал можно записать в виде

$$\frac{|\mu_{\nu_e}|}{kT_\nu} \leqslant 45, \qquad \frac{|\mu_{\nu_\mu}|}{kT_\nu} \leqslant 45. \qquad (15.6.65)$$

Следовательно, измерения q_0 не исключают почти полного вырождения.

Мы можем также попытаться измерить химические потенциалы непосредственно. В разрешенном β^--распаде, например $H^3 \to \to He^3 + e^- + \bar{\nu}_e$, нормально мы ожидаем, что число событий на интервал энергии электрона $(E_e,\ E_e + dE_e)$ дается функцией Ферми

$$N_F(E_e)\, dE_e = a p_e E_e (W_0 - E_e)^2 F(E_e)\, dE_e,$$

где a — постоянная, p_e — импульс электрона, W_0 — максимальная энергия электрона и $F(E_e)$ — известная функция, вводящая поправку на кулоновское взаимодействие в конечном состоянии. Однако в присутствии фона антинейтрино (15.6.56) скорость β^--распада уменьшится вследствие принципа Паули, так как ее нужно умножить на долю незаполненных состояний антинейтрино

при энергии $W_0 - E_e$:

$$N(E_e)\,dE_e = \left[1 - \frac{h^3 n_{\bar{\nu}_e}(W_0 - E_e)}{4\pi (W_0 - E_e)^2}\right] N_F(E_e)\,dE_e,$$

или в явном виде [94]

$$N(E_e)\,dE_e = \left[1 + \exp\left(\frac{E_e - W_0 + \mu_{\nu_e 0}}{kT_{\nu 0}}\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times\, a p_e E_e (W_0 - E_e)^2 F(E_e)\,dE_e. \qquad (15.6.66)$$

Поскольку W_0 во всех известных процессах β-распада много больше, чем $|\mu_{\nu e 0}|$ и $kT_{\nu 0}$, эта поправка весьма мала в подавляющей части спектра электронов. Все же если $\mu_{\nu e 0} < -kT_{\nu 0}$, то функция $N(E_e)$ будет аномально подавлена в области $W_0 > E_e \gtrsim W_0 - |\mu_{\nu e 0}|$, как если бы антинейтрино имело массу $|\mu_{\nu e 0}|$. Если $\mu_{\nu e 0} > 0$, большого подавления при $E_e < W_0$ не будет, но зато будут события с $E_e > W_0$, вызванные поглощением космических нейтрино в реакциях типа $\nu_e + H^3 \to e^- + He^3$. Частота таких событий дается [188] той же формулой (15.6.66), что и в случае рождения антинейтрино, за исключением того, что вместо $\mu_{\nu e 0}$ нужно подставить $-\mu_{\nu e 0}$ и считать, что $E_e > W_0$. Таким образом, при $\mu_{\nu e 0} > kT_{\nu 0}$ β^--спектр поднимется выше W_0 до энергии $W_0 + \mu_{\nu e 0}$, что внешне будет выглядеть как нарушение сохранения энергии.

К настоящему времени наилучшие данные по спектру β^--электронов вблизи конечной точки W_0 получены при изучении низкоэнергетического распада $H^3 \to He^3 + e^- + \bar{\nu}_e$ с $W_0 = 18{,}7$ кэВ. В последних экспериментах [189, 190] не было обнаружено какого-либо аномального подавления спектра в области ниже чем на 60 эВ от конца спектра W_0 и никаких аномальных событий при энергии выше $W_0 + 60$ эВ. Отсюда вывод, что

$$|\mu_{\nu e 0}| \lesssim 60\ \text{эВ} \qquad (15.6.67)$$

для химического потенциала любого знака.

Есть также возможность получения косвенной информации о фоне космических нейтрино и антинейтрино из «выживания протонов в космических лучах. Нейтрино или антинейтрино с энергией q, сталкивающиеся под углом θ с релятивистским протоном с энергией γm_p, *в системе покоя протона будут иметь энергию*

$$E \approx \gamma q\,(1 - \cos\theta) \text{ при } \gamma \gg 1.$$

Полное сечение реакций $p\nu$ и $p\bar{\nu}$ при «лабораторной» энергии E приблизительно равно

$$\sigma(E) \approx AE^2,$$

где (в единицах СГС)

$$A \approx \frac{g_{wk}^2}{\hbar^4 c^4} \approx 10^{-56} \text{ см}^2/\text{эВ}^2.$$

Тогда скорость этих реакций для релятивистского протона с энергией γm_p в фоне вырожденных ν_e (или $\bar{\nu}_e$) определяется выражением

$$\Gamma = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{|\mu_{\nu_e 0}|} \sigma\left[\gamma q (1-\cos\theta)\right] h^{-3} q^2\, dq,$$

или (в единицах СГС)

$$\Gamma \approx \frac{4\pi\gamma^2 A\, |\mu_{\nu_e 0}|^5}{15 h^3 c^2} \approx 3 \cdot 10^{-34} \gamma^2 |\mu_{\nu_e 0}\,(\text{эВ})|^5 \text{с}^{-1}, \qquad (15.6.68)$$

и аналогично для вырожденных ν_μ или $\bar{\nu}_\mu$. Как было отмечено Бернстайном, Рудерманом и Файнбергом [191], из того, что наблюдаемые протоны космических лучай с $\gamma > 10^6$ определенно просуществовали в течение более чем 10^6 с, следует, что $|\mu_{\nu e 0}|$ и $|\mu_{\nu_\mu 0}|$ должны быть меньше 10^3 эВ. Коусик, Пал и Тэндон [192] предположили, что протоны с $\gamma \approx 10^9$ не могут испытать более 14 актов рассеяния в течение времени порядка $5 \cdot 10^7$ лет, и пришли к выводу, что $|\mu_{\nu_e 0}|$ и $|\mu_{\nu_\mu 0}|$ меньше 2 эВ.

Кроме того, можно искать изломы в спектре протонов космических лучей при порогах различных реакций νp и $\bar{\nu} p$. Например, порог реакции $p + \bar{\nu}_e \to n + e^+$ находится при $m_e + m_n - m_p = 1{,}8$ МэВ, и если $\mu_{\nu e 0} < -kT_{\nu 0}$, то должен быть излом вниз в спектре протонов космических лучей при

$$\gamma \approx \frac{1{,}8 \text{ МэВ}}{|\mu_{\nu_e 0}|}. \qquad (15.6.69)$$

Константинов, Кочаров и Старóунов [193, 194] заметили существование излома при $\gamma \approx 2 \cdot 10^6$ и предположили, что он, возможно, обусловлен вырожденным антинейтринным фоном с

$$\mu_{\nu_e 0} \approx -0{,}8 \text{ эВ}. \qquad (15.6.70)$$

Эта оценка по абсолютному значению много больше верхнего предела (15.6.64), установленного из измерений q_0.

§ 7. Синтез гелия

Начиная с пионерской работы Ф. В. Кларка [195], в прошлом веке относительное содержание химических элементов было предметом тщательных исследований геологов и астрономов. Постепенно было определено «космическое» распределение элементов [196—

198]: больше всего содержится водорода и гелия, им сопутствуют элементы группы C —N—O—Ne, а содержание элементов группы Li—Be—B и элементов тяжелее никеля очень низкое. Объяснение такого состава Вселенной издавна рассматривается как одна из главных целей теоретической астрофизики.

Одно из возможных объяснений основывается на ядерных реакциях, являющихся источником энергии звезд. Ядерная трансмутация, продемонстрированная Резерфордом в лабораторных условиях, привела Эддингтона [199] в 1920 г. к мысли, что Солнце, возможно, получает энергию в результате синтеза гелия из водорода. В таком случае звезды могли бы образоваться из чистого водорода и постепенно производить гелий и более тяжелые элементы, как золу при выгорании. Конкретные реакции, в процессе которых водород в звездах выгорает в гелий, были указаны Г. Бете в 1939 г. [200], а последующие реакции, в которых из гелия синтезируются более тяжелые элементы, были исследованы в 50-х годах в ряде работ Солпитера [201], Бэрбиджей, Фаулера и Хойла [44, 202], Камерона [203] и других [1]). Совсем недавно Клэйтон и Арнетт [205] отметили, что важным процессом, при котором происходит нуклеосинтез, являются взрывы звезд.

Есть другая соперничающая теория нуклеосинтеза, разработанная в 1940-х годах Г. Гамовым с сотр. [102—108, 186]. По идее Гамова, хотя ранняя горячая и плотная стадия космического расширения была много короче времени жизни звезд, в то время имелось большое число свободных нейтронов и быстрое образование тяжелых элементов могло идти путем последовательного захвата нейтронов, начинающегося с реакции $n + p \rightarrow d + \gamma$. Содержание элементов должно быть тогда коррелировано с их сечениями захвата нейтрона, что приблизительно и наблюдается. В § 5 этой главы мы уже отмечали, что необходимость избежать чрезмерного образования гелия в этой теории требует присутствия излучения черного тела с современной температурой, оцениваемой [108] в 5 К. Обеим теориям нуклеосинтеза, и звездной, и космологической, присущи свои недостатки. Поскольку не существует стабильных ядер с атомными весами $A = 5$ или $A = 8$, трудно объяснить образование элементов тяжелее гелия столкновениями $p - \alpha$, $n - \alpha$ или $\alpha - \alpha$. В звездах, в центрах которых весь водород превратился в гелий, мостом через щели при $A = 5$ и $A = 8$ может быть образование при $\alpha - \alpha$-столкновениях небольшого количества нестабильных ядер Be^8 с последующим образованием C^{12} в процессе столкновения $\alpha - Be^8$ [201]. Однако плотность расширяющейся Вселенной при температуре $T \approx 10^9$ К слишком низка, чтобы могло произойти сгорание значительного количества гелия. Сейчас общепринято считать, что все элементы тяжелее никеля синтезированы в звездах.

[1]) См. по этому вопросу обзор [204].

С другой стороны, рядом авторов [206—208] было отмечено, что космическое содержание гелия слишком велико, чтобы его можно было объяснить нуклеосинтезом в звездах. Отношение светимости к массе L/M для Галактики составляет около $^1/_{10}$ этого отношения для Солнца $L_\odot/M_\odot$, т. е. 0,2 эрг/(г·с). Если светимость Галактики оставалась постоянной в течение последних 10^{10} лет, то на один нуклон выделилась энергия 0,06 МэВ. В противоположность этому при слиянии водорода в гелий освобождается 6 МэВ на нуклон, и потому не более 1% нуклонов Галактики могли слиться в гелий (или в более тяжелые ядра) в обычных звездных процессах. Как мы увидим, оценки содержания гелия меняются, но относительно того, что космическое содержание гелия значительно больше 1% (по массе), имеется почти общее согласие. Конечно, не исключено, что гелий был синтезирован в более раннюю эпоху, когда светимость Галактики была больше. В § 5 этой главы мы отмечали, что высвобожденная тогда энергия могла бы при термализации объяснить нынешний 2,7°-ный микроволновый фон. Однако представляется более естественным и интересным предположение, что высокое космическое содержание гелия возникло в некоторый ранний период истории Вселенной, а энергия слияния была утеряна при происходившем затем красном смещении.

Подсчитаем содержание гелия космологического происхождения. Удобно разбить вычисление на две части. Вычислим сначала отношение содержаний нейтронов и протонов как функцию времени, учитывая только слабые процессы

$$n + \nu \leftrightarrow p + e^-, \quad n + e^+ \leftrightarrow p + \bar{\nu}, \quad n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}. \tag{15.7.1}$$

(Здесь ν означает ν_e.) Во второй части вычисления перейдем к рассмотрению ядерных реакций, ведущих к синтезу гелия.

Плотности числа ν, $\bar{\nu}$, e^+ и e^- определяются теперь распределениями Ферми (15.6.3) с нулевыми химическими потенциалами и с различными температурами: T для $e^\pm$ (и γ) и T_ν для ν и $\bar{\nu}$:

$$n_{e^-}(p)\,dp = n_{e^+}(p)\,dp = 8\pi h^{-3} p^2\,dp \left[\exp\left(\frac{E_e(p)}{kT}\right) + 1\right]^{-1},$$

$$n_\nu(p)\,dp = n_{\tilde{\nu}}(p)\,dp = 4\pi h^{-3} p^2\,dp \left[\exp\left(\frac{E_\nu(p)}{kT_\nu}\right) + 1\right]^{-1}$$

где

$$E_e(p) = (p^2 + m_e^2)^{1/2}, \quad E_\nu(p) = p.$$

Скорости реакций (15.7.1) даются «V — A»-теорией слабых взаимодействий [1]) [109], за исключением того, что принцип Паули подав-

[1]) См., например, [183], стр. 29.

ляет эти скорости через множитель, равный доле всех незаполненных состояний:

$$1-\left[\exp\left(\frac{E_e}{kT}\right)+1\right]^{-1}=\left[1+\exp\left(\frac{-E_e}{kT}\right)\right]^{-1},$$
$$1-\left[\exp\left(\frac{E_\nu}{kT_\nu}\right)+1\right]^{-1}=\left[1+\exp\left(\frac{-E_\nu}{kT_\nu}\right)\right]^{-1}.$$

Итак, скорости процессов (15.7.1) (в расчете на нуклон) равны

$$\lambda(n+\nu\to p+e^-)=A\int dp_\nu v_e E_e^2 p_\nu^2 [e^{E_\nu/kT_\nu}+1]^{-1}[1+e^{-E_e/kT}]^{-1}, \tag{15.7.2}$$

$$\lambda(n+e^+\to p+\bar{\nu})=A\int dp_e E_\nu^2 p_e^2 [e^{E_e/kT}+1]^{-1}[1+e^{-E_\nu/kT_\nu}]^{-1}, \tag{15.7.3}$$

$$\lambda(n\to p+e^-+\bar{\nu})=A\int dp_\nu v_e E_\nu^2 E_e^2 [1+e^{-E_\nu/kT_\nu}]^{-1}[1+e^{-E_e/kT}]^{-1}, \tag{15.7.4}$$

$$\lambda(p+e^-\to n+\nu)=A\int dp_e E_\nu^2 p_e^2 [e^{E_e/kT}+1]^{-1}[1+e^{-E_\nu/kT_\nu}]^{-1}, \tag{15.7.5}$$

$$\lambda(p+\bar{\nu}\to n+e^+)=A\int dp_\nu v_e E_e^2 p_\nu^2 [e^{E_\nu/kT_\nu}+1]^{-1}[1+e^{-E_e/kT}]^{-1}, \tag{15.7.6}$$

$$\lambda(p+e^-+\bar{\nu}\to n)=A\int dp_\nu v_e E_e^2 p_\nu^2 [e^{E_e/kT}+1]^{-1}[e^{E_\nu/kT_\nu}+1]^{-1}. \tag{15.7.7}$$

Здесь A — постоянная, равная

$$A=\frac{g_V^2+3g_A^2}{2\pi^3\hbar^7}, \tag{15.7.8}$$

где g_V и g_A — постоянные векторного и аксиальновекторного взаимодействия нуклонов; здесь для них приняты значения

$$g_V=1{,}418\cdot10^{-49}\ \text{эрг}\cdot\text{см}^3,\quad g_A=1{,}18\,g_V. \tag{15.7.9}$$

Кроме того, E_e и E_ν связаны соотношениями

$$E_e-E_\nu=Q \text{ при } n+\nu\leftrightarrow p+e^-, \tag{15.7.10}$$
$$E_\nu-E_e=Q \text{ при } n+e^+\leftrightarrow p+\bar{\nu}, \tag{15.7.11}$$
$$E_\nu+E_e=Q \text{ при } n\leftrightarrow p+e^-+\bar{\nu}, \tag{15.7.12}$$

где

$$Q\equiv m_n-m_p=1{,}293\ \text{МэВ}. \tag{15.7.13}$$

Интегралы (15.7.2) — (15.7.7) берутся по тем *положительным* значениям p_ν и p_e, которые допускаются соотношениями (15.7.10)—(15.7.12). Весьма удобно записать все интегралы через переменную интегрирования q, такую, что $q \equiv E_\nu$ в (15.7.2), (15.7.4) и (15.7.5) и $q \equiv -E_\nu$ в (15.7.3), (15.7.6) и (15.7.7). После замены $p_e^2\, dp_e$ на $v_e E_e^2\, dE_e$ полные вероятности $n \to p$- и $p \to n$-переходов равны

$$\lambda(n \to p) \equiv \lambda(n + \nu \to p + e^-) + \lambda(n + e^+ \to p + \bar{\nu}) + \\ + \lambda(n \to p + e^- + \bar{\nu}) = A \int q^2\, dq \left(1 - \frac{m_e^2}{(Q+q)^2}\right)^{1/2} \times \\ \times (Q+q)^2 (1 + e^{q/kT_\nu})^{-1} (1 + e^{-(Q+q)/kT})^{-1}, \qquad (15.7.14)$$

$$\lambda(p \to n) \equiv \lambda(p + e^- \to n + \nu) + \lambda(p + \bar{\nu} \to n + e^+) + \\ + \lambda(p + e^- + \bar{\nu} \to n) = A \int dq\, q^2 \left(1 - \frac{m_e^2}{(Q+q)^2}\right)^{1/2} \times \\ \times (Q+q)^2 (1 + e^{-q/kT_\nu})^{-1} (1 + e^{(Q+q)/kT})^{-1}. \qquad (15.7.15)$$

Интегралы берутся теперь от $-\infty$ до $+\infty$, исключая промежуток от $-Q - m_e$ до $-Q + m_e$. Дифференциальное уравнение для X_n отношения числа нейтронов к числу всех нуклонов имеет вид

$$-\frac{dX_n}{\partial t} = \lambda(n \to p)\, X_n - \lambda(p \to n)\,(1 - X_n). \qquad (15.7.16)$$

Численное решение этого уравнения получено Пиблзом [187] [1]) и представлено в табл. 15.5. Хотя количественное поведение $X_n(t)$ может быть установлено только численным интегрированием, основные свойства этого решения можно получить из следующих качественных соображений:

А. При $kT \gg Q$ в (15.7.14), (15.7.15) можно положить $T = T_\nu$, $Q = 0$, $m_e = 0$. Тогда скорости переходов равны

$$\lambda(n \to p) \approx \lambda(p \to n) \approx A \int_{-\infty}^{\infty} q^4\, dq\, (1 + e^{-q/kT})^{-1} (1 + e^{q/kT})^{-1} = \\ = \frac{7}{15}\pi^4 A\, (kT)^5 = 0{,}361\ \text{с}^{-1} \left(\frac{T}{10^{10}\ \text{К}}\right)^5. \qquad (15.7.17)$$

Этот результат можно сравнить с «возрастом» t, определяемым равенствами (15.6.44) и (15.6.33):

$$t = 1{,}09\ \text{с} \left(\frac{T}{10^{10}\ \text{К}}\right)^{-2}. \qquad (15.7.18)$$

Мы видим, что $\lambda t > 10$ при $T \geqslant 3 \cdot 10^{10}$ К, и при этих температурах доля нейтронов X_n будет определяться равновесным решением

[1]) См. также [186].

Таблица 15.5

Доля нейтронов X_n как функция температуры или времени (без учета образования сложных ядер) *

T, К	t, с	X_n
10^{12}	0	0,496
$3\cdot10^{11}$	0,001129	0,488
10^{11}	0,01078	0,462
$3\cdot10^{10}$	0,1209	0,380
10^{10}	1,103	0,241
$3\cdot10^{9}$	13,83	0,170
$1{,}3\cdot10^{9}$	98 [a]	0,150
$1{,}2\cdot10^{9}$	119 [a]	0,147
$1{,}1\cdot10^{9}$	146 [a]	0,143
$1{,}0\cdot10^{9}$	182,0	0,137
$9\cdot10^{8}$	226 [a]	0,131
$8\cdot10^{8}$	290 [a]	0,123
$7\cdot10^{8}$	383 [a]	0,112
$3\cdot10^{8}$	2080	0,021
10^{8}	18700	10^{-8}

* Значения t взяты из работы [187]. Исключение составляют значения, помеченные буквой «а», которые интерполированы по результатам Пиблза. Значения X_n при $T \geqslant 1{,}0\times$ $\times 10^9$ К взяты из той же работы [187], а X_n при $T < 10^9$ К вычислены по значению X_n при $T = 10^9$ К в предположении, что X_n убывает экспоненциально со скоростью распада свободного нейтрона $(1013\ \text{с})^{-1}$.

уравнения (15.7.16), которое имеет вид

$$X_n \approx \frac{\lambda(p \to n)}{\lambda(p \to n) + \lambda(n \to p)}. \qquad (15.7.19)$$

Заметим, что выражение (15.7.17) не будет количественно точным, когда T спадет до $3\cdot10^{10}$ К, поскольку тогда kT ненамного больше, чем Q. Однако, несмотря на то что скорости $\lambda(p \to n)$ и $\lambda(n \to p)$ могут несколько отличаться от (15.7.17) и одна от другой, все же они при $T \gtrsim 3\cdot10^{10}$ К еще достаточно велики, чтобы использование равновесного решения (15.7.19) было оправданным.

Б. Пока $T_\nu \approx T$ (т. е. при $T > 10^{10}$ К), отношение вероятностей (15.7.14), (15.7.15) равно

$$\frac{\lambda(p \to n)}{\lambda(n \to p)} = \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right). \qquad (15.7.20)$$

Таким образом, формула (15.7.19) определяет содержание нейтронов при $T \geqslant 3 \cdot 10^{10}$ К как

$$X_n \approx [1 + e^{Q/kT}]^{-1}. \qquad (15.7.21)$$

Исходное содержание нейтронов в очень ранние периоды было равно $X_n \approx {}^1/_2$ и затем, медленно уменьшаясь по мере падения температуры, достигло значения $X_n \approx 0{,}38$ при $T = 3 \cdot 10^{10}$ К. Исключительно важное значение имеет тот факт, что начальное условие для уравнения (15.7.16) не может быть выбрано произвольным образом и не зависит от каких-либо деталей модели очень ранней Вселенной, а следует непосредственно из сингулярного поведения скоростей λ при $t \to 0$ [209].

В. Когда T падает до $\sim 1{,}3 \cdot 10^9$ К, скорости двух- и трехчастичных реакций $n + \nu \leftrightarrow p + e^-$, $n + e^+ \leftrightarrow p + \bar{\nu}$ и $p + e^- + \bar{\nu} \to n$ становятся пренебрежимо малыми. Остается только «одночастичный» процесс $n \to p + e^- + \bar{\nu}$, который при таких низких температурах происходит со скоростью распада свободного нейтрона; для последней здесь принимается значение, использованное Пиблзом [187]:

$$\lambda^{-1}(n \to p + e^- + \nu) = 1013 \text{ с}. \qquad (15.7.22)$$

Следовательно, содержание нейтронов с момента, когда $T \approx \approx 1{,}3 \cdot 10^9$ К, до начала нуклеосинтеза определяется функцией

$$X_n(t) = N \exp\left[-\frac{t\,(\text{с})}{1013}\right], \qquad (15.7.23)$$

где время t выражено в секундах. Единственный пункт в теории синтеза гелия, в котором действительно нужны подробные численные расчеты, это вычисление постоянной N. При этом удобно сначала игнорировать как распад нейтрона, так и нуклеосинтез; тогда содержание нейтронов есть функция $X_n{}^0(t)$, стремящаяся к конечному пределу при $t \to \infty$. (У Пиблза [187] в табл. 1 эта величина обозначается X_n. Кроме того, Пиблз не принимает во внимание процесс $p + e^- + \bar{\nu} \to n$, которым действительно можно пренебречь в течение всего рассматриваемого периода.) Распад нейтронов оказывает пренебрежимое влияние до $t \approx 20$ с, тогда как после этого времени температура становится ниже $3 \cdot 10^9$ К и скорость $\lambda(p \to n)$ становится исчезающе малой по сравнению с $\lambda(n \to p)$, а вырождение лептонов мало влияет на скорость распада нейтронов. Отсюда следует, что весь эффект распада нейтронов учитывается умножением $X_n{}^0(t)$ на экспоненциальный распадный множитель:

$$X_n(t) \approx X_n^{(0)}(t) \exp\left[-\frac{t\,(\text{с})}{1013}\right]. \qquad (15.7.24)$$

Пиблз [187] нашел, что $X_n^{(0)}$ стремится к значению 0,1640 при $t \to \infty$; отсюда, сравнивая (15.7.23) с (15.7.24), получаем

$$N \approx X_n^{(0)}(\infty) = 0{,}1640. \tag{15.7.25}$$

Теперь мы можем перейти ко второй части нашего расчета и ввести рассмотренные ядерные реакции, ведущие к синтезу сложных ядер. В ранние периоды, когда $T \gg 10^{10}$ К, различные ядра были в тепловом равновесии, причем плотность числа ядер i-го типа n_i определялась выражением (15.6.3). Поскольку ядра были существенно нерелятивистскими и невырожденными в течение всего интересующего нас времени, можно воспользоваться максвелл-больцмановским приближением к (15.6.3) и написать для полной плотности числа ядер i-го типа

$$n_i = 4\pi g_i h^{-3} \exp\left\{\frac{\mu_i - m_i}{kT}\right\} \int_0^\infty q^2\, dq \exp\left\{-\frac{q^2}{2m_i kT}\right\} =$$

$$= g_i \left(\frac{2\pi m_i kT}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left\{\frac{\mu_i - m_i}{kT}\right\}. \tag{15.7.26}$$

Разумеется, нам не даны химические потенциалы μ_i, но мы знаем, что они сохраняются во всех реакциях. Отсюда, если вследствие ядерных реакций быстро образуется ядро i из Z_i протонов и $A_i - Z_i$ нейтронов, то

$$\mu_i = Z_i \mu_p + (A_i - Z_i)\, \mu_n \tag{15.7.27}$$

Удобно представить (15.7.26) как соотношение между весовыми долями i-х ядер, *свободных* нейтронов и *свободных* протонов:

$$X_i \equiv \frac{n_i A_i}{n_N}, \qquad X_n \equiv \frac{n_n}{n_N}, \qquad X_p \equiv \frac{n_p}{n_N},$$

где n_N — полная плотность нуклонов, *связанных и свободных*:

$$n_N = n_{N0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \frac{\rho_{N0}}{m_N}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3.$$

Тогда, пользуясь (15.7.27) и полагая приближенно $m_p = m_n = m_N$ и $m_i = A_i m_N$ в степени $^3/_2$ в (15.7.26), получаем

$$X_i = \frac{1}{2} X_p{}^{Z_i} X_n{}^{A_i - Z_i} g_i A_i{}^{1/2} \varepsilon^{A_i - 1} \exp\left(\frac{B_i}{kT}\right), \tag{15.7.28}$$

где B_i — энергия связи:

$$-B_i \equiv m_i - Z_i m_p - (A_i - Z_i)\, m_n \tag{15.7.29}$$

и ε — безразмерная величина:

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{2} h^3 n_N (2\pi m_N kT)^{-3/2} =$$

$$= 1{,}61 \cdot 10^{-12} \left(\frac{\rho_{N0}}{10^{-30}\ \text{г/см}^3}\right)\left(\frac{R}{10^{-10} R_0}\right)^{-3}\left(\frac{T}{10^{10}\ \text{К}}\right)^{-3/2}. \tag{15.7.30}$$

Ввиду крайней малости ε в рассматриваемый период содержание данного сложного ядра i будет очень малым, пока температура T не упадет до значения

$$T_i \approx \frac{B_i}{k(A_i-1)\,|\ln \varepsilon|}. \qquad (15.7.31)$$

В табл. 15.6 даны значения T_i для различных ядер и для различных нынешних значений их плотности ρ_{N0}. Отметим, что T_i очень

Таблица 15.6

Температура T_i, определенная для различных ядер и различных значений современной плотности ρ_{N0} *

Ядро	$\frac{B}{k(A-1)}$, 10^9 К	T_i, 10^9 К		
		$\rho_{N0}=10^{-29}$ г/см^3	$\rho_{N0}=10^{-30}$ г/см^3	$\rho_{N0}=10^{-31}$ г/см^3
H^2	25,8	0,83	0,77	0,72
H^3	49,3	1,6	1,5	1,4
He^3	44,6	1,4	1,3	1,2
He^4 и т. д.	109	3,9	3,6	3,3

* Для более тяжелых ядер значения T_i примерно те же, что и для He^4. При тепловом равновесии температура T_i — это максимальная температура, при которой ядра i-го сорта могут существовать в заметном количестве.

слабо зависит от современной плотности ρ_{N0}, поскольку ρ_{N0} входит только в величину $|\ln \varepsilon|$, которая принимает значения между 25 и 35 во всей области рассматриваемых температур и плотностей.

Если бы содержания ядер при температурах порядка 10^9 К и ниже действительно определялись условием теплового равновесия, то, согласно табл. 15.6, следовало бы ожидать, что первыми появятся He^4 и более тяжелые ядра, сопровождаемые He^3, H^3 и, наконец, H^2. Однако из-за того, что ниже 10^9 К тепловое равновесие уже *не поддерживается*, на самом деле происходит вовсе не это. Плотности частиц во все времена, кроме очень ранних, слишком малы, чтобы ядра могли образоваться непосредственно в многочастичных столкновениях типа $2n + 2p \to He^4$. Вместо этого сложные ядра должны образоваться в последовательных *двухчастичных* реакциях, таких, как

$$\begin{gathered} p + n \leftrightarrow d + \gamma, \\ d + d \leftrightarrow He^3 + n \leftrightarrow H^3 + p, \\ H^3 + d \leftrightarrow He^4 + n \text{ и т. д.} \end{gathered} \qquad (15.7.32)$$

Первый шаг не представляет никакой трудности, скорость образования дейтерия в расчете на один свободный нейтрон равна

$$\lambda_d = (4{,}55 \cdot 10^{-20}\ \text{см}^3/\text{с})\, n_p =$$

$$= 27{,}4\ \text{с}^{-1} \left(\frac{R}{10^{-9} R_0}\right)^{-3} \left(\frac{\rho_{N0}}{10^{-30}\ \text{г/см}^3}\right) X_p, \qquad (15.7.33)$$

и она настолько больше скорости расширения $1/t$ [см. (15.7.18)], что должно иметь место равновесное содержание дейтронов вида (15.7.28):

$$X_d = \frac{3}{\sqrt{2}} X_p X_n \varepsilon \exp\left(\frac{B_d}{kT}\right). \qquad (15.7.34)$$

Однако, пока это равновесное содержание дейтерия достаточно велико для того, чтобы реакции $d - d$, $d - p$ и $d - n$ могли происходить с одинаковыми скоростями, не может образоваться сколько-нибудь заметного количества H^3, He^3, He^4 или более тяжелых ядер. Согласно табл. 15.6, равновесное содержание дейтерия (15.7.34) очень мало, если $T > 0{,}8 \cdot 10^9$ К. Таким образом, низкая энергия связи дейтерия служит как бы «бутылочным горлышком», задерживающим образование сложных ядер, пока T не снизится до $0{,}8 \cdot 10^9$ К, или чуть раньше в моделях с относительно высокой плотностью барионов.

Как только нуклеосинтез начинается, он протекает очень быстро, поскольку, согласно табл. 15.6, всякая температура ниже $1{,}2 \cdot 10^9$ К уже слишком низка, чтобы допустить высокую концентрацию ядер тяжелее дейтрона. Однако образование значительных количеств элементов тяжелее гелия в действительности невозможно, так как упомянутое выше отсутствие стабильных ядер с $A = 5$ и с $A = 8$ задерживает нуклеосинтез через $n - \alpha$-, $p - \alpha$- или $\alpha - \alpha$-столкновения, а в то же время кулоновский барьер в реакциях $He^4 + H^3 \to Li^7 + \gamma$ и $He^4 + He^3 \to Be^7 + \gamma$ препятствует им эффективно конкурировать с реакциями $p + H^3 \to He^4 + \gamma$ или $n + He^3 \to He^4 + \gamma$. Таким образом, роль реакций (15.7.32) будет состоять в быстром связывании всех имеющихся нейтронов в ядра He^4, которые имеют наиболее высокую энергию связи среди всех ядер с $A < 5$.

Проследить процесс нуклеосинтеза в деталях можно, только численно интегрируя большое число уравнений для скоростей реакций. Это было проделано Пиблзом [187] для реакций (15.7.32) и Вагонером, Фаулером и Хойлом [210] для реакций (15.7.32) совместно с радиационными процессами

$$p + d \leftrightarrow He^3 + \gamma, \quad n + d \leftrightarrow H^3 + \gamma, \quad p + H^3 \leftrightarrow He^4 + \gamma,$$
$$n + He^3 \leftrightarrow He^4 + \gamma, \quad d + d \leftrightarrow He^4 + \gamma \qquad (15.7.35)$$

и с большим числом других процессов, приводящих (с малой вероятностью) к более тяжелым ядрам вплоть до Mg^{24}. К счастью,

ни один из этих процессов не имеет значения для нашей основной проблемы — объяснения содержания гелия. Во всех процессах, происходящих вследствие сильных и электромагнитных взаимодействий, таких, как реакции (15.7.32) и (15.7.35), сохраняется полное число протонов и нейтронов. Единственное влияние нуклеосинтеза на нейтрон-протонное отношение состоит в том, что, прекращая распад свободных нейтронов, он замораживает это отношение при том значении, которое было непосредственно перед началом нуклеосинтеза. До начала нуклеосинтеза отношение числа нейтронов к числу всех нуклонов равно просто величине X_n, определяемой формулой (15.7.23). По окончании нуклеосинтеза остаются только свободные протоны и ядра He^4, и, следовательно, доля нейтронов в общем числе нуклонов равна половине доли всех нуклонов, связанных в гелий, или половине весового содержания гелия. Таким образом, весовое содержание образовавшегося космологически гелия равно

$$Y \equiv X_{He^4} \text{ (после нуклеосинтеза)} = \\ = 2X_n \text{ (непосредственно перед нуклеосинтезом).} \quad (15.7.36)$$

Согласно детальным вычислениям Пиблза, нуклеосинтез начинается внезапно при $T = 0{,}9 \cdot 10^9$ К, если $\rho_{N0} = 7 \cdot 10^{-31}$ г/см^3, или при $T = 1{,}1 \cdot 10^9$ К, если $\rho_{N0} = 1{,}8 \cdot 10^{-29}$ г/см^3, как раз около тех значений, которых следовало ожидать из наших качественных рассуждений. Используя (15.7.36), мы можем для этих двух значений нынешней плотности получить из (15.7.23) или из табл. 15.5 соответственно два значения весового содержания гелия — 26,2 или 28,6%. (На самом деле у Пиблза [187] для этих двух случаев значения равны 25,8 и 28,2%. Это очень небольшое расхождение связано с распадом небольшого числа свободных нейтронов в ходе нуклеосинтеза.) Выражаясь достаточно осторожно, можно сказать, что в классе космологических моделей, рассматриваемом здесь, 27% весового содержания гелия имеют космологическое происхождение при любом разумном значении нынешней плотности. Причина, по которой содержание гелия столь нечувствительно к плотности числа барионов, заключается в том, что до нуклеосинтеза нейтрон-протонное отношение определялось взаимодействием с огромным числом лептонов, а не взаимодействием между самими нуклонами, в то время как момент начала нуклеосинтеза определялся температурой, а не плотностью числа нуклонов.

Вагонер, Фаулер и Хойл [210] вычислили космологически возникшие содержания не только для изотопов водорода и гелия, но также и для Li^7 и более тяжелых элементов. Их результаты приведены в табл. 15.7. Заметим, что содержание всех ядер, кроме H^1 и He^4, крайне мало, так что образование или распад этих ядер в звездах могли бы иметь серьезное влияние на их наблю-

Таблица 15.7

Содержание (по массе) различных ядер космологического происхождения при разных значениях современной плотности ρ_{N0} (в г/см^3; от 10^{-31} до $3{,}1\cdot10^{-28}$), вычисленное в предположении, что современная температура реликтового излучения равна 3 К ([210], табл. 3А и 3В)

	10^{-31}	$3{,}1\cdot10^{-31}$	10^{-30}	$3{,}1\cdot10^{-30}$
H^1	0,763	0,748	0,737	0,728
H^2	$6{,}2\cdot10^{-4}$	$8{,}9\cdot10^{-5}$	$2{,}3\cdot10^{-5}$	$2{,}7\cdot10^{-7}$
He^3	$6{,}3\cdot10^{-5}$	$3{,}8\cdot10^{-5}$	$2{,}1\cdot10^{-5}$	$9{,}9\cdot10^{-6}$
He^4	0,236	0,252	0,263	0,272
Li^7	$5{,}2\cdot10^{-10}$	$2{,}1\cdot10^{-10}$	$4{,}4\cdot10^{-9}$	$2{,}1\cdot10^{-8}$
Прочие	$<10^{-12}$	$<10^{-12}$	$<10^{-12}$	$<10^{-12}$
	10^{-29}	$3{,}1\cdot10^{-29}$	10^{-28}	$3{,}1\cdot10^{-28}$
H^1	0,719	0,709	0,701	0,691
H^2	$2{,}5\cdot10^{-12}$	$<10^{-12}$	$<10^{-12}$	$<10^{-12}$
He^3	$5{,}6\cdot10^{-6}$	$4{,}4\cdot10^{-6}$	$3{,}5\cdot10^{-6}$	$2{,}4\cdot10^{-6}$
He^4	0,281	0,291	0,299	0,309
Li^7	$4{,}3\cdot10^{-8}$	$1{,}1\cdot10^{-7}$	$2{,}9\cdot10^{-7}$	$6{,}8\cdot10^{-7}$
Прочие	$<10^{-12}$	$6\cdot10^{-12}$	$1{,}0\cdot10^{-10}$	$1{,}9\cdot10^{-9}$

даемые «космические» содержания. По этой причине пробным камнем для моделей ранней Вселенной в первую очередь служит именно космическое содержание He^4. (Однако Гейсс и Ривз [211] утверждают, что H^2 и He^3, наблюдаемые в Солнечной системе, образовались в действительности в ранней Вселенной. Если это верно, то космическая плотность должна быть довольно низкой, т. е. современное ее значение должно быть порядка $3\cdot10^{-31}$ г/см^3 для того, чтобы реакции, в которых He^4 образуется из H^2 и He^3, прервались до исчерпания последних.)

Имеется довольно много различных методов, с помощью которых может быть измерено содержание гелия в различных частях Вселенной.

А. Массы и светимости звезд. Теория строения и эволюции звезд (см., например, [212—214]) позволяет в принципе (и даже на практике) вычислить светимость звезды L как функцию времени, если даны ее масса M и исходный химический состав. Химический состав, как правило, задается тремя числами X, Y, Z, определяемыми обычно как весовые доли H^1, He^4 и всего остальных

ного, так что

$$X + Y + Z = 1.$$

(Содержание тяжелых элементов Z хотя и мало, но является важным параметром для всякой звезды, находящейся в радиационном равновесии, т. е. такой, как, например, Солнце, поскольку оно определяет прозрачность звезды при данных плотности и температуре. Содержание гелия Y важно, так как от него зависит средний молекулярный вес, входящий в уравнение состояния идеального газа.) Если мы сделаем допущения еще и относительно Z и возраста звезды, то сравнение теории с измеренными значениями M и L позволит нам вычислить Y.

Из звезд лучше всех изучено, конечно, Солнце. Его масса и светимость известны весьма точно, а его возраст считается близким к возрасту Земли, т. е. около $4{,}5 \cdot 10^9$ лет. По линиям поглощения водорода и тяжелых элементов было оценено [215], что в солнечной фотосфере $Z/X \approx 0{,}026 - 0{,}027$, хотя в более поздних работах [216, 217] приводится значение $Z/X \approx 0{,}019$. (К сожалению, линии гелия слишком слабы и не позволяют измерить этим методом Y/X для Солнца.) Обычно расчеты по эволюции Солнца проводятся для значений Z в интервале от 0,01 до 0,04. В период открытия космического микроволнового излучения лучшие модели Солнца [218—220] давали для солнечного гелия $Y = 0{,}27$ при $Z = 0{,}02$ (или $Y = 0{,}32$ при $Z = 0{,}04$) и как большой успех космологии «большого взрыва» рассматривался тот факт, что из этого значения при $T_{\nu 0} \approx 3$ К получалось содержание первичного гелия, равное $Y \approx 0{,}27$.

К сожалению, пребывание в этом счастливом состоянии продолжалось лишь до появления нейтринной астрономии. Те же модели Солнца, которые использовались для вычисления Y, можно применить также для предсказания потока нейтрино от различных ядерных реакций в Солнце. Солнце получает свою энергию от слияния водорода в гелий в протон-протонном цикле, начинающемся с реакций

$$\mathrm{H}^1 + \mathrm{H}^1 \to \mathrm{H}^2 + e^+ + \nu \quad (\bar{E}_\nu = 0{,}263 \text{ МэВ}),$$

$$\mathrm{H}^1 + \mathrm{H}^1 + e^- \to \mathrm{H}^2 + \nu \quad (\bar{E}_\nu = 1{,}4 \text{ МэВ}),$$

$$\mathrm{H}^2 + \mathrm{H}^1 \to \mathrm{He}^3 + \gamma.$$

Цикл может завершиться ветвью «PP I»

$$\mathrm{He}^3 + \mathrm{He}^3 \to \mathrm{He}^4 + 2\mathrm{H}^1,$$

или же в реакции

$$\mathrm{He}^3 + \mathrm{He}^4 \to \mathrm{Be}^7 + \gamma$$

может образоваться Be^7. В последнем случае одно ядро Be^7 и один протон превращаются в два ядра He^4 по ветви «PP II»:

$$Be^7 + e^- \to Li^7 + \nu \qquad (\bar{E}_\nu = 0{,}80 \text{ МэВ}),$$
$$Li^7 + H^1 \to He^4 + He^4$$

или по ветви «PP III»:

$$Be^7 + H^1 \to B^8 + \gamma,$$
$$B^8 \to Be^8 + e^+ + \nu \qquad (\bar{E}_\nu = 7{,}2 \text{ МэВ}),$$
$$Be^8 \to 2He^4.$$

(В скобках даны средние энергии нейтрино.) Понтекорво [221] и Альварец [222] предположили, что эти нейтрино детектировались в Cl^{37} через эндотермическую реакцию

$$\nu + Cl^{37} \to e^- + Ar^{37}. \qquad (15.7.37)$$

Ar^{37} распадается через электронный захват с периодом полураспада 35 дней и мог бы быть обнаружен по своей радиоактивности после химического разделения. Бакал [223] заметил, что энергичные нейтрино от бета-распада B^8 особенно эффективны в реакции (15.7.37), так как они могут индуцировать сверхразрешенные переходы в возбужденные состояния Ar^{37}. Поэтому, хотя ветвь PPII намного более важна, чем ветвь PPIII, все же можно ожидать, что около 90% событий поглощения нейтрино в Cl^{37} дают нейтрино от B^8 и только около 10% — от Be^7. Пользуясь имеющимися моделями Солнца [218—220] с $Y = 0{,}27$, Бакал [223] подсчитал, что скорость захвата нейтрино на Земле равна $(4 \pm 2) \cdot 10^{-35}$ $с^{-1}$ на один атом Cl^{37}. Дэвис [224] предпринял измерение этой вероятности в золотодобывающей шахте Хоумстэйк в Лиде, Южная Дакота, используя 100 000 галонов перхлорэтилена C_2Cl_4, известной жидкости, применяемой для химчистки. В 1968 г. Дэвис и др. [225] заявили, что им не удалось детектировать какие-либо солнечные нейтрино и что достигнутый ими верхний предел скорости поглощения равен $0{,}3 \cdot 10^{-35}$ $с^{-1}$ на атом Cl^{37}, т. е. примерно на порядок меньше того, что ожидалось первоначально! Это расхождение между теорией и наблюдением, которое появилось в первом же эксперименте, позволившем заглянуть внутрь Солнца, поколебало доверие к принятым моделям Солнца и к тем значениям исходного содержания гелия на Солнце, которые эти модели давали. Излишне говорить, что была проделана большая работа по пересчету ожидаемых нейтринных потоков с использованием уточненных значений для прозрачности Солнца и скоростей различных ядерных реакций. В статье, сопровождающей заметку Дэвиса и др. [225], Бакал и др. [226] [1]) привели

[1]) См. также [227, 228].

оценку $(0{,}75 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-35}$ с$^{-1}$ на атом Cl^{37} для вероятности поглощения при $Z = 0{,}015$, которая все же вдвое больше, чем нужно. Вычисления на ЭВМ в университете Беркли с использованием математической программы, определяющей структуру звезд, дали несколько большие скорости [229]. Ибен [230] отметил, что величины Y и скорость поглощения нейтрино являются растущими функциями Z и что минимум скорости поглощения, достигаемый при $Z = 0$ и $Y \approx 0{,}17$, находится как раз где-то около верхнего предела Дэвиса и др. Последнее вычисление Бакалла и Ульриха [231] дает скорость отсчетов $(0{,}9 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-35}$ с$^{-1}$ на атом Cl^{37}.

В то же время группа Дэвиса продолжала свои наблюдения и недавно сообщила о скорости отсчетов $(0{,}15 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-35}$ с$^{-1}$ на атом Cl^{37} [232], т. е. о скорости, в 6 раз меньшей теоретических ожиданий. Ввиду такого расхождения вопрос об исходном содержании гелия на Солнце в настоящее время должен считаться нерешенным [1]).

Массы и светимости известны также для некоторого числа ближайших звезд населения типа I, принадлежащих к двойным системам. Сравнение этих значений M и L с теоретическим M — L-соотношением, зависящим от Y, приводит обычно к значениям для Y между 0,25 и 0,35 [2]). Было бы очень интересно провести такой анализ для звезд населения типа II, поскольку они составляют более раннее звездное поколение, а также в связи с тем, что нейтринный эксперимент Дэвиса поколебал наше доверие к теории звезд населения типа I. К несчастью, вблизи Солнца очень мало звезд населения типа II. Одна из них, μ Кассиопеи A, принадлежит двойной системе, диаметр которой был измерен недавно весьма остроумным методом [234]. Найденная в результате масса вместе с наблюдаемыми значениями L и Z/X не согласуется с теорией [235] *ни при каком* значении Y, но наилучшее приближение получается при низком содержании гелия: $Y \leqslant 0{,}05$. Однако обоснованность этого определения массы с тех пор подвергалась сомнению [236].

Б. Прямые солнечные измерения. Есть несколько методов оценки современного содержания гелия на Солнце, которые не основаны на какой-либо конкретной теории строения и эволюции Солнца. Измерения отношения Y/Z в солнечных космических лучах [237] вместе с упомянутым выше спектроскопическим определением Z/X в фотосфере Солнца приводят к содержанию гелия Y от 0,20 до 0,26 [216, 217, 238]. В период спокойного Солнца отношение He^4/H в солнечном ветре дает $Y \approx 0{,}15$ [239—241], во время магнитных бурь содержание гелия в солнечном ветре примерно

---

[1]) Однако и эти данные, по-видимому, не подтвердились, так что до сих пор (лето 1975 г.) нейтрино от Солнца не были зарегистрированы.—*Прим. ред.*

[2]) Подробные ссылки см. в [233].

удваивается [241]. К сожалению, поверхность Солнца слишком холодна для спектроскопического определения Y, но из наблюдения солнечных протуберанцев получается $Y \approx 0{,}38$ [242].

В. Шаровые скопления. Теория. В § 3 этой главы уже упоминалось, что из сравнения числа звезд в различных областях диаграмм Герцшпрунга — Рассела для шаровых скоплений получаются результаты как о возрасте этих скоплений, так и об исходном содержании гелия в них. Ибен [49] (см. также [50]) выводит значения Y от 0,24 до 0,33, соответствующие возрасту от $18 \cdot 10^9$ лет до $9 \cdot 10^9$ лет. Сравнение теории пульсации звезд Кристи [243] с местоположением переменных звезд на диаграммах Герцшпрунга — Рассела шаровых скоплений M3, M15, M92 дает для этих скоплений значения Y от 0,26 до 0,32 [244, 245]. Этим исследованиям придают особое значение, поскольку считается, что шаровые скопления относятся к числу первых объектов, которые конденсировались в первичном газе из водорода и гелия.

Г. Спектры звезд. Линии гелия можно наблюдать в фотосферах большого числа горячих звезд обоих типов населений. Обычно наблюдается высокое содержание гелия: $Y/X \approx 0{,}4$, а некоторые звезды явно насыщены гелием. Вместе с тем есть несколько классов старых звезд, линии гелия которых аномально слабы; к ним относятся голубые звезды населения типа II на горизонтальной ветви диаграммы Герцшпрунга — Рассела шаровых скоплений [246]. Одна из звезд с низким содержанием гелия, Центавр A, выделяется тем, что бóльшая часть гелия в ней состоит из изотопа He^3! Планетарные туманности и новые, по-видимому, сильно насыщены гелием [1]).

Д. Спектроскопия межзвездного вещества. По линиям излучения оптических частот из областей H II в Галактике неизменно получается отношение чисел атомов водорода и гелия в интервале 0,10—0,14 (см. ссылки в [233]), что соответствует содержанию гелия по весу $Y \approx 0{,}27$—$0{,}36$. Кроме того, можно наблюдать рекомбинацию ионизованного гелия на *радиочастотах* (см. обзор [248]): излучение, испускаемое при переходе $n + 1 \to n$, имеет при $n \gg 1$ длину волны, пропорциональную n^3, так что переходы с $n \approx 100$ имеют длины волн порядка сантиметров. Отношения чисел атомов водорода и гелия, полученные из радионаблюдений межзвездного вещества, находятся между 0,06 и 0,16, что соответствует $0{,}14 \leqslant Y \leqslant 0{,}40$ (см. ссылки в [233]).

Е. Внегалактические измерения. Линии излучения гелия, наблюдаемые в областях H II галактик, расположенных в преде-

[1]) Результаты по планетарным туманностям подытожены в [247], а подробные ссылки по новым можно найти в [233].

лах и вне Местной Группы, свидетельствуют о таком же содержании гелия, что и в областях H II в нашей Галактике. Напротив, линии гелия квазаров удивительно слабы (см. ссылки в [233]).

Очевидно, имеется большая совокупность фактов в пользу того, что весовое содержание гелия во Вселенной не слишком отличается от предсказываемых 27%. К несчастью, имеется также значительное число признаков того, что содержание гелия много меньше. Внесение ясности в эту проблему имело бы наибольшее значение для космологии, поскольку только гелий космологического происхождения и 2,7-градусный фон излучения еще остались реликтами первоначального огненного шара и могут служить ключом к тайнам ранней истории Вселенной.

Чтобы сохранить объективность в вопросе о синтезе элементов в ранней Вселенной, полезно рассмотреть возможные модификации теории, физические или астрономические, которые могли повлиять на представления об образовании гелия.

А. Холодные модели. Если бы оказалось, что наблюдаемый микроволновый фон не является излучением черного тела, оставшимся от ранней Вселенной, то нам пришлось бы столкнуться с возможностью, что современная температура $T_{\gamma 0}$ черного тела много меньше чем 2,7 К. (В этом случае плотность барионов при любой данной температуре в прошлом была бы много больше, чем предполагалось выше, с соответствующим ростом скоростей ядерных реакций и содержания сложных ядер, образовавшихся в ранней Вселенной.) Именно высокое содержание гелия, получающееся в этих холодных моделях, привело Гамова с сотр. [102—105] к предположению о существовании горячего фона излучения.

Б. Быстрые и медленные модели. Различные механизмы могли увеличить или уменьшить скорость расширения. В частности, если бы Вселенная содержала другие безмассовые частицы с тепловым распределением, такие, как гравитоны, скалярные частицы Бранса — Дикке или новые типы нейтрино, то плотность энергии при данной температуре была бы больше и, согласно (15.6.44), время, необходимое для достижения данной температуры, оказалось бы меньшим. Скорость образования дейтрона на один свободный нейтрон больше относительной скорости расширения при $T = 10^9$ К от 10 до 1000 раз (при современной плотности от 10^{-31} до 10^{-29} г/см^3), и поэтому при умеренном сокращении временной шкалы времени будет с избытком для того, чтобы при $T \approx 10^9$ К произошел нуклеосинтез. В этом случае единственным эффектом более быстрого расширения будет уменьшение времени на конверсию нейтронов в протоны, а следовательно, доля нейтронов при 10^9 К будет ближе к первоначальному значению $^1/_2$ и образуется больше гелия. Однако если бы временная шкала была предельно

короткой, то не хватило бы времени для образования сложных ядер до того, как плотность (а для образования He^3 и He^4 также и температура) упала слишком низко. Подробные вычисления Пиблза (см. рис. 1 и 2 в работе [187] [1])) показывают, что при $T_{\gamma 0} = 3$ К и $7 \cdot 10^{-31}$ г/см$^3 \leqslant \rho_0 \leqslant 1{,}8 \cdot 10^{-29}$ г/см^3 содержание He^4 возрастает при сокращении временной шкалы и достигает максимума в 60—80% (по весу), когда шкала сокращается в 10—100 раз, а затем снова становится меньше. Содержание дейтеронов при этом продолжает расти, достигая максимума около 9% (по массе) при сокращении шкалы от 300 до 3000 раз. Наоборот, если бы временная шкала расширения каким-то образом *удлинилась*, единственным эффектом был бы распад большого числа нейтронов и соответственно образование меньшего количества гелия.

В. Электрон-нейтринные взаимодействия. В предыдущем параграфе температурная история ранней Вселенной была разработана в предположении, что электронные и мюонные нейтрино теряют тепловой контакт с плазмой, состоящей из $e^{\pm}$ и γ, до начала аннигиляции $e^+ - e^-$. По-видимому, это предположение справедливо, если электрон-нейтринное рассеяние происходит вследствие того же слабого ферми-взаимодействия и с той же силой, что и ядерный бета-распад или распад мюона. Однако электрон-нейтринное взаимодействие еще не исследовано экспериментально, и оно может оказаться сильнее, чем ожидается (см., например, [250]). В этом случае ν_e и $\bar{\nu}_e$ (а, возможно, также ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$) могли бы оставаться в тепловом равновесии с $e^+ - e^-$ — γ-плазмой вплоть до того момента, когда почти все пары $e^+ - e^-$ уже аннигилировали. Результатом было бы увеличение плотности энергии при любой данной температуре и исчезновение различия между T_ν и T в скоростях $\lambda\,(n \to p)$ и $\lambda\,(p \to n)$. Детальные вычисления [251] показывают, что если бы электронные нейтрино оставались в тепловом равновесии до синтеза гелия, то содержание «космологического» гелия было бы 29% вместо 27.

Г. Вырождение нейтрино или антинейтрино. Интересно также рассмотреть влияние вырождения ν_e или $\bar{\nu}_e$ на содержание гелия. Один эффект состоит в ускорении расширения с ростом вырождения. Кроме того, отсутствие равновесия между нейтрино и антинейтрино повлияло бы на относительное содержание протонов и нейтронов. Разность между химическими потенциалами нейтронов и протонов в тепловом равновесии определяется уравнением (15.6.4)

$$\mu_n - \mu_p = \mu_{e^-} - \mu_{\nu_e}$$

В предыдущем параграфе мы видели, что в интересующий нас период химический потенциал μ_{e^-} должен быть пренебрежимо

[1]) См. также [249].

мал, чтобы не нарушалась нейтральность заряда, тогда как μ_{ν_e}/kT равно постоянной ν ($|\nu| \leqslant 45$):

$$\mu_{e^-} \approx 0, \qquad \mu_{\nu_e} \approx \nu kT.$$

Равновесная доля нейтронов дается тогда выражением (15.7.19)

$$X_n \equiv \frac{n_n}{n_p + n_n} = \left[1 + \exp\left(\nu + \frac{Q}{kT}\right)\right]^{-1},$$

где $Q \equiv m_n - m_p$. Таким образом, если постоянная ν велика и положительна, доля нейтронов оказывается малой с самого начала и потому нуклеосинтез невелик. Если ν — небольшая отрицательная величина, скажем $\nu \approx -1$, то начальная доля нейтронов велика, так что после того как некоторые нейтроны превратятся в протоны, доля нейтронов к моменту «включения» нуклеосинтеза может оказаться близкой к оптимальному значению 50% и, по существу, все вещество во Вселенной может перейти в гелий. Если ν — большая отрицательная величина, то начальное содержание нейтронов предельно велико и никакого нуклеосинтеза быть не может, пока часть нейтронов не распадется, но к этому времени плотность нуклонов будет слишком низкой, чтобы мог произойти синтез большого количества сложных ядер. Детальные расчеты содержания H^2, He^3, He^4 и Li^7 как функции ν с учетом влияния вырождения нейтрино или антинейтрино на скорости (15.7.2)—(15.7.7) были проведены Вагонером, Фаулером и Хойлом. Эти расчеты показывают ([210], рис. 5а, 5в), что содержание космологически образовавшегося гелия будет заметно меньше 1%, если «недостающая масса» состоит из вырожденных нейтрино или антинейтрино с $|\nu| \approx 30$. С другой стороны, если плотность лептонов во Вселенной N_E того же порядка, что и плотность барионов N_B, то из (15.6.52) следует, что $|\nu| \approx 1/\sigma$, т. е. около 10^{-9} [см. (15.5.15)]. В этом случае небольшой избыток нейтрино или антинейтрино не оказывает заметного влияния на синтез гелия.

Одно заключительное предостережение: если бы даже было установлено высокое космическое содержание гелия, отсюда еще не следовало бы с необходимостью, что этот гелий образовался в ранней Вселенной. Дж. Бэрбидж [252] подчеркивал, в частности, возможность того, что гелий мог быть синтезирован в раннюю, более яркую фазу истории Галактики, например в массивных галактических объектах. Значительная часть вычислений, рассмотренных в настоящем параграфе, применима также к нуклеосинтезу при коллапсе массивных звезд ([210], разд. VII).

§ 8. Образование галактик

В предыдущих двух параграфах мы рассматривали такие две составные части современной Вселенной — гелий и микроволновый фон, которые, вероятно, являются реликтами более ранней

эры космической истории. Обозревая ночное небо, мы видим еще один возможный реликт — скучивание звезд в скопления, галактики и скопления галактик. Естественно интерпретировать это скучивание как действие гравитационного притяжения на первоначально однородное рассеянное вещество — мысль, которая была впервые высказана еще Ньютоном в его знаменитом письме д-ру Ричарду Бентли [253]. К сожалению, у нас нет пока даже пробной количественной теории образования галактик, хоть сколько-нибудь близкой по полноте и правдоподобию нашим теориям происхождения космического содержания гелия и микроволнового излучения.

Первую серьезную теорию образования галактик предложил сэр Джеймс Джинс в начале нашего столетия [254]. Джинс предположил, что Вселенная заполнена нерелятивистской жидкостью с плотностью ρ, давлением p, скоростью $\mathbf{v}$ и гравитационным полем $\mathbf{g}$, подчиняющимися уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{15.8.1}$$

уравнению Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} \tag{15.8.2}$$

и уравнениям гравитационного поля

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0, \tag{15.8.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho. \tag{15.8.4}$$

В качестве невозмущенного «решения» берется решение для статической однородной жидкости без учета гравитации:

$$\rho = \text{const}, \qquad p = \text{const}, \qquad \mathbf{v} = 0.$$

Если добавить малые возмущения ρ_1, p_1, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{g}_1$, то с точностью до первого порядка из (15.8.1) — (15.8.4) получается

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{v_s^2}{\rho}\nabla \rho_1 + \mathbf{g}_1,$$

$$\nabla \times \mathbf{g}_1 = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{g}_1 = -4\pi G\rho_1,$$

где v_s — скорость звука:

$$v_s^2 = \frac{p_1}{\rho_1} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{ад}},$$

а все величины без индекса 1 относятся к невозмущенному «решению». Комбинируя эти уравнения, получаем дифференциальное

уравнение для ρ_1:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t_2} = v_s^2 \nabla^2 \rho_1 + 4\pi G \rho \rho_1,$$

решение которого имеет вид

$$\rho_1 \sim \exp\{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t\}, \tag{15.8.5}$$

причем ω и $\mathbf{k}$ связаны «дисперсионным соотношением»

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 v_s^2 - 4\pi G\rho. \tag{15.8.6}$$

Этот результат имеет большое сходство с дисперсионным соотношением для продольных электростатических колебаний в плазме (см., например, [94]):

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 v_s^2 + \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}, \tag{15.8.7}$$

где e, m_e и n_e — соответственно заряд, масса и плотность числа электронов (в нерационализованной системе единиц). Различие между (15.8.6) и (15.8.7) состоит в том, что в (15.8.6) вместо n_e стоит плотность частиц ρ/m, вместо m_e — масса частиц m, вместо e^2 — ньютоновская «постоянная взаимодействия» Gm^2, а знаком минус учтено то, что гравитационные силы являются силами притяжения. Из-за знака минус в (15.8.6) «гравистатические» волны обладают неустойчивостью, которой нет у плазменных волн: частота ω становится мнимой при волновых числах ниже критического значения

$$k_J = \left(\frac{4\pi G\rho}{v_s^2}\right)^{1/2}, \tag{15.8.8}$$

так что ρ_1 может расти (или убывать) по экспоненциальному закону с показателем экспоненты

$$\mathrm{Im}\ \omega = v_s (k_J^2 - \mathbf{k}^2)^{1/2} \text{ при } \mathbf{k}^2 < k_J^2. \tag{15.8.9}$$

К сожалению, теория Джинса неприменима к образованию галактик в расширяющейся Вселенной: Джинс предполагал, что среда статическая, тогда как относительная скорость расширения Вселенной во всех интересных для нас случаях определяется формулой (15.1.20)

$$\frac{\dot{R}}{R} \approx \left(\frac{8\pi\rho G}{8}\right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} k_J v_s, \tag{15.8.10}$$

т. е. она того же порядка, что и *максимальное* значение показателя экспоненты (15.8.9). Первая удовлетворительная теория неустойчивостей в расширяющейся Вселенной была построена в 1946 г. Е. М. Лифшицем [255]. Он показал, что в расширяющейся Вселенной возмущения при волновых числах, меньших k_J, растут не экспоненциально, а как степень t или R (t). Этот результат будет

подробно выведен и обсужден ниже с использованием как нерелятивистского подхода, предложенного в 1957 г. Боннером [256] (§ 9 этой главы, а также [257]), так и упрощенного варианта релятивистской теории Лифшица (§ 10 этой главы).

Хотя мы пока и не в состоянии определить скорости, с которыми в действительности растут возмущения, мы можем довольно легко установить, какие возмущения мотут расти, а какие нет. При достаточно больших волновых числах волны, описываемые теорией Джинса, становятся обычными звуковыми волнами, причем

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 v_s^2. \tag{15.8.11}$$

Каковы условия, при которых это простое дисперсионное соотношение справедливо? Гравитационные силы будут пренебрежимо малы, если гравитационная энергия сферы радиусом $|k|^{-1}$ много меньше, чем ее тепловая энергия:

$$\frac{G(\rho |\mathbf{k}|^{-3})^2}{|\mathbf{k}|^{-1}} \ll \rho v_s^2 |\mathbf{k}|^{-3}.$$

Влияние расширения Вселенной также будет ничтожным, если относительная скорость расширения много меньше, чем частота:

$$\sqrt{G\rho} \ll |\omega|.$$

Оба эти условия удовлетворяют соотношениям (15.8.11), коль скоро волновое число удовлетворяет условию

$$|\mathbf{k}| \gg k_J,$$

т. е. такому же, как и в теории Джинса. Итак, даже при учете расширения Вселенной следует ожидать, что есть критическое волновое число порядка k_J и возмущения с волновыми числами больше него не могут расти, а только осциллируют, подобно звуковым волнам.

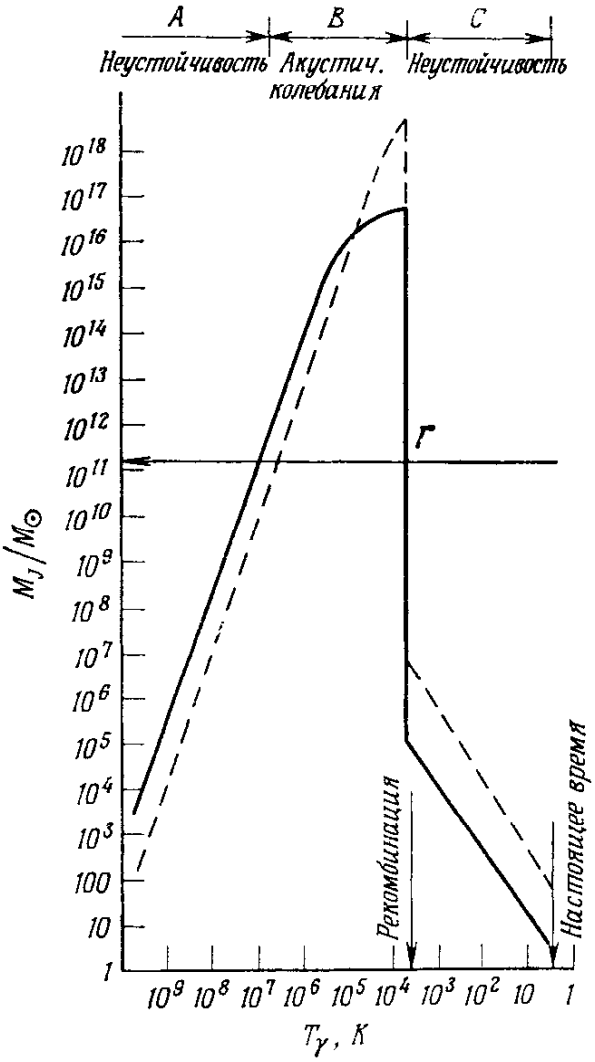
Поскольку из-за расширения Вселенной $\mathbf{k}$ уменьшается пропорционально R^{-1}, то удобно характеризовать возмущения некоторой постоянной — массой покоя шара радиусом $2\pi/|\mathbf{k}|$:

$$M = \frac{4\pi n m_H}{3}\left(\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}\right)^3, \tag{15.8.12}$$

где n — плотность атомов водорода. Согласно проведенному выше анализу, растущими возмущениями являются только те, волновые числа которых меньше k_J, и, следовательно, масса M больше *массы Джинса*

$$M_J \equiv \frac{4\pi n m_H}{3}\left(\frac{2\pi}{k_J}\right)^3 = \frac{4\pi n m_H}{3}\left[\frac{\pi v_s^2}{G(\rho + p)}\right]^{3/2}. \tag{15.8.13}$$

(Оказывается удобным заменить здесь ρ на $\rho + p$; это допустимо, так как M_J используется лишь для оценок порядков величин,



Фиг. 15.6 Масса Джинса как функция температуры излучения.

Сплошная кривая проведена для $\sigma = 0{,}8 \cdot 10^8$, что соответствует $T_{\gamma 0} = 2{,}7$ К, $\rho_0 = 3 \cdot 10^{-29}$ г/см³; пунктирная кривая проведена для $\sigma = 2{,}4 \cdot 10^9$, и соответственно $T_{\gamma 0} = 2{,}7$ К, $\rho_0 = 10^{-30}$ г/см³. Вертикальная прямая, изображающая резкий скачок значения массы Джинса, имеет на самом деле некоторый наклон, который в масштабе рисунка невозможно отобразить. Г – Галактика.

а p всегда меньше, чем $\rho/3$.) Можно получить хорошее представление об эволюции протогалактических флуктуаций, прослеживая изменение M_J, вызванное расширением Вселенной (фиг. 15.6).

С момента аннигиляции $e^+ - e^-$ ($T \approx 10^{10}$ К) до рекомбинации водорода ($T \approx 4000$ К) можно в хорошем приближении рассматривать содержимое Вселенной как нерелятивистский ионизованный водород плюс электромагнитное излучение черного тела, находящиеся в тепловом равновесии при температуре T. Поскольку энтропия фотонов σk очень велика, можно пренебречь давлением, тепловой энергией и энтропией вещества. Тогда полная плотность энергии, давление и удельная энтропия равны (без учета нейтрино, не взаимодействующих с веществом и излучением)

$$\rho = nm_{\text{H}} + aT^4, \quad (15.8.14)$$

$$p = \frac{1}{3} aT^4, \quad (15.8.15)$$

$$\sigma = \frac{4aT^3}{3nk}. \quad (15.8.16)$$

В адиабатическом возмущении энтропия σ постоянна, т. е. n изменяется как T^3, и, следовательно,

$$\delta\rho = (3nm_{\text{H}} + 4aT^4)\frac{\delta T}{T},$$

$$\delta p = \left(\frac{4}{3} aT^4\right)\frac{\delta T}{T}.$$

Скорость звука поэтому равна

$$v_s^2 = \left(\frac{\delta p}{\delta\rho}\right)_{\text{ад}} = \frac{1}{3}\left(\frac{kT\sigma}{m_{\text{H}} + kT\sigma}\right), \quad (15.8.17)$$

а масса Джинса (15.8.13)

$$M_J = \frac{2\pi^{5/2}k^2\sigma^2}{9a^{1/2}m_H^2G^{3/2}(1+\sigma kT/m_H)^3}, \tag{15.8.18}$$

или через массу Солнца

$$M_J = 9{,}06M_\odot\sigma^2\left(1+\frac{\sigma kT}{m_H}\right)^{-3}. \tag{15.8.19}$$

Как только при $T_R \approx 4000$ К водород рекомбинирует, давление излучения становится неэффективным и уравнения состояния теперь будут уравнениями для одноатомного идеального газа с $\gamma = {}^5/_3$:

$$\rho = nm_H + \frac{3}{2}nkT, \tag{15.8.20}$$

$$p = nkT. \tag{15.8.21}$$

Скорость звука теперь имеет обычное значение:

$$v_s^2 = \frac{5}{3}\frac{kT}{m_H}, \tag{15.8.22}$$

а масса Джинса (15.8.13) равна

$$M_J = 4\left(\frac{\pi}{3}\right)^{5/2}\left(\frac{5kT}{G}\right)^{3/2}n^{-1/2}m_H^{-2}. \tag{15.8.23}$$

Сразу после рекомбинации температура вещества T равна температуре излучения, и, следовательно, T можно выразить через n и удельную энтропию фотонов (15.8.16) и получить

$$M_J = \frac{2\pi^{5/2}5^{3/2}k^2\sigma^{1/2}}{9a^{1/2}m_H^2G^{3/2}} = 102M_\odot\sigma^{1/2}. \tag{15.8.24}$$

Если в этот газ не поступает какая-либо дополнительная теплота, его температура будет падать как R^{-2} [см. (15.5.16)], и, поскольку n изменяется как R^{-3}, масса Джинса M_J (15.8.23) будет убывать как $R^{-3/2}$.

Мы можем видеть теперь, какое сильное воздействие оказывает излучение черного тела на рост флуктуаций [258—260]. Как подчеркивалось в § 5 этой главы, нынешняя температура 2,7 К означает, что величина σ очень велика, порядка 10^8—10^9. Вследствие этого кривая массы Джинса (15.8.19) (фиг. 15.6) начинается с очень малого значения $10^{13}M_\odot/\sigma$ при $T \approx 10^9$ К, т. е. порядка $10^4M_\odot$ — $10^5M_\odot$; затем она растет как T^{-3} до тех пор, пока T не достигнет температуры $m_H/k\sigma$, имеющей порядок 10^5—10^4 К; после этого кривая выравнивается при очень высоком значении $9\sigma^2M_\odot$, т. е. 10^{17}—$10^{19}M_\odot$, до момента рекомбинации водорода; в этот момент кривая M_J резко обрывается вниз до значения (15.8.24) порядка $10^6M_\odot$, после этого она идет вниз по закону $R^{-3/2}$. Если прослеживать конкретную флуктуацию с массой $M_G \approx 10^{11}M_\odot$, т. е.

с массой, типичной для современной галактики средних размеров, то можно различить три последовательные фазы ее роста.

А. Масса Джинса (15.8.19) будет меньше M_G до тех пор, пока температура не упадет до значения

$$T_A = \left(\frac{9M_\odot}{\sigma M_G}\right)^{1/3} \frac{m_H}{k} \approx 10^7 \text{ К}. \qquad (15.8.25)$$

В течение этого периода амплитуда флуктуации будет иметь шанс расти под влиянием собственного тяготения. Поскольку в полной плотности энергии в эту раннюю фазу доминировало излучение, то эта задача релятивистская и для вычисления скорости роста нужно применять общерелятивистский формализм. В § 10 этой главы мы покажем, что наиболее быстро растущие нормальные моды имеют относительные изменения плотности, растущие как t.

Б. С момента, когда T становится ниже T_A (15.8.25), и до рекомбинации водорода при $T_R \approx 4000$ К, масса Джинса больше массы галактики и протогалактическое возмущение ведет себя подобно пакету обычных звуковых волн. Сколько-нибудь заметный рост в этой фазе невозможен. При относительно высокой современной плотности, скажем порядка $3 \cdot 10^{-29}$ г/см^3, имеется длительный период до рекомбинации, когда $\sigma kT < m_H$, т. е. когда в полной энергии доминирует масса покоя водорода и протогалактические звуковые волны можно рассматривать в рамках ньютоновской механики (§ 9 этой главы). При относительно низкой современной плотности, например порядка 10^{-30} г/см^3, $\sigma kT > m_H$ фактически в течение всей фазы Б, и поэтому необходим релятивистский подход (§ 10 этой главы).

В. С момента рекомбинации до настоящего времени масса Джинса много меньше M_G и амплитуда флуктуации опять может расти. Полную энергию в этой фазе в основном определяет масса покоя водорода, и задача становится нерелятивистской, так что показатель роста можно вычислить ньютоновскими методами. В § 9 этой главы будет показано, что относительные изменения плотности $\delta\rho/\rho$ растут примерно, как $t^{2/3}$.

У этой общей картины есть одна неприятная черта. Она не указывает пока никакого подхода к вопросу о том, с чем связано наблюдаемое распределение масс галактик. (Масса Джинса непосредственно перед рекомбинацией намного больше массы любой галактики, тогда как сразу после рекомбинации она соотносится скорее с массой шарового скопления, а не галактики [261].) Такой подход появился недавно в виде расчетов затухания протогалактических флуктуаций, когда они испытывают акустические колебания в фазе Б [262—268]. Диссипация становится существенной всякий раз, когда время свободного пробега некоторых частиц слишком велико, чтобы могло установиться полное тепловое равновесие. Главным механизмом столкновения фотонов в фазе Б

является рассеяние нерелятивистскими электронами, и соответственно среднее время свободного пробега фотонов равно

$$\tau_\gamma = \frac{1}{n\sigma_T}, \tag{15.8.26}$$

где σ_T — томсоновское сечение:

$$\sigma_T \equiv \frac{8\pi e^4}{3m_e^2} = 0{,}6652 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Среднее время пробега для электронов или протонов при учете только кулоновских столкновений будет иметь порядок

$$\tau_e \approx \left[n \left(\frac{kT}{m_e} \right)^{1/2} \frac{e^4}{(kT)^2} \right]^{-1},$$

что меньше τ_γ в $(kT/m_e)^{3/2}$ раз. Таким образом, преобладающие диссипативные явления в фазе Б обусловлены нарушением полного теплового равновесия между веществом и излучением, а не диссипацией в самом веществе. Далее, при любом разумном значении современной плотности барионов флуктуация массы $10^{11} M_\odot$ будет в течение всей фазы Б иметь радиус $2\pi/|\mathbf{k}|$, который много больше средней длины пробега фотонов. Поэтому при рассмотрении взаимодействия вещества и излучения можно ограничиться первым порядком по τ_γ. В этом приближении среда, состоящая из протонов, электронов и фотонов, подобна неидеальной жидкости (§ 11 гл. 2) с коэффициентами вязкости сдвига, объемной вязкости и теплопроводности, которые соответственно равны [268]

$$\eta = \frac{4}{15} aT^4 \tau_\gamma, \tag{15.8.27}$$

$$\zeta = 4aT^4 \tau_\gamma \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_n^2 \right], \tag{15.8.28}$$

$$\varkappa = \frac{4}{3} aT^3 \tau_\gamma. \tag{15.8.29}$$

Общее выражение для коэффициента затухания звуковой волны в неидеальной жидкости имеет вид [268]

$$\Gamma = \frac{\mathbf{k}^2}{2(\rho + p)} \left\{ \zeta + \frac{4}{3}\eta + \varkappa \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n^{-1} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\rho + p - 2T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_n + v_s^2 T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n - \frac{n}{v_s^2} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_T \right] \right\}. \tag{15.8.30}$$

Пользуясь формулами (15.8.14), (15.7.15) и (15.8.26) — (15.8.29), получаем

$$\Gamma = \frac{\mathbf{k}^2 aT^4}{6n\sigma_T \left(nm_\text{H} + \frac{4}{3} aT^4 \right)} \left[\frac{16}{15} + \frac{n^2 m_\text{H}^2}{aT^4 \left(nm_\text{H} + \frac{4}{3} aT^4 \right)} \right], \tag{15.8.31}$$

причем два слагаемых в скобках соответствуют влиянию вязкости сдвига и теплопроводности. [Объемная вязкость сюда не входит,

так как при пренебрежении давлением и тепловой энергией вещества $(\partial p/\partial \rho)_n = {}^1/_3$.] Поскольку $\mathbf{k}^2 \sim M^{-2/3}$, затухание амплитуды звуковой волны будет определяться множителем вида

$$D \equiv \exp\left\{-\int_{t_A}^{t_R} \Gamma\, dt\right\} = \exp\left[-\left(\frac{M_{\text{кр}}}{M}\right)^{2/3}\right], \qquad (15.8.32)$$

где $M_{\text{кр}}$ — некоторая критическая масса (здесь и далее индекс R означает, что значение данной величины берется в момент рекомбинации водорода). При относительно *высокой* современной плотности в течение длительного периода до рекомбинации преобладающий вклад в плотность энергии вносит масса покоя водорода, так что

$$t \approx (6\pi n m_{\text{H}} G)^{-1/2},$$

$$\Gamma \approx \frac{\mathbf{k}^2}{6\sigma_T n} \sim t^{2/3},$$

а критическая масса в (15.8.32) равна

$$M_{\text{кр}} \approx \frac{32\pi^4}{3}\left(\frac{m_{\text{H}}}{10\sigma_T}\right)^{3/2}(6\pi G)^{-3/4}(n_R m_{\text{H}})^{-5/4}. \qquad (15.8.33)$$

Например, при современной плотности масс $3\cdot10^{-29}$ г/см^3 критическая масса равна $5\cdot10^{12}M_\odot$. При относительно низкой современной плотности в плотности энергии почти всю фазу Б доминировало излучение (включая нейтрино), и поэтому

$$t \approx (15{,}5\pi a T^4 G)^{-1/2}$$

$$\Gamma \approx \frac{2\mathbf{k}^2}{15\sigma_T n} \sim t^{1/2},$$

а критическая масса равна

$$M_{\text{кр}} \approx \frac{32\pi^4}{4}\left(\frac{4m_{\text{H}}}{45\sigma_T}\right)^{3/2}(15{,}5\pi a T^4 G)^{-3/4}(n_R m_{\text{H}})^{-1/2}. \qquad (15.8.34)$$

Если же современная плотность равна 10^{-30} г/см^3, то критическая масса составляет $2\cdot10^{14}M_\odot$. По-видимому, флуктуация затухает в фазе Б, если экспонента от $(M_{\text{кр}}/M)^{2/3}$ больше величины порядка 10, но тогда можно прийти к заключению, что флуктуации, выживающие к моменту рекомбинации, имеют минимальную массу от $1{,}6\cdot10^{11}M_\odot$ до $6\cdot10^{12}M_\odot$, как раз порядка массы большой галактики.

Итак, теперь мы знаем, что любая малая флуктуация с массой между $10^{11}M_\odot$ и $10^{17}M_\odot$ будет расти в фазе А, испытывать затухающие колебания в фазе Б, но, «выживши», снова начнет расти в фазе В. Все же удивительно, почему имеется довольно четкий верхний предел галактических масс порядка $10^{12}M_\odot$ — $10^{13}M_\odot$, а не гладкое распределение от $10^{11}M_\odot$ к более высоким

значениям. Один из возможных ответов основан на известном свойстве нелинейных явлений (см., например, [269]) «перекачивать» энергию от длинных волн к самым коротким из тех, которые не подавляются диссипативными эффектами. К сожалению, применение теории турбулентности к проблемам роста галактик пока только начинается [270—279].

Теория возникновения галактик представляет не только академический интерес, поскольку в ближайшем будущем, возможно, удастся наблюдать относительное изменение плотности в момент рекомбинации $(\delta n/n)_R$ [280, 281] (см. также [141]). Для приближенно-адиабатических флуктуаций плотность частиц пропорциональна кубу температуры, и поэтому температура флуктуаций к моменту начала рекомбинации определяется уравнением

$$\left(\frac{\delta T_\gamma}{T_\gamma}\right)_R = \frac{1}{3}\left(\frac{\delta n}{n}\right)_R. \qquad (15.8.35)$$

Если с этого времени Вселенная осталась оптически тонкой, то эти флуктуации должны быть заметны в космическом микроволновом фоне как угловые флуктуации наблюдаемой температуры космического излучения. (Заметим, однако, что томсоновское рассеяние могло бы сгладить эти неоднородности без изменения планковского вида функции распределения [282] (см. § 4 этой главы, а также [143—145]). Согласно (15.5.35) — (15.5.37) и (15.8.12), флуктуация массы M будет иметь видимый угловой масштаб

$$\frac{\theta}{2} \approx q_0 H_0 (1+z_R)\left(\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|_R}\right) \approx q_0 H_0 (1+z_R)\left(\frac{3M}{4\pi n_R m_H}\right)^{1/3},$$

или, ввиду того что $n \sim R^{-3}$,

$$\frac{\theta}{2} \approx q_0 H_0 \left(\frac{3M}{4\pi n_0 m_H}\right)^{1/3}. \qquad (15.8.36)$$

Например, при $q_0 = {}^1/_2$, $H_0^{-1} = 13 \cdot 10^9$ лет и современной плотности $n_0 m_H = 1{,}1 \cdot 10^{-29}$ г/см^3 флуктуация, соответствующая образованию галактики с массой $10^{11} M_\odot$, должна иметь угловой масштаб $\theta = 30''$. Как было отмечено в § 5 этой главы, измерение даже малых флуктуаций такого углового масштаба современной аппаратуре вполне доступно. Поэтому представляет определенный интерес вычислить, насколько сильна должна быть флуктуация в момент рекомбинации, чтобы вырасти в галактику к настоящему времени. К этой проблеме мы обратимся в следующем параграфе.

§ 9. Ньютоновская теория малых флуктуаций

Мы рассчитаем здесь поведение малых флуктуаций, основываясь на ньютоновских уравнениях (15.8.1) — (15.8.4), но теперь будем учитывать также и расширение Вселенной. Как было отмечено, мы можем спокойно применять ньютоновскую механику

к решению таких астрономических проблем, в которых основной вклад в плотность энергии дают нерелятивистские частицы, т. е. $p \ll \rho$, и в которых рассматриваемые линейные масштабы малы по сравнению с характеристическим масштабом Вселенной (см. в связи с этим [283—285]).

В § 1 этой главы было показано существование простого пространственно-однородного решения уравнений (15.8.1) — (15.8.4):

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{R_0}{R(t)}\right]^3, \tag{15.9.1}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}\left[\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right], \tag{15.9.2}$$

$$\mathbf{g} = -\mathbf{r}\left[\frac{4\pi G\rho}{3}\right], \tag{15.9.3}$$

где $R(t)$ — масштабный фактор, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$(\dot{R})^2 + \overline{R} = \frac{8\pi\rho G R^2}{3}, \tag{15.9.4}$$

или, эквивалентно,

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3}\pi\rho G. \tag{15.9.5}$$

Будем искать теперь возмущенное решение, добавляя к решению в «нулевом приближении» (15.8.1) — (15.8.4) малые возмущения ρ_1, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{g}_1$. С точностью до первого порядка по этим возмущениям из этих гидродинамических уравнений следует:

$$\dot{\rho}_1 + 3\frac{\dot{R}}{R}\rho_1 + \frac{\dot{R}}{R}(\mathbf{r}\cdot\nabla)\rho_1 + \rho\nabla\cdot\mathbf{v}_1 = 0, \tag{15.9.6}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_1 + \frac{\dot{R}}{R}\mathbf{v}_1 + \frac{\dot{R}}{R}(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{\rho}\nabla p_1 + \mathbf{g}_1, \tag{15.9.7}$$

$$\nabla\times\mathbf{g}_1 = 0, \tag{15.9.8}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{g}_1 = -4\pi G\rho_1. \tag{15.9.9}$$

Кроме того, поскольку эти флуктуации пока будем считать адиабатическими, флуктуация давления определяется равенством

$$p_1 = v_s^2\rho_1, \tag{15.9.10}$$

где v_s — скорость звука. [Здесь и ниже ρ означает невозмущенную плотность (15.9.1).]

Уравнения (15.9.6) — (15.9.10) пространственно-однородны, и следует ожидать существования решения в виде плоских волн. Действительно, можно найти решения со следующей простран-

ственной зависимостью:

$$\rho_1(r, t) = \rho_1(t) \exp\left\{\frac{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}}{R(t)}\right\} \tag{15.9.11}$$

и аналогично для $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{g}_1$. (Появление множителя R^{-1} в экспоненте означает, что длины волн этих мод растягиваются из-за расширения Вселенной, как и предсказывалось в предыдущем параграфе.) Уравнения (15.9.6) — (15.9.10) теперь превращаются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений со связями:

$$\dot{\rho}_1 + \frac{3\dot{R}}{R}\rho_1 + i\rho\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}_1}{R} = 0, \tag{15.9.12}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_1 + \frac{\dot{R}}{R}\mathbf{v}_1 = -\frac{iv_s^2}{\rho R}\mathbf{q}\rho_1 + \mathbf{g}_1, \tag{15.9.13}$$

$$\mathbf{q}\times\mathbf{g}_1 = 0, \tag{15.9.14}$$

$$i\mathbf{q}\cdot\mathbf{g}_1 = -4\pi G R\rho_1. \tag{15.9.15}$$

Уравнения поля (15.9.14) — (15.9.15) имеют очевидное решение

$$\mathbf{g}_1 = \frac{4\pi i G\rho_1 R\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}. \tag{15.9.16}$$

Для решения уравнений движения удобно разложить $\mathbf{v}_1$ на компоненты — перпендикулярную и параллельную $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_{1\perp}(t) + i\mathbf{q}\varepsilon(t), \tag{15.9.17}$$

где

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}_{1\perp} = 0$$

$$\varepsilon \equiv -\frac{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{q}^2}.$$

Удобно также выразить ρ_1 через относительное изменение плотности δ:

$$\rho_1(t) = \rho(t)\,\delta(t) = \rho_0\left[\frac{R_0}{R(t)}\right]^3\delta(t). \tag{15.9.18}$$

Тогда (15.9.13) распадается на пару независимых уравнений

$$\dot{\mathbf{v}}_{1\perp} + \frac{\dot{R}}{R}\mathbf{v}_{1\perp} = 0, \tag{15.9.19}$$

$$\dot{\varepsilon} + \frac{\dot{R}}{R}\varepsilon = \left(-\frac{v_s^2}{R} + \frac{4\pi G\rho R}{\mathbf{q}^2}\right)\delta, \tag{15.9.20}$$

а уравнение (15.9.12) упрощается:

$$\dot{\delta} = \frac{\mathbf{q}^2}{R}\varepsilon. \tag{15.9.21}$$

Из уравнений (15.9.19) — (15.9.21) видно, что в данном случае есть два совершенно различных типа нормальных мод. *Вращательные* моды, описываемые компонентой $\mathbf{v}_{1\perp}$, просто затухают как R^{-1}:

$$\mathbf{v}_{1\perp}(t) \sim R^{-1}(t). \tag{15.9.22}$$

Моды *сжатия*, описываемые величинами ε и δ, имеют более интересную временную зависимость. Используя (15.9.21) для исключения ε из уравнения (15.9.20), получаем

$$\ddot{\delta} + \frac{2\dot{R}}{R}\dot{\delta} + \left(\frac{v_s^2\mathbf{q}^2}{R^2} - 4\pi G\rho\right)\delta = 0. \tag{15.9.23}$$

Заметим, что это выражение переходит в дисперсионное соотношение Джинса (15.8.6), если считать R постоянным и определить волновое число $\mathbf{k}$ как $\mathbf{q}/R$. Уравнение (15.9.23) является фундаментальным дифференциальным уравнением, которое определяет рост или затухание гравитационных конденсаций в расширяющейся Вселенной.

Изложенная ньютоновская теория становится применимой при переходе к эре преобладания вещества, когда плотность энергии излучения становится ниже плотности масс покоя, так что $p \ll \rho$. К сожалению, сложность уравнения (15.9.23) не позволяет получить замкнутое решение, справедливое в течение всей эры преобладания вещества. Можно, однако, дать ответы на наиболее интересные вопросы о поведении $\delta(t)$, решая уравнение (15.9.23) в ряде специальных случаев.

А. Решения с нулевым давлением. Согласно общей картине, наброски которой мы сделали в предыдущем параграфе, предполагается, что галактики вырастают из малых флуктуаций, сохранившихся к моменту рекомбинации водорода от предыдущей фазы затухающих акустических колебаний. Наиболее важно для нас ответить на вопрос: насколько такая протогалактическая флуктуация может вырасти со времен рекомбинации до настоящего времени? Или, говоря языком, который ближе наблюдениям: как велика должна быть флуктуация в момент рекомбинации, чтобы иметь шанс превратиться в галактику к настоящему времени?

Для ответа на эти вопросы можно упростить уравнение (15.9.23), пренебрегая членом $v_s^2\mathbf{q}^2/R^2$, соответствующим давлению. Этот член пренебрежимо мал по сравнению с гравитационным членом $4\pi G\rho$, если волновое число $|\mathbf{k}| \equiv |\mathbf{q}|/R$ много меньше волнового числа Джинса (15.8.8), или, что то же самое, если масса флуктуации (15.8.12) много больше массы Джинса (15.8.13). Мы знаем из предыдущего параграфа, что сразу после рекомбинации масса Джинса становится порядка $10^6 M_\odot - 3\cdot 10^6 M_\odot$ и что затем она убывает как $R^{-3/2}$. Поэтому после рекомбинации галак-

тическая масса порядка $10^{11}M_\odot$ будет, во всяком случае, намного больше массы Джинса.

Чтобы продолжить решение уравнения (15.9.23) до настоящего времени, необходимо использовать параметрические формулы для $R(t)$ и $\rho(t)$, выведенные в § 3 этой главы; они различны для положительной, нулевой и отрицательной кривизны:

$$k=+1\begin{cases}\dfrac{R(t)}{R_0}=q_0(2q_0-1)^{-1}(1-\cos\theta),\\ H_0t=q_0(2q_0-1)^{-3/2}(\theta-\sin\theta),\\ \rho=\dfrac{3H_0^2(2q_0-1)^3}{4\pi Gq_0^2(1-\cos\theta)^3},\end{cases}$$

$$k=0\begin{cases}\dfrac{R(t)}{R_0}=\left(\dfrac{3H_0t}{2}\right)^{2/3},\\ \rho=(6\pi Gt^2)^{-1},\end{cases}$$

$$k=-1\begin{cases}\dfrac{R(t)}{R_0}=q_0(1-2q_0)^{-1}(\operatorname{ch}\Psi-1),\\ H_0t=q_0(1-2q_0)^{-3/2}(\operatorname{sh}\Psi-\Psi),\\ \rho=\dfrac{3H_0^2(1-2q_0)^3}{4\pi Gq_0^2(\operatorname{ch}\Psi-1)^3}.\end{cases}$$

В пренебрежении давлением уравнения (15.9.23) имеют следующий вид:

$k=+1$

$$(1-\cos\theta)\frac{d^2\delta}{d\theta^2}+\sin\theta\frac{d\delta}{d\theta}-3\delta=0, \tag{15.9.24}$$

$k=0$

$$\ddot{\delta}+\frac{4}{3t}\dot{\delta}-\frac{2}{3t^2}\delta=0, \tag{15.9.25}$$

$k=-1$

$$(\operatorname{ch}\Psi-1)\frac{d^2\delta}{d\Psi^2}+\operatorname{sh}\Psi\frac{d\delta}{d\Psi}-3\delta=0. \tag{15.9.26}$$

В каждом случае имеются два независимых решения, которые мы обозначим δ_+ и δ_-:

$$k=+1\begin{cases}\delta_+\sim-\dfrac{3\theta\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}+\dfrac{5+\cos\theta}{1-\cos\theta}, & (15.9.27)\\ \delta_-\sim\dfrac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}, & (15.9.28)\end{cases}$$

$$k=0\begin{cases}\delta_+\sim t^{2/3}, & (15.9.29)\\ \delta_-\sim t^{-1}, & (15.9.30)\end{cases}$$

$$k=-1\begin{cases}\delta_+\sim-\dfrac{3\Psi\operatorname{sh}\Psi}{(\operatorname{ch}\Psi-1)^2}+\dfrac{5+\operatorname{ch}\Psi}{\operatorname{ch}\Psi-1}, & (15.9.31)\\ \delta_-\sim\dfrac{\operatorname{sh}\Psi}{(\operatorname{ch}\Psi-1)^2}. & (15.9.32)\end{cases}$$

Во всех трех случаях решения δ_+ и δ_- при $R(t) \ll R_0$ стремятся соответственно к $t^{2/3}$ и t^{-1}, так что, если вначале при рекомбинации возникает возмущение со сравнимыми модами δ_+ и δ_-, то очень скоро оно будет иметь только моду δ_+. Поэтому далее будем рассматривать только эту моду.

Предположим теперь, что возмущение возникает в момент t_R, соответствующий большому красному смещению:

$$1+z_R \equiv \frac{R(t_0)}{R(t_R)} \approx \frac{4000\text{K}}{2{,}7\text{K}} \approx 1500.$$

Тогда начальные значения параметров θ, t и Ψ равны

$$\theta_R \approx \left[\frac{2(1-\cos\theta_0)}{1+z_R}\right]^{1/2} \qquad (k=+1),$$

$$t_R \approx t_0 (1+z_R)^{-3/2} \qquad (k=0),$$

$$\Psi_R \approx \left[\frac{2(\operatorname{ch}\Psi_0-1)}{1+z_R}\right]^{1/2} \qquad (k=-1).$$

Относительные изменения плотности могут самое большее расти с коэффициентом усиления

$$A_0 \equiv \frac{\delta_+(t_0)}{\delta_+(t_R)}, \tag{15.9.33}$$

который определяется выражениями

$$A_0 = \begin{cases} \dfrac{5(1+z_R)}{(1-\cos\theta_0)^3} \times \\ \times [-3\theta_0 \sin\theta_0 + (1-\cos\theta_0)(5+\cos\theta_0)] & (k=+1), \\ (1+z_R) \qquad (k=0), \\ \dfrac{5(1+z_R)}{(\operatorname{ch}\Psi_0-1)^3} \times \\ \times [-3\Psi_0 \operatorname{sh}\Psi_0 + (\operatorname{ch}\Psi_0-1)(5+\operatorname{ch}\Psi_0)] & (k=-1). \end{cases} \tag{15.9.34}$$

С помощью (15.3.10) и (15.3.19) параметры θ_0 и Ψ_0 можно выразить через q_0. Тогда становится ясно, что при $q_0 > 0$ $A(q_0)$ — монотонно растущая функция, принимающая значения $A_0 \approx 5q_0(1+z_R)$ при $q_0 \ll {}^1/_2$, $A_0 = 1+z_R$ при $q_0 = {}^1/_2$, $A_0 = 1{,}45(1+z_R)$ при $q_0 = 1$ и стремящаяся к верхнему пределу $A_0 = 5(1+z_R)$ при $q_0 \gg 1$. Если $0{,}014 \leqslant q_0 \leqslant 2$ и $1+z_R = 1500$, то коэффициент усиления A_0 малых флуктуаций от момента рекомбинации до настоящего времени должен иметь значения от 100 до 3000.

Сгущения, наблюдаемые в современной Вселенной, нельзя рассматривать как «малые возмущения». Например, плотность внутри типичного скопления галактик порядка 10^{-28} г/см^3, что

на порядок больше максимального правдоподобного значения плотности Вселенной как целого, а плотность в пределах самих галактик, естественно, даже больше. Поэтому простая линейная теория неустойчивости, описанная выше, неприменима к полной истории неоднородностей вплоть до настоящего времени. Однако представляется разумным предположить, что нынешние сильные сгущения выросли из малых возмущений, так что необходимое (если и не достаточное) условие их образования состоит в том, чтобы возмущение $\delta_+(t)$, вычисленное в рамках линейной теории устойчивости, было порядка единицы в некоторый момент в прошлом. Отсюда возникает ограничение снизу на величину начального возмущения в момент рекомбинации:

$$|\delta_+(t_R)| \gtrsim \frac{1}{A_0}, \tag{15.9.35}$$

так что величина $|\delta_+(t_R)|$ должна быть больше чем 10^{-2}—$3\cdot10^4$ в зависимости от значения q_0; чтобы сказать, насколько больше, необходимо знать момент, в который возмущение подходит к началу нелинейного режима, т. е. когда $|\delta_+(t)| \approx 1$. По Вейману (цитируется в [286]), из наблюдаемых энергий связи галактик следует, что этому отвечает время порядка $7\cdot10^7$ лет; но если бы величина $\delta_+(t)$ достигла единицы столь рано, то она была бы очень велика уже в момент рекомбинации. С другой стороны, если концентрация красных смещений квазаров около $z \approx 2$ указывает на начало образования галактик, то (15.9.35) дает вполне разумную оценку для действительного значения $|\delta_+(t_R)|$. Как это было отмечено в конце предыдущего параграфа, протогалактические флуктуации в момент рекомбинации могли бы вызвать относительные флуктуации в наблюдаемой температуре микроволнового фона, равные $|\delta_+(t_R)|/3$ в пределах углов порядка 30″, если только томсоновское рассеяние во время или после рекомбинации не сглаживает эти флуктуации [282]. Отношение $\Delta T_\gamma/T_\gamma$ было бы порядка $3\cdot10^{-3}$—10^{-4}, т. е. его можно было бы измерить, даже если нелинейный режим установился недавно.

Б. Решения в случае нулевой кривизны. Интересно также рассмотреть, как будут вести себя решения уравнения (15.9.23), если в нем *не пренебрегать* давлением $v_s^2\mathbf{q}^2/R^2$. В частности, это нужно для установления точной границы между устойчивыми и неустойчивыми флуктуациями. В этом случае, чтобы получить точные решения, следует ограничиться ранним периодом, когда $R(t) \ll R_0$, так что члены $(\dot{R})^2$ и $8\pi\rho GR^2/3$ в (15.9.4) много больше единицы, и поэтому, даже если $k = \pm1$, в формулах для R и ρ можно положить $k = 0$:

$$R \sim t^{2/3}, \tag{15.9.36}$$

$$\rho = (6\pi Gt^2)^{-1}. \tag{15.9.37}$$

(Здесь нет чрезмерного упрощения, поскольку для более поздних времен, когда эти формулы неверны, масса Джинса столь мала, что ее точное значение не представляет большого интереса.) При произвольном отношении теплоемкостей γ давление изменяется как p^γ, а скорость звука

$$v_s = \left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)^{1/2} \sim \rho^{1/2(\gamma-1)} \sim t^{1-\nu}. \tag{15.9.38}$$

Исходя из этого, уравнение (15.9.23) можно записать в виде

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} + \left(\frac{\Lambda^2}{t^{2\gamma-2/3}} - \frac{2}{3t^2}\right)\delta = 0, \tag{15.9.39}$$

где Λ^2 — постоянная:

$$\Lambda^2 \equiv \frac{t^{2(\gamma-1)/3} v_s^2 \mathbf{q}^2}{R^2}. \tag{15.9.40}$$

Решениями уравнения (15.9.39) при $\gamma > 4/3$ являются

$$\delta_\pm \sim t^{-1/6} J_{\mp 5\nu/6}\left(\frac{\Lambda t^{-\nu}}{\nu}\right), \tag{15.9.41}$$

где J — обычная функция Бесселя и

$$\nu \equiv \gamma - \frac{4}{3} > 0. \tag{15.9.42}$$

Функции Бесселя при $t \ll \Lambda^{1/\nu}$ осциллируют, в то время как при $t \gg \Lambda^{1/\nu}$ ведут себя как

$$\delta_\pm \sim t^{(-1/6)\pm(5/6)}. \tag{15.9.43}$$

С помощью (15.9.37) и (15.9.40) условие роста моды δ_+ можно написать в виде

$$\frac{v_s^2 \mathbf{q}^2}{R^2} \gtrsim 6\pi G\rho,$$

что, по существу, совпадает с условием Джинса $v_s^2 \mathbf{k}^2 > 4\pi G\rho$.

Решения (15.9.41) с $\gamma \approx {}^5/_3$ применимы в период после рекомбинации. При относительно высокой современной плотности имеется также значительный период до рекомбинации, когда в полной энергии преобладает вклад от массы покоя водорода, но давление определяется в основном излучением. Космическая среда ведет себя тогда как нерелятивистская жидкость с $\gamma = 4/3$, а уравнение (15.9.39) имеет вид

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} + \left(\Lambda^2 - \frac{2}{3}\right)\frac{\delta}{t^2} = 0, \tag{15.9.44}$$

где

$$\Lambda^2 \equiv \frac{t^2 v_s^2 \mathbf{q}^2}{R^2} = \frac{v_s^2 \mathbf{q}^2}{6\pi G\rho R^2}. \tag{15.9.45}$$

Уравнение (15.9.44) имеет очень простые решения:

$$\delta_{\pm} \sim t^{\alpha}, \qquad \alpha = -\frac{1}{6} \pm \left(\frac{25}{36} - \Lambda^2\right)^{1/2}. \qquad (15.9.46)$$

Оба решения описывают медленно затухающие колебания при $\Lambda > 5/6$ и убывают при $5/6 > \Lambda > 2/3$, тогда как при $\Lambda < 2/3$ δ_+ растет, а δ_- убывает. Условием роста δ_+ является, следовательно, неравенство

$$\frac{v_s^2 \mathbf{q}^2}{6\pi G\rho R^2} < \frac{2}{3},$$

которое в точности совпадает с условием Джинса $v_s^2\mathbf{k}^2 < 4\pi G\rho$.

В этом формализме нетрудно учесть диссипативные явления. Здесь наиболее интересным является затухание из-за конечного среднего свободного пробега фотонов в течение той части фазы Б, когда преобладает вещество, т. е. в период, предшествующий рекомбинации, когда плотность энергии излучения aT^4 много меньше плотности вещества nm_{H}, а масса Джинса много больше галактической массы. Согласно (15.8.27) — (15.8.30), влияние вязкости в это время пренебрежимо мало по сравнению с теплопроводностью. Поэтому диссипативные явления можно учесть [281a], используя уравнение состояния для того, чтобы выразить возмущение давления p_1 в (15.9.7) через возмущения температуры T_1 и плотности ρ_1, и добавляя к уравнениям (15.9.6) — (15.9.9) обычное нерелятивистское уравнение теплопроводности. Нет необходимости рассматривать все это здесь, поскольку и теплопроводность, и вязкость будут включены в общерелятивистскую теорию, изложенную в следующем параграфе.

§ 10. Общерелятивистская теория малых флуктуаций

Перелятивистский анализ, проведенный в предыдущем параграфе, вполне годится для изучения возмущений сжатия и вращательных возмущений в эру преобладания вещества, когда $p \ll \rho$. Однако если интересоваться эрой преобладания излучения, или эрой преобладания лептонов, когда p того же порядка, что и ρ, то необходима релятивистская теория. Она нужна также при изучении распространения гравитационного излучения в любую эру.

Релятивистская теория малых возмущений в расширяющейся Вселенной довольно сложна, поэтому здесь мы будем иметь дело только с простейшим случаем, когда кривизна невозмущенной метрики Робертсона — Уокера равна нулю ($k = 0$). Это ограничение не слишком жесткое, поскольку результаты для $k = +1$ или $k = -1$, по существу, те же, если рассматривать только раннюю Вселенную, в которой $R^2 \gg |k|$, и только такие возму-

щения, длины волн которых много меньше R. Так или иначе, этот случай наиболее интересен, поскольку рост сгущений в недавнем прошлом может быть описан при любом значении k нерелятивистской теории предыдущего параграфа.

Здесь оказывается удобным учитывать диссипативные явления с самого начала. Среда характеризуется коэффициентом вязкости сдвига η и коэффициентом теплопроводности χ; объемной вязкостью, как было отмечено в § 8 этой главы, можно пренебречь, поскольку вклад вещества в давление и плотность кинетической энергии много меньше вклада излучения.

Диссипативные явления можно учесть, добавляя соответствующие члены к тензору энергии-импульса. Для неидеальной релятивистской жидкости в отсутствие гравитации эти члены были найдены в § 11 гл. 2. Правильное выражение для тензора энергии-импульса в гравитационном поле получается немедленно, если переписать (2.11.21) в общековариантном виде:

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p+\rho)\,U^\mu U^\nu - \eta H^{\mu\rho}H^{\nu\sigma}W_{\rho\sigma} - \\ - \chi\,(H^{\mu\rho}U^\nu + H^{\nu\rho}U^\mu)\,Q_\rho, \tag{15.10.1}$$

где

$$W_{\mu\nu} \equiv U_{\mu;\,\nu} + U_{\nu;\,\mu} - \frac{2}{3}\,g_{\mu\nu}U^\nu{}_{;\,\nu}, \tag{5.10.2}$$

$$Q_\mu \equiv T_{;\,\mu} + TU_{\mu;\,\nu}U^\nu, \tag{15.10.3}$$

$$H_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu \tag{15.10.4}$$

Легко убедиться, что диссипативные члены в $T^{\mu\nu}$ исчезают для метрики Робертсона — Уокера с любым k и поэтому фридмановские решения по-прежнему будут нашим исходным пунктом. В частности, при $k = 0$ имеем обычные невозмущенные решения уравнений Эйнштейна:

$$g_{tt} = -1, \qquad g_{ti} = 0, \qquad g_{ij} = R^2(t)\,\delta_{ij}, \tag{15.10.5}$$

$$U^t = 1, \qquad U^i = 0, \tag{15.10.6}$$

где x^i $(i = 1, 2, 3)$ — квазиевклидовы сопутствующие координаты и

$$(\dot{R})^2 = \frac{8\pi\rho G R^2}{3} \tag{15.10.7}$$

Единственными неисчезающими независимыми компонентами невозмущенной аффинной связности являются в данном случае [см. (15.1.3) — (15.1.5)]

$$\Gamma^t_{ij} = R\dot{R}\delta_{ij}, \qquad \Gamma^i_{tj} = \frac{\dot{R}}{R}\delta_{ij} \tag{15.10.8}$$

Рассмотрим возмущение, при котором метрика равна $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ с малым $h_{\mu\nu}$. Прежде чем выписать уравнения поля для $h_{\mu\nu}$,

полезно вспомнить замечание в § 9 гл. 10 о том, что координатным преобразованием (10.9.6) можно из решения $h_{\mu\nu}$ получить эквивалентное ему решение

$$h^*_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu;\,\nu} + \varepsilon_{\nu;\,\mu},$$

где ε_μ — произвольное малое векторное поле. С помощью (15.10.8) это новое решение приводится к виду

$$h^*_{ij} = h_{ij} + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x^i} - 2R\dot{R}\delta_{ij}\varepsilon_i, \tag{15.10.9}$$

$$h^*_{it} = h_{it} + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x^i} - 2\frac{\dot{R}}{R}\varepsilon_i, \tag{15.10.10}$$

$$h^*_{tt} = h_{tt} + 2\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial t}. \tag{15.10.11}$$

Весьма удобно выбрать ε_μ так, чтобы

$$h^*_{it} = h^*_{tt} = 0,$$

сохраняя таким образом в максимально возможной степени вид невозмущенной метрики. Это можно осуществить, определив ε_μ следующим образом:

$$\varepsilon_t = -\frac{1}{2}\int h_{tt}\,dt,$$

$$\varepsilon_i = -R^2 \int \left[h_{it} + \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x^i}\right] R^{-2}\,dt.$$

Опуская звездочку в $h^*_{\mu\nu}$, будем считать всюду, что координатная система выбрана так, что

$$h_{it} = h_{tt} = 0. \tag{15.10.12}$$

Возмущение $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ приводит к возмущению в аффинной связности (10.9.1), имеющему компоненты

$$\delta\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2R^2}(h_{ij;\,k} + h_{ik;\,j} - h_{jk;\,i}) = \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i}\right), \tag{15.10.13}$$

$$\delta\Gamma^t_{jk} = -\frac{1}{2}(h_{tj;\,k} + h_{tk;\,j} - h_{ik;\,t}) = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{ik}}{\partial t}, \tag{15.10.14}$$

$$\delta\Gamma^i_{tj} = \frac{1}{2R^2}(h_{it;\,j} + h_{ij;\,t} - h_{tj;\,i}) = \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} - \frac{2\dot{R}}{R}h_{ij}\right), \tag{15.10.15}$$

$$\delta\Gamma^t_{ti} = \delta\Gamma^i_{tt} = \delta\Gamma^t_{tt} = 0. \tag{15.10.16}$$

Свертывая, получаем

$$\delta\Gamma_\mu \equiv \delta\Gamma^\nu_{\nu\mu} = \delta\Gamma^i_{i\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{h_{kk}}{2R^2}\right), \tag{15.10.17}$$

причем по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Возмущение тензора Риччи определяется тогда выражениями

$$\delta R_{ij} = (\delta\Gamma_i)_{;\,j} - (\delta\Gamma^{\mu}_{ij})_{;\,\mu} = \frac{\partial\delta\Gamma_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\delta\Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial\delta\Gamma^t_{ij}}{\partial t} -$$

$$- R\dot{R}\delta_{ij}\delta\Gamma_t - \frac{\dot{R}}{R}\delta\Gamma^t_{ij} + R\dot{R}\,(\delta\Gamma^i_{tj} + \delta\Gamma^j_{ti}),$$

$$\delta R_{ti} = (\delta\Gamma_t)_{;\,i} - (\delta\Gamma^{\mu}_{ti})_{;\,\mu} = \frac{\partial\delta\Gamma_t}{\partial x^i} - \frac{\partial\delta\Gamma^i_{ti}}{\partial x^j} - \frac{\dot{R}}{R}\delta\Gamma_i + \frac{\dot{R}}{R}\delta\Gamma^j_{ji},$$

$$\delta R_{tt} = (\delta\Gamma_t)_{;\,t} - (\delta\Gamma^{\mu}_{tt})_{;\,\mu} = \frac{\partial\delta\Gamma_t}{\partial t} + \frac{2\dot{R}}{R}\delta\Gamma^i_{it},$$

или, в более явном виде,

$$\delta R_{ij} = \frac{1}{2R^2}\left(\nabla^2 h_{ij} - \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^k} + \frac{\partial^2 h_{kk}}{\partial x^i\,\partial x^j}\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2} + \frac{\dot{R}}{2R}\,(\dot{h}_{ij} - \delta_{ij}\dot{h}_{kk}) + \frac{(\dot{R})^2}{R^2}\,(-2h_{ij} + \delta_{ij}h_{kk}), \quad (15.10.18)$$

$$\delta R_{ti} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[R^{-2}\left(\frac{\partial h_{kk}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^k}\right)\right], \quad (15.10.19)$$

$$\delta R_{tt} = \frac{1}{2R^2}\left[\ddot{h}_{kk} - 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{h}_{kk} + 2\left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\ddot{R}}{R}\right)h_{kk}\right]. \quad (15.10.20)$$

Согласно формуле (15.10.1), член в правой части уравнений Эйнштейна, описывающий источник, равен

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda} = \frac{1}{2}(\rho - p)\,g_{\mu\nu} + (\rho + p)\,U_\mu U_\nu -$$

$$- \eta H_{\mu\rho}H_{\nu\sigma}W^{\rho\sigma} - \chi\,(H_{\mu\rho}U_\nu + H_{\nu\rho}U_\mu)\,Q^{\rho}. \quad (15.10.21)$$

Чтобы сохранялась нормировка скорости U, должно выполняться равенство

$$0 = \delta\,(g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu) = -2U_1{}^t.$$

Возмущения h_{ij}, U_{1i}, ρ_1, p_1, T_1 вызывают следующие изменения в $S_{\mu\nu}$:

$$\delta S_{ij} = \frac{1}{2}(\rho - p)\,h_{ij} + \frac{R^2}{2}\,\delta_{ij}\,(\rho_1 - p_1) - \eta R^4\delta W^{ij}, \quad (15.10.22)$$

$$\delta S_{it} = -R^2\,(\rho + p)\,U_1{}^i - \chi\dot{T}\delta H_{it} + \chi R^2\delta Q^i, \quad (15.10.23)$$

$$\delta S_{tt} = \frac{1}{2}(\rho_1 + 3p_1) - 2\chi\dot{T}\delta H_{tt}, \quad (15.10.24)$$

где

$$\delta H_{it} = -R^2 U_1^i, \quad \delta H_{tt} = 0, \tag{15.10.25}$$

$$\delta W^{ij} = R^{-2}\left[\frac{\partial U_1^i}{\partial x^j} + \frac{\partial U_1^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{U}_1\right] + \\ + R^{-2}\frac{\partial}{\partial t}\left[R^{-2}\left(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}h_{kk}\right)\right], \tag{15.10.26}$$

$$\delta Q^i = R^{-2}\left[\frac{\partial T_1}{\partial x^i} + T\frac{\partial}{\partial t}(R^2 U_1^i)\right]. \tag{15.10.27}$$

Окончательно из уравнений Эйнштейна следует, что

$$\delta R_{\mu\nu} = -8\pi G \delta S_{\mu\nu}. \tag{15.10.28}$$

Равенства (15.10.18) — (15.10.20) и (15.10.22) — (15.10.28) приводят к уравнениям

$$\nabla^2 h_{ij} = \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 h_{kk}}{\partial x^i \partial x^j} - R^2 \ddot{h}_{ij} + \\ + R\dot{R}(\dot{h}_{ij} - \delta_{ij}\dot{h}_{kk}) + 2(\dot{R})^2(-2h_{ij} + \delta_{ij}h_{kk}) = \\ = -8\pi G(\rho - p) R^2 h_{ij} - 8\pi G R^4 \delta_{ij}(\rho_1 - p_1) + \\ + 16\pi G\eta R^4\left(\frac{\partial U_1^j}{\partial x^j} + \frac{\partial U_1^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{U}_1\right) + \\ + 16\pi G\eta R^4 \frac{\partial}{\partial t}\left[R^{-2}\left(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}h_{kk}\right)\right], \tag{15.10.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[R^{-2}\left(\frac{\partial h_{kk}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^k}\right)\right] = 16\pi G R^2(\rho + p) U_1^i - \\ - 16\pi G\chi\dot{T}R^2 U_1^i - 16\pi G\chi\left[\frac{\partial T_1}{\partial x^i} + T\frac{\partial}{\partial t}(R^2 U_1^i)\right]. \tag{15.10.30}$$

$$\ddot{h}_{kk} - \frac{2\dot{R}}{R}\dot{h}_{kk} + 2\left(\frac{(\dot{R}^2)}{R^2} - \frac{\ddot{R}}{R}\right)h_{kk} = -8\pi G(\rho_1 + 3p_1) R^2. \tag{15.10.31}$$

Уравнения движения жидкости можно получить или из закона сохранения $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, или непосредственно из уравнений поля. Действуя операторами $\partial/\partial x^i$ и $\partial/\partial t + 3\dot{R}/R$ на уравнения (15.10.29) и (15.10.30), а затем упрощая полученное равенство с помощью уравнений (15.10.30), (15.10.31) и следа уравнения (15.10.29), мы найдем уравнение сохранения импульса

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 16\pi G\eta\right)\left\{R^5 U_1^i(\rho + p - \chi\dot{T}) - \chi R^3\left[\frac{\partial T_1}{\partial x^i} + T\frac{\partial}{\partial t}(R^2 U_1^i)\right]\right\} = \\ = -R^3\frac{\partial p_1}{\partial x^i} + \eta R^3\left[\nabla^2 U_1^i + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\nabla\cdot\mathbf{U}_1 + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(R^{-2}\frac{\partial h_{kk}}{\partial x^i}\right)\right]. \tag{15.10.32}$$

(Вектор $\mathbf{U}_1$ имеет компоненты $U_1{}^i$, а не U_{1i}.) Из дивергенции уравнения (15.10.30) с помощью (15.10.31) и следа уравнения (15.10.29) получим уравнение сохранения энергии

$$\dot{\rho}_1 + \frac{3\dot{R}}{R}(\rho_1 + p_1) = -(\rho + p)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{2R^2}\right) + \nabla\cdot\mathbf{U}_1\right] + \\ + \chi\left[\dot{T}\nabla\cdot\mathbf{U}_1 + \frac{1}{R^2}\nabla^2 T_1 + \frac{T}{R^2}\frac{\partial}{\partial t}(R^2\nabla\cdot\mathbf{U}_1)\right]. \quad (15.10.33)$$

Как обычно, при рассмотрении диссипативных процессов мы должны использовать также и уравнение сохранения тока частиц nU^μ:

$$0 = (nU^\mu)_{;\,\mu} = U^\mu\frac{\partial n}{\partial x^\mu} + nU^\mu{}_{;\,\mu}.$$

(Строго говоря, в качестве n следует брать плотность барионов или лептонов.) Для невозмущенного решения имеем уже знакомый результат:

$$n \sim R^{-3},$$

и с точностью до первого порядка по возмущениям n_1, $\mathbf{U}_1$, h_{ij} получим

$$0 = \frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{3\dot{R}}{R}n_1 + n[\nabla\cdot\mathbf{U}_1 + \delta\Gamma^\nu_{t\nu}]$$

или, используя (15.10.17),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n_1}{n}\right) = -\nabla\cdot\mathbf{U}_1 - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{2R^2}\right). \quad (15.10.34)$$

Уравнения (15.10.29) — (15.10.34) образуют удобную систему фундаментальных уравнений, но следует иметь в виду, что они не все независимы; это видно из самого способа их получения.

Одно решение этих уравнений можно найти сразу:

$$h_{ij}(\mathbf{x}, t) = R^2(t)\left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x^j} + \frac{\partial f_j(\mathbf{x})}{\partial x^i}\right],$$

$$\rho_1 = p_1 = \mathbf{U}_1 = n_1 = T_1 = 0, \quad (15.10.35)$$

где $\mathbf{f}$ — произвольная функция положения. [При подстановке для проверки в (15.10.29) следует воспользоваться уравнением (15.1.20).] Однако если обратиться к выражениям (15.10.9) — (15.10.11), то становится ясным, что это возмущение не имеет физического содержания, а представляет собой эффект бесконечно малого преобразования координат вида (10.9.6):

$$x^\mu \to x^\mu - \varepsilon^\mu(x),$$

$$\varepsilon^t = 0, \quad \varepsilon(\mathbf{x}, t) = R^2(t)\,\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (15.10.36)$$

структура которого сохраняет равенства $h_{it} = 0$, $h_{tt} = 0$. Нас же интересуют физические возмущения, вид которых по необходимости должен отличаться от (15.10.35).

Явная пространственная однородность уравнений (15.10.29)—(15.10.34) позволяет искать решения с пространственной зависимостью вида

$$h_{ij},\ \rho_1,\ p_1,\ U_1,\ n_1,\ T_1 \sim \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}) \qquad (15.10.37)$$

с постоянным волновым числом $\mathbf{q}$. Так же как и в нерелятивистском случае, удобно разложить общее решение на нормальные моды. Теперь мы имеем моды трех различных типов.

Излучательные моды

Имеется простой класс решений, таких, что

$$0 = h_{kk} = q_i h_{ij} = \rho_1 = p_1 = U_{1i} = n_1 = T_1. \qquad (15.10.38)$$

Уравнения (15.10.30) — (15.10.34) при этом удовлетворяются тривиально, а уравнение (15.10.29) вместе с (15.1.20) дает

$$\ddot{h}_{ij} + \left(-\frac{\dot{R}}{R} + 16\pi G\eta\right)\dot{h}_{ij} + \left(\frac{\mathbf{q}^2}{R^2} - \frac{2\ddot{R}}{R} - \frac{32\pi G\eta\dot{R}}{R}\right)h_{ij} = 0. \qquad (15.10.39)$$

Для очень больших волновых чисел можно найти общее ВКБ-решение второго порядка

$$h_{ij} \sim R\exp\left[\int\left(\frac{\pm i|\mathbf{q}|}{R} - 8\pi G\eta\right)dt\right]. \qquad (15.10.40)$$

При медленно меняющихся R и η этот результат, справедливый в сопутствующей системе, можно переписать для почти евклидовой системы, умножив h_{ij} на масштабный множитель R^{-2}. Таким образом, выражение (15.10.40) соответствует плоской гравитационной волне вида (10.2.1), причем

$$e_{\mu\nu} \sim \frac{1}{R}\exp\left(-8\pi G\int\eta\,dt\right),$$

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{q}}{R}.$$

Согласно (10.3.7), плотность энергии τ_g^{00} этих гравитационных волн убывает как

$$\tau_g^{00} \sim R^{-4}\exp\left(-16\pi G\int\eta\,dt\right). \qquad (15.10.41)$$

Множитель R^{-4} как раз такой, какого следует ожидать для свободного расширения любой волны, соответствующей безмассовой частице [ср. (15.1.23)]. Второй множитель в (15.10.41) говорит о поглощении гравитационных волн в *вязкой* среде со скоростью [287]

$$\Gamma_g = 16\pi G\eta. \qquad (15.10.42)$$

Обычно коэффициент η по порядку величины равен произведению плотности тепловой энергии на некоторое среднее время свободного пробега τ, так что Γ_g самое большее порядка $(\dot{R})^2\tau/R^2$. Отсюда, коль скоро частота столкновений τ^{-1} много больше относительной скорости расширения $\dot{R}/R$, то коэффициент затухания Γ_g много меньше, чем $\dot{R}/R$, и поэтому вязкость мало влияет на распространение гравитационной волны. Пренебрегая вязкостью и предполагая степенную зависимость $R(t)$ от времени:

$$R(t) \sim t^n, \tag{15.10.43}$$

мы можем найти решение уравнения (15.10.39), справедливое для всех длин волн:

$$h_{ij} \sim t^{(n+1)/2} J_{\pm\nu}\left[\frac{|\mathbf{q}|\,t}{(1-n)\,R}\right], \tag{15.10.44}$$

где $J_{\pm\nu}$ — обычная функция Бесселя порядка $\pm\nu$ и

$$\nu = \frac{3n-1}{2-2n}. \tag{15.10.45}$$

[В эру преобладания вещества (15.10.43) выполняется при $n = 2/3$, а в эру преобладания излучения — при $n = 1/2$.] В отличие от распространения электромагнитных волн в плазме теперь нет четкого нижнего предела частот, при которых может распространяться гравитационная волна; вместо этого при $|\mathbf{q}|\,t \ll R$ решения ведут себя как

$$n_{ij} \sim t^{2n} \text{ или } t^{1-n} \tag{15.10.46}$$

и постепенно перерастают при $|\mathbf{q}|\,t \gg R$ в волноподобные решения (15.10.40).

Вращательные моды

Есть также другой простой класс решений, в котором

$$0 = h_{kk} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1 = \rho_1 = p_1 = n_1 = T_1. \tag{15.10.47}$$

Теперь тривиально удовлетворяются уравнения (15.10.31), (15.10.33) и (15.10.34), а (15.10.32) становится уравнением для поперечной части $\mathbf{U}_1$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 16\pi G\eta\right)\left[R^5(\rho + p - \chi\dot{T})\,\mathbf{U}_1\right] = -\eta R^3\mathbf{q}^2\mathbf{U}_1. \tag{15.10.48}$$

Тогда уравнения (15.10.29) и (15.10.30) определяют гравитационное поле, созданное вращениями, которые определяются вектором $\mathbf{U}_1$. Эти уравнения поля автоматически согласуются с (15.10.48), так как уравнения движения, из которых выведено уравнение (15.10.48), сами получены из уравнений поля. При

пренебрежении давлением уравнение (15.10.48) дает зависимость $\mathbf{U}_1$ от времени:

$$\mathbf{U}_1 \sim \frac{1}{R^5(\rho+p)}, \tag{15.10.49}$$

которую можно рассматривать как релятивистское обобщение (в сопутствующих координатах) ньютоновского результата (15.9.22)

Моды сжатия

И на этот раз наиболее яркая зависимость от времени наблюдается у тех мод сжатия, которые не ограничены условием равенства нулю величин h_{kk}, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1$, ρ_1, p_1, T_1, n_1. Уравнения (15.10.31), (15.10.33) и (15.10.34) и дивергенция уравнения (15.10.32) приводят в этом случае к системе уравнений для этих величин:

$$\ddot{h}_{kk} - \frac{2\dot{R}}{R}\dot{h}_{kk} + 2\left(\frac{(\dot{R})^2}{R^2} - \frac{\ddot{R}}{R}\right)h_{kk} = -8\pi G R^2(\rho_1 + 3p_1), \tag{15.10.50}$$

$$\dot{\rho}_1 + \frac{3\dot{R}}{R}(\rho_1 + p_1) = -(\rho+p)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{2R^2}\right) + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1\right] + \\ + \chi\left[i\dot{T}\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1 + \frac{iT}{R^2}\frac{\partial}{\partial t}(R^2\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1) - \frac{\mathbf{q}^2}{R^2}T_1\right], \tag{15.10.51}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n_1}{n}\right) = -i\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1 - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{2R^2}\right), \tag{15.10.52}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 16\pi G\eta\right)\left[i\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1 R^5(\rho+p-\chi\dot{T}) + \chi R^3\left[\mathbf{q}^2 T_1 - i\frac{\partial}{\partial t}(R^2\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1)\right]\right] = \\ = R^3\mathbf{q}^2 p_1 - \eta R^3\mathbf{q}^2\left[\frac{4i}{3}\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1 + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{R^2}\right)\right]. \tag{15.10.53}$$

Если мы воспользуемся уравнением состояния для того, чтобы выразить p_1 и ρ_1 через n_1 и T_1, то (15.10.50) — (15.10.53) можно рассматривать как четыре уравнения для четырех неизвестных h_{kk}, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1$, n_1 и T_1. Читатель может сам убедиться, что из этих уравнений получается скорость затухания (15.8.30) для тех волновых чисел флуктуаций, которые много больше, чем предел Джинса, и при которых гравитацией и расширением Вселенной можно пренебречь. Кроме того, в нерелятивистском пределе без учета затухания эти уравнения сводятся к выведенным выше ньютоновским уравнениям (15.9.20) и (15.9.21), если положить

$$\delta \equiv \frac{\rho_1}{p}, \quad \varepsilon \equiv -\frac{R}{\mathbf{q}^2}\left\{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{R^2}\right)\right\}.$$

Строгое обсуждение нормальных мод, описываемых уравнениями (15.10.50) — (15.10.53), читатель может найти в обзоре Филда [286]. Сейчас для наших целей достаточно рассмотреть лишь

предельный случай весьма малых волновых чисел. В пределе $\mathbf{q} \to 0$ все диссипативные эффекты исчезают; в самом деле, исключив h_{kk} из (15.10.51) и (15.10.52), можно показать, что энтропия при этих возмущениях остается постоянной и, следовательно,

$$p_1 = v_s^2 \rho_1. \tag{15.10.54}$$

Кроме того, удобно использовать (15.1.21) для того, чтобы представить уравнение (15.10.51) в виде

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{R^2}\right) = \frac{1}{\rho+p}\left[\dot{\rho}_1 - \frac{\dot{\rho}(1+v_s^2)}{\rho+p}\rho_1\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho+p}\left[\dot{\rho}_1 - \frac{(\dot{\rho}+\dot{p})}{\rho+p}\rho_1\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_1}{\rho+p}\right).$$

Добавление не зависящего от времени члена к h_{kk}/R^2 соответствовало бы простому координатному преобразованию вида (15.10.36), и, следовательно, решение существенно единственное:

$$h_{kk} = -2R^2\delta, \tag{15.10.55}$$

где δ определяется теперь равенством

$$\rho_1 = (\rho + p)\,\delta. \tag{15.10.56}$$

Используя равенства (15.10.54) — (15.10.56) в уравнении (15.10.56), получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\delta} + \frac{2\dot{R}}{R}\dot{\delta} - 4\pi G(\rho + p)(1 + 3v_s^2)\,\delta = 0. \tag{15.10.57}$$

Теперь мы наконец можем вычислить скорость роста в фазе A, т. е. в тот ранний период, когда масса Джинса очень мала и в плотности энергии доминирует излучение и нейтрино. В этом случае мы имеем

$$R \sim t^{1/2}, \quad \rho = \frac{3}{32\pi G t^2}, \quad p = \frac{\rho}{3}, \quad v_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и уравнение (15.10.57) принимает вид

$$\ddot{\delta} + \frac{1}{t}\dot{\delta} - \frac{1}{t^2}\delta = 0 \tag{15.10.58}$$

Снова имеем растущее решение δ_+ и убывающее δ_-:

$$\delta_+ \sim t, \qquad \delta_- \sim t^{-1}, \tag{15.10.59}$$

но экспоненциального роста нет.

§ 11. Очень ранняя Вселенная

В § 6 этой главы температурная история Вселенной прослежена в прошлое вплоть до эры, когда температура была около 10^{12} К. В этот ранний период Вселенная была заполнена частицами — фотонами, лептонами и антилептонами, взаимодействующими,

к счастью, достаточно слабо, чтобы их можно было трактовать как более или менее идеальный газ. Однако если мы погрузимся еще дальше в прошлое, к первой 0,0001 секунды космической истории, когда температура была выше 10^{12} К, то мы сталкиваемся с теоретическими проблемами, трудности которых уводят за пределы современной статистической механики. При таких температурах в тепловом равновесии будет большое число сильно взаимодействующих частиц — мезонов, барионов и антибарионов со средним расстоянием между частицами меньше типичной комптоновской длины волны. Эти частицы будут находиться в состоянии непрерывного взаимодействия между собой, и нет оснований ожидать, что они будут подчиняться какому-нибудь простому уравнению состояния.

Однако нельзя преодолеть искушение попытаться все-таки построить хоть какую-то модель очень ранней Вселенной. В последние годы обсуждаются, по существу, две простейшие модели, крайне отличающиеся друг от друга и отражающие две различные точки зрения на природу сильно взаимодействующих частиц. Хотя ни одну из этих моделей нельзя воспринимать всерьез в деталях, есть надежда на то, что та или другая из них может оказаться близкой к реальности настолько, чтобы принести некоторую пользу в понимании очень ранней Вселенной.

Первая из этих двух моделей может быть названа *моделью элементарных частиц*. Предполагается, что все частицы составлены из небольшого числа элементарных частиц, скажем фотонов, лептонов, «кварков», и их античастиц. Далее, предполагается, что при очень высокой температуре силы, связывающие элементарные частицы, становятся пренебрежимо малыми, аналогично тому как сила, связывающая нейтрон и протон, становится космологически несущественной при температуре выше температуры диссоциации дейтерия. Пусть имеется $\mathcal{N}$ различных сортов элементарных частиц, считая отдельно различные спиновые состояния и античастицы, а также считая фермионы за $^7/_8$ частицы [см. (15.6.32)]. (Например, если в число элементарных частиц включаются только уже известные нам фотоны, лептоны и антилептоны плюс три сорта кварков и актикварков со спином $^1/_2$, то мы получим $\mathcal{N} = 26$.) Тогда, если kT больше массы самой тяжелой из элементарных частиц, все содержимое Вселенной будет вести себя, как если бы оно состояло из $\mathcal{N}/2$ различных видов излучения черного тела с давлением, плотностью энергии и удельной энтропией, которые определяются уравнениями

$$3p \approx \rho \approx \frac{1}{2}\mathcal{N}aT^4, \tag{15.11.1}$$

$$\sigma \approx \frac{\rho + p}{n_B kT} \approx \frac{2aT^3}{3n_B k}\mathcal{N}, \tag{15.11.2}$$

где n_B — барионное число единицы объема (число барионов минус число антибарионов в единице объема); дополнительный множитель $^1/_2$ введен сюда, чтобы скомпенсировать множитель 2 в постоянной Стефана — Больцмана, возникающий из-за двух состояний поляризации фотона. При адиабатическом расширении $\sigma = \text{const}$, и поскольку современное значение σ дается формулой (15.5.18), то температура в очень ранней Вселенной определяется равенством

$$\frac{T}{T_{\gamma 0}} = \left(\frac{2n_B}{\mathscr{N} n_{B0}}\right)^{1/3} = \left(\frac{2}{\mathscr{N}}\right)^{1/2} \frac{R_0}{R}. \qquad (15.11.3)$$

Связь между плотностью энергии ρ и временем t здесь такая же, как в (15.6.44), и поэтому

$$t \approx \left(\frac{32\pi G\rho}{3}\right)^{-1/2} \approx \left(\frac{16\pi G \mathscr{N} aT^4}{3}\right)^{-1/2} \approx$$

$$\approx \left(\frac{32\pi G a T_{\gamma 0}^4}{3}\right)^{-1/2} \left(\frac{\mathscr{N}}{2}\right)^{1/6} \left(\frac{R}{R_0}\right)^2. \qquad (15.11.4)$$

В *модели составных частиц*, наоборот, предполагается, что нет каких-либо по-настоящему элементарных сильно взаимодействующих частиц, но вместо этого все адроны должны рассматриваться как составные части друг друга. Теперь перед нами встает принципиальный вопрос: что следует рассматривать в качестве «частиц» в термодинамических вычислениях, можно ли ограничиться только одним абсолютно стабильным адроном — протоном или же нужно включить в число «частиц» медленно распадающиеся адроны вроде нейтрона и π-мезона или, быть может, следует рассматривать *все* адронные резонансные состояния, включая такие быстро распадающиеся резонансы, как ρ-мезон и резонанс «3—3» в системе π — N? Весьма привлекательно предположение, что при включении всех резонансов в наши термодинамические вычисления в первом приближении, возможно, не понадобится учитывать взаимодействие этих частиц (§ 9 гл. 11). Если бы это было верно, то можно было бы трактовать раннюю Вселенную как смесь множества идеальных газов с $\mathscr{N}(m)\,dm$ сортами газа в интервале масс $(m,\ m + dm)$. Но какова функция $\mathscr{N}(m)$? Наибольший возможный контраст с моделью элементарных частиц достигается при распределении, растущем настолько быстро, насколько это вообще допустимо, т. е.

$$\mathscr{N}(m) \to Am^{-B} \exp\left(\frac{m}{kT_M}\right) \quad \text{при} \quad m \to \infty, \qquad (15.11.5)$$

где A, B и T_M — неизвестные постоянные. В термодинамические величины будут всегда входить интегралы по $\mathscr{N}(m)\,dm$ с весовыми множителями, ведущими себя как $e^{-m/kT}$ при $m \to \infty$, поэтому эти

величины не будут сходиться, если функция распределения будет расти быстрее, чем (15.11.5); сходимости не будет даже при распределении (15.11.5), если $T > T_M$. Таким образом, модель идеальных газов с числом сортов, задаваемым выражением (15.11.5), характеризуется *максимальной температурой* T_M. Анализ рождения вторичных частиц в реакциях при очень высоких энергиях [288, 289] (см. также [290]) и предложенная недавно Венециано модель взаимодействия адронов [291—294] независимо приводят к числу сортов адронов, определяемому выражением (15.5.11) с B примерно от 2 до 4 и T_M около $1{,}7 \cdot 10^{12}$ К. Если отвлечься на время от мезонов, лептонов и фотонов, то полная плотность энергии, давление и плотность барионного числа определяются обычным распределением Ферми:

$$\rho = h^{-3} \int \mathscr{N}(m)\, dm \int d^3pE \{[e^{(E-\mu)/kT} + 1]^{-1} + [e^{(E+\mu)/kT} + 1]^{-1}\}, \tag{15.11.6}$$

$$p = \frac{1}{3} h^{-3} \int \mathscr{N}(m)\, dm \int d^3pE^{-1}\mathbf{p}^2 \{[e^{(E-\mu)/kT} + 1]^{-1} + [e^{(E+\mu)/kT} + 1]^{-1}\}, \tag{15.11.7}$$

$$n = h^{-3} \int \mathscr{N}(m)\, dm \int d^3p \{[e^{(E-\mu)/kT} + 1]^{-1} - [e^{(E+\mu)/kT} + 1]^{-1}\}, \tag{15.11.8}$$

где $E \equiv (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ — энергия частицы, μ — химический потенциал, ассоциированный с барионным числом. Безразмерная энтропия на один барион σ определяется вторым началом термодинамики как интеграл от полного дифференциала

$$d\sigma = \frac{1}{kT} \left\{ d\left(\frac{\rho}{n}\right) + p d\left(\frac{1}{n}\right) \right\},$$

откуда непосредственным интегрированием получаем

$$\sigma = \frac{\rho + p - \mu n}{nkT}. \tag{15.11.9}$$

При адиабатическом расширении ρ и p убывают, начиная с предположительно бесконечных значений, в то время как σ должна оставаться постоянной. Единственная возможность для того, чтобы ρ и p могли стремиться к бесконечности, а σ_B в то же время оставалась постоянной, состоит в том, чтобы химический потенциал μ становился бесконечным при стремлении T к некоторому конечному значению T_1, *меньшему*, чем T_M. В этом пределе

интегралы (15.11.6) — (15.11.8) стремятся к значениям [295] [1])

$$\rho \to A' e^{\mu/kT_M} \mu^{5/2-B} kT_1 \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi T_1}{T_M}\right) \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{\pi k T_1}{\mu}\left(B - \frac{5}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi T_1}{T_M}\right) + \frac{3kT_M}{2\mu}\left(B - \frac{1}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right\}, \tag{15.11.10}$$

$$p \to A' e^{\mu/kT_M} \mu^{5/2-B} kT_1 \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi T_1}{T_M}\right)\left\{\frac{kT_M}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right\}, \tag{15.11.11}$$

$$\mu n \to A' e^{\mu/kT_M} \mu^{5/2-B} kT_1 \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi T_1}{T_M}\right) \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{\pi k T_1}{\mu}\left(B - \frac{3}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi T_1}{T_M}\right) + \frac{3kT_M}{2\mu}\left(B - \frac{1}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right\}, \tag{15.11.12}$$

где $A' = (kT_M)^{3/2}\,\hbar^{-3}\,(8\pi)^{-1/2}\,A$. При этом энтропия (15.11.9) принимает значение

$$\sigma = \frac{T_M}{T_1} - \pi \operatorname{ctg}\frac{\pi T_1}{T_M}. \tag{15.11.13}$$

Поскольку энтропия σ очень велика, начальная температура T_1 очень близка к максимальной температуре T_M:

$$\frac{T_1}{T_M} \approx 1 - \frac{1}{\sigma} + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right). \tag{15.11.14}$$

При конечном значении начальной температуры вклад мезонов, лептонов и фотонов в плотность энергии и давление в пределе $t \to 0$ пренебрежимо мал по сравнению с барионным вкладом (15.11.10) и (15.11.11), что оправдывает пренебрежение всеми частицами, кроме барионов, в вышеприведенных вычислениях. Плотность барионного числа должна меняться как R^{-3}, и поэтому из (15.11.12) и (15.11.10) следует, что при $R \to 0$

$$\mu \to 3kT_M \,|\ln R\,| \tag{15.11.15}$$

и

$$\rho \to \mu n \sim R^{-3}\,|\ln R\,|. \tag{15.11.16}$$

Уравнение Эйнштейна (15.1.20) тогда имеет решение (при $k = 0$) вида [295—297]

$$R \sim t^{2/3}\,|\ln t\,|^{1/2} \tag{15.11.17}$$

отличие от решения $R \sim t^{1/2}$, которое ожидается в модели элементарных частиц.

[1]) Случай нулевой плотности барионного числа и $B = {}^5/_2$ рассмотрен Хагедорном [296]; см. также [297].

Как мы можем выяснить, какая из моделей очень ранней Вселенной лучше? В § 6 этой главы было показано, что большинство составляющих Вселенной было в тепловом равновесии при температуре выше 10^{12} К, так что современное содержимое Вселенной большей частью зависит только от значения энтропии на один барион и, возможно, от отношения лептонного числа к барионному числу в горячей ранней Вселенной. Чтобы узнать что-нибудь относительно эволюции Вселенной до того, как она остыла до 10^{12} К, нужно искать реликтовые частицы, которые могли выйти из теплового равновесия до падения температуры ниже 10^{12} К.

Одной возможной реликтовой частицей является кварк — гипотетическая фундаментальная частица сильных взаимодействий. Если кварки действительно могут существовать как свободные частицы, то по оценке Я. Б. Зельдовича [298] на основе того, что мы здесь называем моделью элементарных частиц, плотность остаточных кварков, избежавших слияния в нуклоны в ранней Вселенной, должна быть того же порядка, что и наблюдаемая сейчас плотность атомов золота. Усилия по обнаружению кварков в природе не увенчались успехом, из чего можно заключить, что либо свободных кварков не существует, либо температурная история очень ранней Вселенной сильно отличается от (15.11.14).

Другая, менее экзотическая реликтовая частица — гравитон. Из формулы (15.10.42) видно, что в неидеальной жидкости с вязкостью сдвига η среднее время свободного пробега гравитона [287]

$$\tau_g = 16\pi G\eta^{-1}. \tag{15.11.18}$$

Если τ_g ненамного больше времени расширения t, то перенос гравитонами импульса будет создавать в среде вязкость

$$\eta = \frac{4}{15} aT^4\tau_g. \tag{15.11.19}$$

Исключая η из этих двух уравнений, получаем [268]

$$\tau_g = \left(\frac{64}{15}\pi GaT^4\right)^{-1/2}. \tag{15.11.20}$$

В модели элементарных частиц из формул (15.11.20) и (15.11.14) следует отношение среднего времени свободного пробега гравитона к времени расширения:

$$\frac{\tau_g}{t} = \left(\frac{4\mathscr{N}}{5}\right)^{1/2}. \tag{15.11.21}$$

Если число $\mathscr{N}$ не слишком велико, τ_g не будет намного больше t, так что формулы (15.11.19), (15.11.20) будут приближенно верны и, следовательно, $\tau_g = O(t)$ при $t \to 0$. Тогда в модели элементарных частиц оптическая толща $\int \tau_g^{-1}\, dt$ очень ранней Вселенной для гравитационного излучения расходится логарифмически при

$t \to 0$, и современная Вселенная должна содержать остаточное гравитационное излучение черного тела [299—304] с температурой

$$T_{g0} = \frac{(TR)_{t\to 0}}{R_0} = \left(\frac{\mathscr{N}}{2}\right)^{-1/3} T_{\gamma 0}. \qquad (15.11.22)$$

Например, если $\mathscr{N} = 26$ и $T_{\gamma 0} = 2{,}7$ К, то современная температура фона гравитационного излучения около 0,9 К. В модели составных частиц, напротив, $RT \to 0$ при $t \to 0$, и поэтому, даже если Вселенная обладает оптической толщей по отношению к гравитационному излучению, современная температура гравитационного фона будет много меньше, чем значение (15.11.22). Таким образом, наличие или отсутствие фона гравитационного излучения с температурой порядка 1 К дало бы ясные указания о поведении вещества в очень ранней Вселенной. К сожалению, сейчас не видно никакого метода для непосредственного детектирования фона гравитационного излучения при 1 К [299—304]. Его наиболее значительным проявлением было бы некоторое сокращение временного масштаба расширения в эру преобладания излучения, что привело бы к очень небольшому увеличению количества космического гелия.

Возможно, что тепло, соответствующее огромному значению энтропии микроволнового фона, приходящейся на один барион, служит самым подходящим ключом к очень ранней истории Вселенной. Конечно, не исключено, что эта теплота была заложена в самой начальной сингулярности, и мы должны рассматривать σ как такую же безразмерную фундаментальную постоянную, как и постоянная тонкой структуры. Однако гораздо привлекательнее предположить, что современная энтропия на один барион порождена физическими диссипативными процессами, действовавшими в ранней или очень ранней Вселенной.

К одному из таких недиабатических механизмов возникновения энтропии приводит действие второй (объемной) вязкости. В § 10 этой главы было показано, что вязкость сдвига и теплопроводность не играют никакой роли в модели Робертсона — Уокера. Единственный диссипативный эффект, входящий в тензор энергии-импульса при изотропном однородном расширении, представлен в (2.11.21) членом, пропорциональным объемной вязкости ζ, который в произвольных координатах принимает вид

$$\Delta T^{\mu\nu} = -\zeta (g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu) U^\lambda{}_{;\lambda},$$

где U^μ — вектор 4-скорости жидкости. В модели Робертсона — Уокера $U^\lambda{}_{;\lambda} = 3\dot{R}/R$ и тензор энергии-импульса равен

$$T^{\mu\nu} \equiv \rho U^\mu U^\nu + \left(p - 3\zeta \frac{\dot{R}}{R}\right)(g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu).$$

Весь эффект объемной вязкости, таким образом, состоит в замене давления p на

$$p^* = p - 3\zeta \frac{\dot{R}}{R}. \qquad (15.11.23)$$

Поэтому объемная вязкость никак не проявляется в формуле (15.1.20), выражающей $\dot{R}$ через ρ. Однако она появляется в уравнении сохранения энергии, которое теперь вместо (15.1.21) имеет вид

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3p^* R^2 = -3pR^2 + 9\zeta \dot{R} R. \qquad (15.11.24)$$

Поскольку $n \sim R^{-3}$, удельная энтропия будет в общем случае расти со скоростью

$$\dot{\sigma} \equiv \frac{1}{kT}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{n}\right) + p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{\dot{R}}{nR^2 kT}\left[\frac{d}{dR}(\rho R^3) + p\frac{d}{dR}R^3\right],$$

а с помощью (15.11.24) отсюда получим [268], что

$$\dot{\sigma} = \frac{9\zeta(\dot{R})^2}{nkTR^2}. \qquad (15.11.25)$$

Например, для жидкости, состоящей из частиц вещества, имеющих очень короткое среднее время свободного пробега, и из фотонов со средним временем пробега τ, объемная вязкость равна [268]

$$\zeta = 4aT^4\tau\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_n\right]^2, \qquad (15.11.26)$$

и уравнение (15.11.25) приводит к следующему показателю роста энтропии:

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \frac{3\tau\dot{R}^2}{R^2}\left[1 - 3\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_n\right]^2 \frac{4aT^3}{3nk\sigma}. \qquad (15.11.27)$$

(Для нейтрино — то же, умноженное на $^7/_8$.) Рост энтропии можно представить себе следующим образом: частота свободного фотона изменяется между столкновениями как R^{-1}, а в то же время температура среды не может меняться как R^{-1}, если $(\partial p/\partial \rho)_n$ не принимает значения $^1/_3$, и поэтому расширение Вселенной все время выводит излучение и вещество из теплового равновесия между ними (см. в связи с этим [305, 306]). Однако в модели элементарных частиц величина $(\partial p/\partial \rho)_n$ в очень ранней Вселенной близка к $^1/_3$, в то время как в модели составных частиц доля фотонов (или нейтрино) в полной энтропии очень мала, так что мал и последний множитель в (15.11.27). Оценки $\dot{\sigma}/\sigma$ не дают оснований считать, что высокая энтропия современной Вселенной может быть приписана объемной вязкости [268].

Если нынешняя энтропия Вселенной не обусловлена объемной вязкостью, тогда есть еще возможность, что она порождена эффектами вязкости сдвига и теплопроводности при первоначальном анизотропном или неоднородном расширении. Возможно даже, что именно эти диссипативные процессы привели к сглаживанию первоначальной анизотропии и возникновению столь высокой изотропии, наблюдаемой в фоне микроволнового излучения. Мизнер [307] (см. также [308—310]) показал, что вязкость нейтрино, действуя до того, как температура упала до $2 \cdot 10^{10}$ К, снизила бы к настоящему времени менее чем до 0,03% анизотропию излучения черного тела, возникшую при первоначально однородном, но анизотропном расширении (см., однако, стр. 563).

Другое возможное объяснение наблюдаемой высокой энтропии на барион состоит в том, что средняя плотность барионного числа действительно исчезающе мала, как в теориях Клейна [311—317] и Альфвена [318—319]. Когда (и если) температура была около 10^{13} К, суммарная плотность нуклонов и антинуклонов могла бы быть порядка

$$n_N + n_{\overline{N}} \sim \frac{aT^3}{k} \sim \sigma n_B \sim \sigma \left(n_N - n_{\overline{N}}\right),$$

и если энтропия σ оставалась постоянной, то относительный избыток нуклонов над антинуклонами имел бы весьма малое значение:

$$\frac{n_N - n_{\overline{N}}}{n_N + n_{\overline{N}}} \sim \frac{1}{\sigma} \sim \text{от } 10^{-8} \text{ до } 10^{-9}.$$

В симметричной космологии Клейна и Альфвена этот малый избыток нуклонов интерпретируется как чисто локальное явление — предполагается, что в других частях Вселенной существует небольшой избыток антинуклонов, что к настоящему времени привело к образованию галактик антивещества. Детальные вычисления Онеса [320] показывают, что вполне допустимые физические процессы в симметричной плазме могли бы вызвать требуемое малое разделение вещества и антивещества. К сожалению, наблюдательная астрономия не дает пока какой-либо ясной информации о том, из чего состоят удаленные галактики — из вещества или антивещества. Только гамма-спектры содержат намек [321] на возможность существования антивещества в космологических масштабах.

Раз уж мы имеем смелость фантазировать относительно очень ранней Вселенной, то мы можем позволить себе распространить наши спекуляции вплоть до самого начала. Из решений Фридмана видно, что при $t \to 0$ в модели элементарных частиц $R \sim t^{1/2}$, а в модели составных частиц $R \sim t^{2/3} \mid \ln t \mid^{1/2}$. Из всего, что мы знаем, следует вывод: сингулярность, по-видимому, существует, но при этом естественно стремление узнать, можно ли ее избежать.

Одна возможность избежать сингулярности в очень ранней Вселенной состоит в том, чтобы плотность энергии ρ обратилась в нуль, например, из-за какой-то весьма короткодействующей силы притяжения, при которой энергия связи перекрывает массы покоя частиц. Если ρ исчезает при некотором критическом значении $R_{\text{кр}}$ масштабного фактора $R(t)$, то $\dot{R}$ также обращается в нуль при $R_{\text{кр}}$ (или при $R \neq 0$ вблизи $R_{\text{кр}}$), так что до начала нынешней фазы роста R могло бы происходить его убывание к $R_{\text{кр}}$. Даже если плотность энергии всегда положительна, можно все же представить, что Вселенная могла избежать общей сингулярности из-за анизотропии или неоднородности, исключающих простые фридмановские решения. Пенроуз [322, 323] и Хоукинг [325] [1]) доказали ряд мощных теорем, из которых следует, что сингулярность неизбежна при весьма общих условиях. Например, одна из теорем Хоукинга утверждает неизбежность сингулярности при условиях, что справедлива общая теория относительности, что каждая точка пространства-времени имеет малую окрестность, которую ни одна времениподобная или изотропная кривая не пересекает более одного раза, что тензор энергии-импульса удовлетворяет условию положительной определенности

$$\left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\lambda}\right] W^{\mu} W^{\nu} \geqslant 0 \qquad (15.11.27\text{a})$$

для всех векторов W^{μ} с $W^{\mu} W_{\mu} < 0$ и что есть точка p, такая, что все направленные в прошлое времениподобные геодезические, проходящие через p, сходятся снова в некоторой компактной области прошлого точки p. Последнее условие удовлетворяется, если материи достаточно для того, чтобы мировые линии, проходящие через p, сходились в прошлом; Хоукинг и Эллис [331] показали, что плотности энергии космического микроволнового фона в прошлом достаточно для того, чтобы удовлетворить этому условию. Однако важно отметить, что теоремы Пенроуза — Хоукинга не утверждают, что имеется сингулярность в прошлом, захватывающая все пространство, как в решениях Фридмана; они утверждают лишь, что где-то имеется какая-то сингулярность. Эта сингулярность может представлять собой просто одну или несколько изолированных точек, ведущих себя как коллапс звезды при обращении времени.

Наконец, может оказаться, что классическая общая теория относительности сама теряет силу в очень ранней Вселенной. Одна из простых возможностей для того, чтобы это случилось,— эффект космологической постоянной — обсуждается в следующей главе. Еще более интригующая идея состоит в том, что могли оказаться важными квантовые эффекты. Такое предположение

[1]) См. также [324, 326—330].

исключало бы любую чисто классическую полевую теорию гравитации. Для системы, состоящей из точечных частиц со средней энергией частицы E, относительный порядок гравитационных «радиационных поправок» будет определяться «гравитационной постоянной тонкой структуры»

$$\alpha_g \equiv \frac{GE^2}{\hbar},$$

аналогичной обычной электромагнитной постоянной тонкой структуры $^1/_{137}$. Квантовые эффекты станут существенными, когда α_g будет порядка единицы или когда E достигнет критического значения (в единицах СГС)

$$E_{\text{кр}} = \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{1/2} = 1{,}22 \cdot 10^{28} \text{ эВ}, \qquad (15.11.28)$$

соответствующего температуре $1{,}4 \cdot 10^{32}$ К. В модели составных частиц температура никогда не поднимается так высоко, но в самом начале фридмановской Вселенной, состоящей из конечного числа $\mathscr{N}$ сортов элементарных частиц, kT будет больше, чем $E_{\text{кр}}$. В действительности в это время становится существенным множество других квантовых эффектов (см., например, [332—336]). Например, частота волновой функции типичной частицы при температуре T равна $kT/\hbar$, а в то же время, согласно (15.11.4), относительная скорость расширения Вселенной равна

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{2t} = \left(\frac{4\pi G \mathscr{N} a T^4}{3}\right)^{1/2}.$$

Вспоминая, что $a = \pi^2 k^4 / 15\hbar^3$, получаем отношение этих величин:

$$\frac{kT/\hbar}{\dot{R}/R} = \left(\frac{45\hbar}{4\pi^3 \mathscr{N} G (kT)^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{45}{4\pi^3 \mathscr{N}}\right)^{1/2} \left(\frac{E_{\text{кр}}}{kT}\right).$$

Следовательно, при температуре выше $T_{\text{кр}}$ волновая функция типичной частицы осциллирует медленнее, чем расширяется Вселенная, и для частиц, находящихся в тепловом равновесии в это время, никакое классическое или полуклассическое описание невозможно [1]).

Рассуждения о том, что происходило в самом начале, естественно, приводят к спекуляциям относительно того, что будет в самом конце (см., например, [339]). Мы видели в § 1 этой главы, что расширение фридмановской Вселенной с $k = +1$ постепенно

[1]) На более ранних этапах расширения Вселенной решающее значение могут приобрести процессы квантового рождения пар частиц за счет нестационарности сильного («внешнего») космологического гравитационного поля. Например, такие процессы могут в принципе нарушить условие (15.11.27а) (см., например, [337*, 338*]), являющееся существенной предпосылкой почти всех теорем о существовании сингулярностей.— *Прим. перев.*

прекращается и она начинает сжиматься. Если принимать такие модели буквально, то в них требуется, чтобы через некоторое конечное время в будущем порядка $75 \cdot 10^9$ лет при $H_0 = 75$ км/(с·Мпс) и $q_0 = 1$ достигалась сингулярность $R = 0$. Если все же отрицательная плотность энергии, анизотропия или квантовые эффекты приводят к возможности избежать этой сингулярности в прошлом, то, по-видимому, такая возможность должна быть и в будущем. В этом случае можно было бы предположить, что Вселенная совершает осцилляции с вечно сменяющимися периодами расширения и сжатия. Могут ли эти осцилляции быть периодическими? Иначе говоря, можем ли мы прийти к стационарной картине Вселенной, рассматривая космическую историю в достаточно больших масштабах времени? Одно очевидное возражение состоит в том, что при каждом цикле энтропия, по-видимому, растет, а не убывает. Высказывалась мысль, что энтропия, возможно, убывает в фазах сжатия [340] [1]), поскольку именно расширение Вселенной, вызывая остывание, устанавливает направление времени в термодинамических процессах. Однако нет никакой разработанной модели, которая описывала, как это, хотя бы примерно, может происходить. В частности, трудно представить себе, как это направление времени могло бы измениться на обратное как раз в тот момент, когда $R(t)$ достигает своего максимального значения и когда температура фонового излучения так мала (порядка 1 К), что оно вряд ли может влиять на земные процессы. Если все же каким-то образом второе начало термодинамики может быть обойдено, то любые частицы, которые не приходят в тепловое равновесие в течение фазы сжатия, как (быть может) гравитоны или нейтрино, должны существовать в больших количествах: если в данном сопутствующем объеме в течение каждого цикла рождается N частиц и если вероятность поглощения одной такой частицы в течение цикла равна P, то в этом объеме должно быть в среднем N/P частиц для того, чтобы концентрация их была более или менее постоянной. Поэтому не исключается, что когда-нибудь мы, возможно, обнаружим остатки предыдущих циклов истории Вселенной. Однако в настоящее время подобные вопросы остаются космологическими фантазиями.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА [2])

См. литературу к гл. 11 и 14. Ниже приведены основные книги и статьи по специальным вопросам этой главы.

[1]) См. также [341] и статьи в книге [342].

[2]) Здесь и далее работы, отмеченные звездочками, добавлены редактором перевода и переводчиками.— *Прим. ред.*

Средняя плотность Вселенной

Abell G. O., Clustering of Galaxies, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 3, ed. L. Goldberg, Annual Reviews, Inc., 1965, p. 1.
Burbidge G., Sargent W. L. W., The Case of the Missing Mass, Comments Astrophys. and Space Phys., **1**, 220 (1969).
Sunyaev R. A., Zeldovich Ya. B., An Open Universe? Comments Astrophys. and Space Phys., **1**, 159 (1969).

Межгалактическая среда

Burbidge G. R., Intergalactic Matter and Radiation, I.A.U. Symposium No. 44, Uppsala, Sweden, August 1970 (Dodrecht,, Netherlands 1972), p. 520.
Field G. B., The Physics of the Interstellar and Intergalactic Medium, в книге Astrophysics and General Relativity (1968 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics), Vol. 1. ed. M. Chretien, S. Deser, and J Goldstein, N. Y., 1969, p. 59.
Field G. B., Intergalactic Matter, в книге Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Annual Reviews, Inc., 1972.
Gould R. J., Intergalactic Matter and Radiation, в книге Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 6, ed. L. Goldberg, Annual Reviews, Inc., 1968, p. 195.

Космический микроволновый фон

Partridge R. P., American Scientist, **57**, 3 (1969).
Peebles P.J.E., Cosmology and Infrared Astronomy: Closing the Gap between Theory and Practice, Comments Astrophys. and Space Phys., 3, 20 (1971).
Sunyaev R. A., Zeldovich Ya. B., The Spectrum of Primordial Radiation, its Distortions and their Significance, Comments Astrophys. and Space Phys., 2, 66 (1970).
**Penzias A. A.*, Cosmology and Microwave Astronomy, в книге Cosmology, Fusion and Other Matters, George Gamow Memorial Volume, Adam Hilger Ltd., London, 1972, p. 29.

Ранняя Вселенная

Harrison E. R., Comments on the Big-bang, Nature, 228, 258 (1970).
Novikov I. D., Zeldovich Ya. B., Cosmology, в книге Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 5, Annual Reviews, Inc., 1967, p. 627.
Zeldovich Ya. B., The Universe as a Hot Laboratory for the Nuclear and Particle Physicist, Comments Astrophys. and Space Phys., 2, 12 (1970).
Зельдович Я. Б., Горячая модель Вселенной, УФН, 89, 647 (1966).

Происхождение и содержание элементов

Aller L. H., Abundance of the Elements, Interscience Publishers, 1961.
Aller L. H., The Abundance of Elements in the Solar Atmosphere, в книге Advances in Astronomy and Astrophysics, Vol. 3, Academic Press, 1965, p. 1.
Burbidge G. R., Cosmic Helium, Comments Astrophys. and Space Phys., **1**, 101 (1969).
Cameron A. G., Processes of Nucleosynthesis, Comments Astrophys. and Space Phys., 2, 153 (1970).

Clayton D. D., Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis, McGraw-Hill, 1968.
Danziger I. J., The Cosmic Abundance of Helium, в книге Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 8, Annual Reviews, Inc., 1970, p. 161.
Fowler W. A., How Now, No Cosmological Helium?, Comments Astrophys. and Space Phys., 2, 134 (1970).
Fowler W. A., *Stephens W. E.*, Resource Letter OE-1 on Origin of Elements, Am. J. Phys., **36**, 1 (1968).
Tayler R. J., The Origin of the Elements, перепечатано в книге Astrophysics, W.A. Benjamin, 1969.
**Fowler W. A.*, «New Observations and Old Nucleocosmochronologies», в книге Cosmology, Fusion and Other Matters. George Gamow Memorial Volume, Adam Hilger Ltd., 1972, p. 67.

Флуктуации и образование галактик

Field G. B., The Formation and Early Dynamical History of Galaxies, в книге Stars and Stellar Systems, Vol. IX: Galaxies and the Universe, ed. A. and M. Sandage, в печати.
Harrison E. R., Normal Modes of Vibration of the Universe, Rev. Mod. Phys., 39, 862 (1967).
Layzer D., Cosmogonic Processes, в книге Astrophysics and General Relativity (1968 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics), Vol. 2, ed. M. Chretion, S. Deser, J. Goldstein, Gordon and Breach Science Publishers, 1969.
Layzer D., A Unified Approach to Cosmology, в книге Relativity Theory and Astrophysics. 1. Relativity and Cosmology, ed. J. Ehlers, American Mathematical Society, 1967, p. 237.
Oort J. H., Galaxies and the Universe, Science, **170**, 1363 (1970).
Rees M. J., *Sciama D. W.*, The Evolution of Density Fluctuations in the Universe, Comments Astrophys. and Space Phys., **1**, 140, 153 (1969).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА [1])

1. *Friedmann A.*, Zs. Phys., **10**, 377 (1922); **21**, 326 (1924) [см. перевод этих статей в УФН, 80, 439, 446 (1963)].
2. *McCrea W. H.*, *Milne E. A.*, Quart. J. Math. (Oxford), 5, 73 (1934).
3. *Milne E. A.*, Quart. J. Math. (Oxford), 5, 64 (1934).
4. *Abell G. O.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., **3** (1965).
5. *Burbidge G. R.*, *Sargent W. L. W.*, Comments Astrophys. and Space Phys., **1**, 220 (1969).
6. *Kiang T.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **122**, 263 (1961).
7. *Zwicky F.*, Helv. Phys. Acta, **6**, 110 (1933).
8. *Burbidge E. M.*, *Burbidge G. R.*, *Fish R. A.*, Ap. J., **133**, 393 (1961).
9. *Oort J. H.*, в книге La Structure et L'Evolution de l'Universe, Institut International de Physique Solvay, ed. R. Stoops, 1958, p. 163.
10. *Van den Bergh S.*, Zs. Astrophys., **66**, 567 (1961).
11. *Noonan T. W.*, Pub. Astron. Soc. Pac., **83**, 31 (1971).
12. *Shapiro S. L.*, Astron. J., **76**, 291 (1971).
13. *Burbidge G. R.*, *Burbidge E. M.*, Ap. J., **130**, 629 (1959).
14. *Караченцев И. Д.*, Астрофизика, 2, 81 (1966).
15. *Van den Bergh S.*, Zs. Astrophys., 53, 219 (1961).
16. *Gursky H.*, *Kellogg E.*, *Murray S.*, *Leong C.*, *Tanenbaum H.*, *Giacconi R.* Ap. J., **167**, L81 (1971).

[1]) Ap. J = Astrophys. J. — *Ред.*

17. *Meekins J. F., Fritz G., Chubb T. A., Friedman H., Henry R. C.*, Nature, **231**, 107 (1971).
18. *Felton T. F., Gould R. J., Stein W. A., Woolf N. J.*, Ap. J., **146**, 955 (1966).
19. *Woolf N. J.*, Ap. J., **148**, 287 (1967).
20. *Turnrose B., Rood H. J.*, Ap. J., **159**, 773 (1970).
21. *Noerdlinger P. D.*, Nature, **232**, 393 (1971).
22. *Gott J. R., III, Gunn J. E.*, Ap. J., **169**, L13 (1971).
23. *Welch G. A., Sastry G. N.*, Ap. J., **169**, L3 (1971).
24. *Goldsmith D., Silk J.*, Ap. J., **172**, 563 (1972).
25. *Field G. B.*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., Annual Reviews, Inc. Palo Alto, Cal., 1972.
26. *Амбарцумян В. А.*, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ. мат. **11**, 9 (1958).
27. *Roach F. E., Smith L. L.*, Geophys. J. Roy. Astron. Soc., **15**, 227 (1968).
28. *Peebles P. J. E., Partridge R. B.*, Ap. J., **148**, 713 (1967).
29. *Ryle M.*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., **6**, 256 (1968).
30. *Davidson W., Narlikar J. V.*, в книге Astrophysics, W.A. Benjamin, 1969, § 2.5, 2.6.
31. *Felten J. E.*, Ap. J., **144**, 241 (1966).
32. *de Vaucouleurs G.*, Ann. Astrophys., **12**, 162 (1949).
33. *Brecher K., Burbidge G.*, Comments Astrophys. and Space Phys., **2**, 75 (1970).
34. *Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И.*, Происхождение космических лучей, Изд-во АН СССР, 1963.
35. *Field G. B., Rees M. J., Sciama D. W.*, Comments Astrophys. and Space Phys., **1**, 187 (1969).
36. *Sciama D. W., Field G. B., Rees M. J.*, Phys. Rev. Lett., **23**, 241 (1969).
37. *Rees M. J.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **154**, 187 (1971).
38. *Longair M. S.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **133**, 421(1966).
39. *Doroshkevich A. G., Longair M. S., Zeldovich Ya. B.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **147**, 139 (1970).
40. *Schmidt M.*, Ap. J., **151**, 393 (1968); Ann. Rev. Astron. and Astrophys., **7**, 527 (1969); Ap. J., **162**, 371 (1970).
41. *Rutherford E.*, Nature, **123**, 313 (1929).
42. *Patterson C. C.*, Geochim et Cosmochim. Acta, **10**, 230 (1956).
43. *Ostic R. G., Russell R. D., Reynolds D. H.*, Nature, **199**, 1150 (1963).
44. *Burbidge E. M., Burbidge G. R., Fowler W. A., Hoyle F.*, Rev. Mod. Phys., 29, 547 (1957).
45. *Fowler W. A., Hoyle F.*, Ann. Phys., **10**, 280 (1960).
46. *Seeger P. A., Schramm D. N.*, Ap. J., **160**, L157 (1970).
47. *Clayton D. D.*, Ap. J., **139**, 637 (1964).
48. *Dicke R. H.*, Nature, **194**, 329 (1962); Ap. J., **155**, 123 (1969).
49. *Iben I., Jr.*, Scientific American, July 1970, p. 27.
50. *Iben I., Jr., Rood R. T.*, Nature, **223**, 933 (1969); Ap. J. **161**, 587 (1970).
51. *Rindler W.*, Mon. Not. Roy. Ast. Soc., **116**, 663 (1956).
52. *Schiff L. I.*, Quantum Mechanics, 3rd ed., McGraw-Hill, 1968, p. 531 (см. перевод 1-го изд.: *Шифф Л. И.*, Квантовая механика, ИЛ, 1959, стр. 494).
53. *Einstein A.*, Phys. Zs., 18, 121 (1917).
54. *Field G. B.*, Ap. J., **129**, 525 (1959).
55. *Field G. B.*, Ap. J., **135**, 684 (1962).
56. *Koehler J. A., Robinson B. J.*, Ap. J., **146**, 488 (1966).
57. *Goldstein S.*, Ap. J., **138**, 978 (1963).
58. *Allen R.*, Astron. and Astrophys., **3**, 316, 382 (1969).
59. *Penzias A. A., Scott E. H., III*, Ap. J., **153**, L7 (1968).
60. *Davies R. D., Jennison R. C.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **128**, 123 (1964).
61. *Koehler J. A.*, Ap. J., **146**, 504 (1966).
62. *Heiles C., Miley G. K.*, Ap. J., **160**, L83 (1970).

63. *Penzias A. A., Wilson R. W.*, Ap. J., **156**, 799 (1969).
64. *Gunn J. E., Peterson B. A.*, Ap. J., **142**, 1633 (1965).
65. *Scheuer P. A. G.*, Nature, **207**, 963 (1965).
66. *Oke J. B.*, Ap. J., **145**, 668 (1966).
67. *Burbidge G., Burbidge M. E.*, Quasi-Stellar Objects, W.H. Freeman and Co., 1967.
68. *Wampler E. J.*, Ap. J., **147**, 1 (1967).
69. *Field G. B., Solomon P. M., Wampler E. J.*, Ap. J., **145**, 351 (1966).
70. *Bahcall J. N., Salpeter E. E.*, Ap. J., **142**, 1677 (1965).
71. *Wagoner R. V.*, Ap. J., **149**, 465 (1967).
72. *Peebles P. J.*, Ap. J., **157**, 45 (1969).
73. *Burbidge G. R., Burbidge M.*, Nature, **222**, 735 (1969); Ann. Rev. Astron and Astrophys., 8, 309 (1970).
74. *Шкловский И. С.*, Астрон. журн., **46**, 865 (1969).
75. *Rees M.*, Ap. J., **160**, L29 (1970).
76. *Burbidge G. B.*, I.A.U. Symposium No. 44, External Galaxies and Quasi-Stellar Objects, Uppsala, Sweden, August, 1970.
77. *Bahcall J. N.*, Comments Astrophys. and Space Phys., **2**, 221 (1970).
78. *Karzas W. J., Latter R.*, Ap. J. Suppl., **6**, 167 (1961).
79. *Field G. B., Henry R. C.*, Ap. J., **140**, 1002 (1964).
80. *Brecher K., Burbidge G.*, Comments Astrophys. and Space Phys., **2**, 75 (1970).
81. *Schwartz D. A.*, Ap. J., **162**, 439 (1970).
82. *Cowsik R.*, 12th International Conference on Cosmic Rays (Hobart, Tasmania, August, 1971).
83. *Cowsik R., Kobetich R. J.*, Ap. J., **177**, 585 (1972).
84. *Гинзбург В. Л., Озерной Л. М.*, Астрон. журн. **42**, 943 (1965).
85. *Gould R. J., Ramsay W.*, Ap. J., **144**, 587 (1966).
86. *Weymann R.*, Ap. J., **145**, 560 (1966); **147**, 887 (1967).
87. *Arons J., McCray R.*, Astrophys. Lett., 5, 123 (1969).
88. *Bergeron J.*, Astron. and Astrophys., 3, 364 (1969).
89. *Noerdlinger P. D.*, Ap. J., **156**, 841 (1969).
90. *Felten J. E., Bergeron J.*, Astrophys. Lett., **4**, 155 (1969).
91. *Rees M. J.*, Astrophys. Lett., **4**, 61 (1969).
92. *Bahcall J. N., Salpeter E. E.*, Ap. J., **142**, 1677 (1965).
93. *Haddock F. T., Sciama D. W.*, Phys. Rev. Lett., **14**, 1007 (1965).
94. *Spitzer L., Jr.*, Physics of Fully Lonized Gases, Interscience Publishers, 1956, Ch. 4 (см. перевод: *Спитцер Л.*, Физика полностью ионизованного газа, ИЛ, 1957).
95. *Kellerman K. I., Pauliny-Toth I. I. K.*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., **6**, 417 (1968).
96. *Bahcall J. N., Salpeter E. E.*, Ap. J., **142**, 1677 (1965).
97. *Noerdlinger D. D.*, Ap. J., **157**, 495 (1969).
98. *Sofue Y., Fujimoto M., Kawabata K.*, Pub. Astron. Soc. Japan, **20**, 368 (1969).
99. *Kawabata K., Fujimoto M., Sofue Y., Fukui M.*, Pub. Astron. Soc. Japan, **21**, 293 (1969).
100. *Reinhardt M., Thiel M.*, Astrophys. Lett., 7, 101 (1970).
101. *Arp H.*, Nature, **232**, 463 (1971).
102. *Gamow G.*, Phys. Rev., **70**, 572 (1946); **74**, 505 (1948).
103. *Alpher R. A., Bethe H., Gamow G.*, Phys. Rev., **73**, 803 (1948).
104. *Alpher R. A., Herman R. C.*, Nature, **162**, 774 (1948); Phys. Rev., **75**, 1089 (1949).
105. *Alpher R. A., Herman R. C., Gamow G.*, Phys. Rev., **74**, 1198 (1948); **75**, 332A (1949); **75**, 701 (1949).
106. *Gamow G.*, Rev. Mod. Phys., **21**, 367 (1949).
107. *Alpher R. A.*, Phys. Rev., **74**, 1577 (1948).
108. *Alpher R. A., Herman R. C.*, Rev. Mod. Phys., **22**, 153 (1950).

109. *Penzias A. A., Wilson R. W.*, Ap. J., **142**, 419 (1965).
110. *Dicke R. H., Peebles P. J. E., Roll P. G., Wilkinson D. T.*, Ap. J., **142**, 414 (1965).
111. *Howell T. F., Shakeshaft J. R.*, Nature, **216**, 753 (1967).
112. *Penzias A. A., Wilson R. W.*, Astron. J., **72**, 315 (1967).
113. *Howell T. F., Shakeshaft J. R.*, Nature, **210**, 1318 (1966).
114. *Roll P. G., Wilkinson D. T.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 405 (1966).
115. *Stokes R. A., Partridge R. B., Wilkinson D. T.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 1199 (1967).
116. *Welch W. J., Keachie S., Thornton D. D., Wrixon G.*, Phys. Rev. Lett., **18**, 1068 (1967).
117. *Ewing M. S., Burke B. F., StaelinD. H.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 1251 (1967).
118. *Wilkinson D. T.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 1195 (1967).
119. *Пузанов В. И., Саломонович А. Е., Старкович К. С.*, Астрон. журн., **44**, 1128 (1967).
120. *Кисляков А. Г., Чернышев В. И., Лебский Ю. В., Мальцев В. А., Серов Н. В.*, Астрон. журн., **48**, 39 (1971).
121. *Boynton P. F., Stokes R. A., Wilkinson D. T.*, Phys. Rev. Lett., **21**, 462 (1968).
122. *Millea M. F., McColl M., Pederson R. J., Vernon F. Y.*, Jr., Phys. Rev. Lett., **26**, 919 (1971).
123. *McKellar A.*, Publs. Dominion Astrophys. Observatory (Victoria, B. C.), **7**, 251 (1941).
124. *Field G. B., Hitchcock J. L.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 817 (1966).
125. *Thaddeus P., Clauser J. F.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 819 (1966).
126. *Bortolot V. J., Clauser J. F., Thaddeus P.*, Phys. Rev. Lett., **22**, 307 (1969).
127. *Shivanandan K., Houck J. R., Harwit M. O.*, Phys. Rev. Lett., **21**, 1460 (1968).
128. *Houck J. R., Harwit M. O.*, Ap. J., **157**, L45 (1969).
129. *Harwit M. O., Houck J. R., Wagoner R. V.*, Nature, **228**, 451 (1970).
130. *Pipher J. L., Houck J. R., Jones B. W., Harwit M. O.*, Nature, **231**, 375 (1971).
131. *Muehlner D., Weiss R.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 742 (1970).
132. *Blair A. G., Beery J. G., Edeskuty F., Hiebert R. D., Shipley J. P., Williamson K. D., Jr.*, Phys. Rev. Lett., **27**, 1154 (1971).
133. *Muehlner D., Weiss R.*, Phys. Rev., **D7**, 326 (1973).
134. *Jenkins F. A., Wooldridge D. E.*, Phys. Rev., **53**, 137 (1938).
135. *Field G. B., Hitchcock J. L.*, Ap. J., **146**, 1 (1966).
136. *Woolf N. J.*, цитируется в [125].
137. *Шкловский И. С.*, Астрон. циркуляр № 364, 1966.
138. *Peebles P. J. E.*, Ap. J., **153**, 1 (1968).
139. *Сюняев Р. А.*, ДАН СССР, **179**, 45 (1968).
140. *Зельдович Я. Б., Курт В. Г., Сюняев Р. А.*, ЖЭТФ, **55**, 278 (1968).
141. *Partridge R. B., Peebles P. J. E.*, Ap. J., **148**, 377 (1967).
142. *Petrosian V., Bahcall J. N., Salpeter E. E.*, Ap. J., **155**, L57 (1969).
143. *Сюняев Р. А.*, Тезисы 5-й Международной конференции по теории относительности и гравитации, Тбилиси, 1968.
144. *Zeldovich Ya. B., Sunyaev R. A.*, Astrophys. and Space Sci., **4**, 285 (1969).
145. *Zeldovich Ya. B.*, Comments Astrophys. and Space Sci., **2**, 66 (1970).
146. *Rees M. J., Sciama D. W.*, Nature, **217**, 511 (1968).
147. *Sachs R. K., Wolfe A. M.*, Ap. J., **147**, 73 (1967).
148. *Wolfe A. M.*, Ap. J., **156**, 803 (1969).
149. *Conklin E. K., Bracewell R. N.*, Nature, **216**, 777 (1967).
150. *Парийский Ю. Н., Пятунина Т. Б.*, Астрон. журн., **47**, 1337 (1970).
151. *Conklin E. K., Bracewell R. N.*, Phys. Rev. Lett., **18**, 614 (1967).
152. *Penzias A. A., Schraml J., Wilson R. W.*, Ap. J., **157**, L49 (1969).
153. *Boynton P., Partridge R. B.*, частное сообщение.
154. *Epstein E. E.*, Ap. J., **148**, L157 (1967).

155. *Partridge R. B., Wilkinson D. T.*, Phys. Rev. Lett., 18, 557 (1967).
156. *Wilkinson D. T., Partridge R. B.*, цитируется в работе *Partridge R. B.*, Am. Sci., 57, 37 (1969).
157. *Wilson R. W., Penzias A. A.*, Science, **156**, 1100 (1967).
158. *Conklin E. K.*, Nature, **222**, 971 (1969).
159. *Boughn S. P., Fram D. M., Partridge R. B.*, Ap. J., **165**, 439 (1971).
160. *de Vaucouleurs G., Peters W. L.*, Nature, **220**, 868 (1968).
161. *Misner C.*, частное сообщение.
162. *Hoyle F., Wickramsinghe N. C.*, Nature, **214**, 969 (1967).
163. *Narlikar J. V., Wickramsinghe N. C.*, Nature, **216**, 43 (1967); **217**, 1235 (1968).
164. *Layzer D.*, Astrophys. Lett., **1**, 49 (1968).
165. *Gold T., Pacini F.*, Ap. J., **152**, L115 (1968).
166. *Wolfe A. M., Burbidge G. R.*, Ap. J., **156**, 345 (1969).
167. *Wagoner R.*, Nature, **224**, 481 (1969).
168. *Hazard C., Salpeter E. E.*, Ap. J., **157**, L87 (1969).
169. *Felten J. E., Morrison P.*, Ap. J., **146**, 686 (1966).
170. *Hoyle F.*, Phys. Rev. Lett., **15**, 131 (1965).
171. *Gould R. J.*, Phys. Rev. Lett., **15**, 511 (1965).
172. *Felten J. E.*, Phys. Rev. Lett., **15**, 1003 (1965).
173. *Brecher K., Morrison P.*, Ap. J., **150**, L61 (1967).
174. *Brecher K., Morrison P.*, Phys. Rev. Lett., **23**, 802 (1969).
175. *Byeram E. T., Chubb T. A., Friedman H.*, Science, **169**, 366 (1970).
176. *Greisen K.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 748 (1966).
177. *Stecker F. W.*, Phys. Rev. Lett., **21**, 1016 (1968).
178. *Зацепин Г. Т., Кузьмин В. А.*, Письма ЖЭТФ, **4**, 114 (1966).
179. *Hesse W. P., Caldwell D. O., Elings V. W., Morrison R. J., Murphy F. V., Worster B. W., Yount D. E.*, Phys. Rev. Lett., **25**, 613 (1970).
180. *Gould R. J., Schreder G. P.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 252 (1966).
181. *Jelley J. V.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 479 (1966).
182. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Статистическая физика, ГИТТЛ, М., 1951.
183. *Marshak R. E., Riazuddin, Ryan C. P.*, Theory of Weak Interactions in Particle Physics, Wiley-Interscience, 1969.
184. *Lyttleton R. A., Bondi H.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A252**, 313 (1959).
185. *Hughes V. W.*, в книге Gravitation and Relativity, W. A. Benjamin, 1964, p. 259 (см. перевод: Гравитация и относительность, «Мир», 1965).
186. *Alpher R. A., Follin J. W., Jr., Herman R. C.*, Phys. Rev., **92**, 1347 (1953).
187. *Peebles P. J. E.*, Ap. J., **146**, 542 (1966).
188. *Weinberg S.*, Phys. Rev., **128**, 1457 (1962).
189. *Bergkvist K. E.*, Topical Conference on Weak Interactions, CERN, Geneva, 1962, p. 91.
190. *Langer L. M., Moffat R. J. D.*, Phys. Rev., 88, 689 (1952).
191. *Bernstein J., Ruderman M., Feinberg G.*, Phys. Rev., **132**, 1227 (1963).
192. *Cowsik R., Pal Y., Tandon S. N.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 265 (1964).
193. *Константинов Б. П., Кочаров Г. Е.*, ЖЭТФ, **46**, 1470 (1964).
194. *Кочаров Г. Е., Старбунов Ю. Н.*, Изв. АН СССР, сер. физ., **32**, 1841 (1968).
195. *Clarke F. W.*, Bull. Phil. Soc. (Washington), **11**, 131 (1889).
196. *Suess H. E., Urey H. C.*, Rev. Mod. Phys., **28**, 53 (1956).
197. *Aller L. H.*, Abundance of the Elements, Interscience Publishers, 1961.
198. *Bashkin S.*, в книге Stellar Structure, University of Chicago Press, 1965, p. 1.
199. *Eddington A. S.*, Report of the Eighty-Eighth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1920, p. 34.
200. *Bethe H. A.*, Phys. Rev., 55, 434 (1939).
201. *Salpeter E. E.*, Ap. J., **115**, 326 (1952).
202. *Houle F.*, Ap. J., Suppl., Ser. 1, No. 5, p. 121, 1954.

203. *Cameron A. G. W.*, Publ. Astron. Soc. Pacific, **69**, 201 (1957).
204*. *Kavanagh R. W.*, в книге Cosmology, Fusion and Other Matters. George Gamow Memorial Volume, Adam Hilger Ltd, 1972, p. 169.
205. *Arnett W. D., Clayton D. D.*, Nature, **227**, 780 (1970).
206. *Burbidge G.*, Pub. Ast. Soc. Pacific, **70**, 83 (1958).
207. *Hoyle F., Tayler R. J.*, Nature, **203**, 1108 (1964).
208. *Truran T. W., Hansen C. T., Cameron A. G. W.*, Can. J. Phys., **43**, 1616 (1965).
209. *Hayashi C.*, Prog. Theor. Phys. (Japan), **5**, 224 (1950).
210. *Wagoner R. V., Fowler W. A., Hoyle F.*, Ap. J., **148**, 3.(1967).
211. *Geiss J., Reeves H.*, Astron. and Astrophys., **18**, 126 (1971).
212. *Schwarzchild M.*, Structure and Evolution of the Stars, Princeton University Press, 1958 (см. перевод: *Шварцшильд М.*, Строение и эволюция звезд, ИЛ, 1964).
213. *Strömgren B.*, в книге Stellar Structure, University of Chicago Press, 1965, Ch. 4.
214. *Clayton D. D.*, Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis, McGrow-Hill, 1968.
215. *Goldberg L., Muller E. A., Aller L. H.*, Ap. J. Suppl., **5**, 1 (1960).
216. *Lambert D. L.*, Nature, **215**, 43 (1967); Mon. Not. Roy. Ast. Soc., **138**, 143 (1967); Observatory, **87**, 228 (1968).
217. *Lambert D. L., Warnen B.*, Mon. Not. Roy. Ast. Soc., **138**, 181, 213 (1968).
218. *Bahcall J. N., Fowler W. A., Iben I., Jr., Sears R. L.*, Ap. J., **137**, 344 (1963).
219. *Sears R. L.*, Ap. J., **140**, 477 (1964).
220. *Demarque P. R., Percy J. R.*, Ap. J., **140**, 541 (1964).
221. *Pontecorvo B.*, National Research Council of Canada Report No. P.D. 205, 1946 (не опубликовано).
222. *Alvarez L. W.*, University of California Radiation Laboratory Report No. UCRL-328, 1949 (не опубликовано).
223. *Bahcall J. N.*, Phys. Rev. Lett., **12**, 300 (1964); Phys. Rev., **135**, B137 (1964).
224. *Davis R., Jr.*, Phys. Rev. Lett., **12**, 303 (1964).
225. *Davis R., Jr., Harmer D. S., Hoffmann K. C.*, Phys. Rev. Lett., **20**, 1205 (1968).
226. *Bahcall J. N., Bahcall N. A., Shaviv G.*, Phys. Rev. Lett., **20**, 1209 (1968).
227. *Bahcall J. N., Shaviv G.*, Ap. J., **153**, 113 (1968).
228. *Bahcall J. N., Bahcall N. A., Uhlrich R. K.*, Ap. J., **156**, 559 (1969).
229. *Torres-Peimbert S., Simpson E., Uhlrich R. K.*, Ap. J., **155**, 957 (1969).
230. *Iben I., Jr.*, Ann. Phys., **54**, 164 (1960).
231. *Bahcall J. N., Uhlrich R. K.*, Ap. J., **170**, 593 (1971).
232. *Davis R., Jr., Rogers L. C., Radeha V.*, Доклад, представленный на заседание Американского физического общества, апрель 1971 (не опубликован).
233. *Danziger I. J.*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., 8, 161 (1970).
234. *Hegyi D., Curott D.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 415 (1970).
235. *Faulkner J.*, Ap. J., **147**, 617 (1967).
236. *Faulkner J.*, Phys. Rev. Lett., **27**, 206 (1971).
237. *Biswas S., Fichtel C. E.*, Ap. J., **139**, 941 (1964).
238. *Gaustad J. E.*, Ap. J., **139**, 406 (1964).
239. *Neugebauer M., Synder C. W., Jr.*, J., Geophys. Res., **71**, 4469 (1966).
240. *Hundhausen A. J., Ashbridge J. R., S. J. Bame, Gilbert H. E., Strong I. B.*, J. Geophys. Res., 72, 87 (1967).
241. *Ogilvie K. W., Burlaga L. F., Wilkerson T. D.*, цитируется в [230].
242. *Unsöld A. O. J.*, Science, **163**, 1015 (1969).
243. *Christy R. F. et al.*, Ap. J., **144**, 108 (1966).
244. *Sandage A. R.*, Ap. J., **157**, 515 (1969).
245. *Iben J., Jr., Huchra J.*, Ap. J., **162**, L43 (1970).

246. *Sargent W. L. W., Searle L.*, Ap. J., **145**, 652 (1966).
247. *Aller L. H., Liller W.*, в книге Nebulae and Interstellar Matter, University of Chicago Press, 1968.
248. *Dupree A. K., Goldberg L.*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., 8, 231 (1970).
249. *Шварцман В. Ф.*, Письма ЖЭТФ, **9**, 315 (1969).
250. *Stothers R. B.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 538 (1970).
251. *Hecht H.*, Ap. J., **170**, 401 (1971).
252. *Burbidge G.*, Comments Astrophys. and Space Phys., **1**, 101 (1969).
253. Letters from Sir Isaac Newton to the Reverend Dr. Bentley, Letter I, p. 203 ff, цитируется по книге: *Koyré A.*, From the Closed World to the Infinite Universe, Harper and Row, 1958, p. 185.
254. *Jeans J.*, Phil. Trans. Roy. Soc., **199A**, 49 (1902); Astronomy and Cosmogony, 2nd ed., первая публикация Cambridge University Press, 1928; Dover Publications, 1961, p. 345.
255. *Lifshitz E.*, J. Phys. USSR, **10**, 116 (1946).
256. *Bonner W. B.*, Zs. Astrophys., **39**, 143 (1956).
257. Relativity Theory and Astrophysics 1. Relativity and Cosmology, American Mathematical Society, 1967, p. 263.
258. *Peebles P. J. E.*, Ap. J., **142**, 1317 (1965).
259. *Зельдович Я. Б.*, УФН, **89**, 647 (1966).
260. *Alpher R. A., Gamow G., Herman R.*, Proc. Nat. Acad. Sci., **58**, 2179 (1967).
261. *Dicke R. H., Peebles P. J. E.*, Ap. J., **154**, 891 (1968).
262. *Silk J.*, Nature, **215**, 1155 (1967); Ap. J., **151**, 459 (1968).
263. *Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.*, Астрон. журн., **44**, 295 (1967).
264. *Peebles P. J. E., Yu. J. T.*, Ap. J., **162**, 815 (1970).
265. *Field G. B.*, Ap. J., **165**, 29 (1971).
266. *Tomita K., Nariai H., Sato H., Matsuda T., Takeda H.*, Prog. Theor. Phys., **43**, 1511 (1970).
267. *Sato H.*, Prog. Theor. Phys., **45**, 370 (1971).
268. *Weinberg S.*, Ap. J., **168**, 175 (1971).
269. *Batchelor G. K.*, The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, 1959.
270. *von Weizsäcker C. F.*, Ap. J., **114**, 165 (1951).
271. *Gamow G.*, Phys. Rev., **86**, 251 (1952).
272. *Layzer D.*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., **2**, 341 (1964).
273. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.*, УФН, **89**, 647 (1966).
274. *Озерной Л. М., Чернин А. Д.*, Астрон. журн., **44**, 1131 (1967); **45**, 1137 (1968).
275. *Озерной Л. М.*, Письма ЖЭТФ, **10**, 394 (1969).
276. *Озерной Л. М., Чибисов Г. В.*, Астрон. журн., **47**, 769 (1969).
277. *Sato H., Matsuda T., Takeda H.*, Prog. Theor. Phys., **43**, 1115 (1970).
278. *Matsuda T., Sato H., Takeda H.*, Publ. Astr. Soc. Japan, **23**, 1 (1971).
279. *Silk J.*, в книге I.A.U. Symposium No. 44, Uppsala, Sweden, August 1970, Dodrecht, Netherlands, 1972.
280. *Sachs R. K., Wolfe A. M.*, Ap. J., **147**, 73 (1967).
281. *Silk J.*, Nature, 215, 1155 (1967); Ap. J., 151, 459 (1968).
282. *Longair M. S., Sunyaev R. A.*, Nature, **223**, 719 (1969).
283. *McCrea W. H.*, Astron. J., **60**, 271 (1955).
284. *Callan C., Dicke R. H., Peebles P. J. E.*, Am. J. Phys., **33**, 105 (1965).
285. *Irvine W. M.*, Ann. Phys., **32**, 322 (1965).
286. *Field G. B.*, в книге Stars and Stellar Systems, Vol. IX: Galaxies and the Universe, в печати.
287. *Hawking S. W.*, Ap. J., **145**, 544 (1966).
288. *Hagedorn R.*, Nuovo Cimento Suppl., **3**, 147 (1965); **6**, 311 (1968); Nuovo Cimento, **52A**, 1336 (1967); **56A**, 1027 (1968).

289. *Hagedorn R., Ranft I.*, Nuovo Cimento Suppl., **6**, 169 (1968).
290. *Румер Ю. Б.*, ЖЭТФ, 38, 1899 (1960).
291. *Veneziano G.*, Nuovo Cim., **57A**, 190 (1968).
292. *Fubini S., Veneziano G.*, Nuovo Cimento, **64A**, 811 (1969).
293. *Bardakci K., Mandelstam S.*, Phys. Rev., **184**, 1640 (1969).
294. *Fubini S., Gordon D., Veneziano G.*, Phys. Lett., **29B**, 679 (1969).
295. *Huang K., Weinberg S.*, Phys. Rev. Lett., **25**, 895 (1970).
296. *Hagedorn R.*, Astron. and Astrophys., **5**, 184 (1970).
297. *Bahcall J. N., Frautschi S.*, Ap. J., Lett., **170**, 81 (1971).
298. *Zeldovich Ya. B.*, Comments Astrophys. and Space Sci., **11**, 12 (1970).
299. *Wheeler J. A.*, в книге La Structure et L'Evolution de l'Univers, Institut International de Physique Solvay, 1958, p. 96.
300. *Zeldovich Ya. B.*, в книге Advances in Astronomy and Astrophysics, Academic Press, 1965, p. 319.
301. *Winterberg F.*, Nuovo Cimento, **53B**, 264 (1968).
302. *Weinberg S.*, в книге Contemporary Physics, Vol. I, International Atomic Energy Agency, 1969, p. 559.
303. *Matzner R. A.*, Ap. J., **154**, 1123 (1968).
304. *De Sabbata V.*, Тезисы 5-й Международной конференции по теории относительности и гравитации, Тбилиси, 1968.
305. *Schucking E. L., Spiegel E. A.*, Comments Astrophys. and Space Phys., **2**, 121 (1970).
306. *Stewart J. M., MacCallum M. A. H., Sciama D. W.*, Comments Astrophys. and Space Phys., **2**, 206 (1970).
307. *Misner C.*, Nature, **214**, 40 (1967); Ap. J., **151**, 431 (1967).
308. *Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.*, ЖЭТФ, **53**, 644 (1967).
309. *Hawking S. W.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **142**, 129 (1969).
310. *Stewart J. M.*, Astrophys. Lett., **2**, 133 (1969).
311. *Klein O.*, Soc. Roy. Sci. Liege, Sec., **4**, 13, 42 (1953).
312. *Klein O.*, в книге La Structure et l'Evolution de l'Univers, Institut International de Physique Solvay, 1958, p. 33.
313. *Klein O.*, в книге Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit, Vieweg and Sohn, 1961, p. 58.
314. *Klein O.*, в книге Recent Developments in General Relativity, Pergamon Press, 1962, p. 293.
315. *Klein O.*, Astrophys. Norvegica, **9**, 161 (1964).
316. *Klein O.*, в книге Preludes in Theoretical Physics, North-Holland, 1966, p. 23.
317. *Klein O.*, Nature, **211**, 1337 (1966); Ark. Fysik, **39**, 157 (1969); Science, **171**, 339 (1971).
318. *Alfvén H., Klein O.*, Arkiv. f. Fysik, **23**, 187 (1962).
319. *Alfvén H.*, Rev. Mod. Phys., **17**, 652 (1965); Physics Today, Feb., 1971; Nature, **229**, 184 (1971).
320. *Omnes R.*, Astron. and Astrophysics, **10**, 228 (1971); 11, 450 (1971); Phys. Rev. Lett., **23**, 38 (1969).
321. *Stecker F. W., Morgan D. L., Jr., Bredekamp J.*, Phys. Rev. Lett., **27**, 1469 (1971).
322. *Penrose R.*, Phys. Rev. Lett., **14**, 57 (1965).
323. *Penrose R.*, в книге Contemporary Physics, Vol. I, International Atomic Energy Agency, 1969, p. 545.
324*. *Пенроуз Р.*, Структура пространства-времени, «Мир», 1972, разд. 10, 11.
325. *Hawking S. W.*, Phys. Rev. Lett., **15**, 689 (1965); Proc. Roy, Soc., **A294**, 511 (1966); **A295**, 490 (1966); **A300**, 187 (1967).
326*. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.*, The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press, 1973. (См. перевод: *С. Хокинг*, Крупномасштабная структура пространства-времени, изд-во «Мир», 1975.)
327. *Shepley L. C.*, Proc. Nat. Acad. Sci., **52**, 1403 (1965).

328. *Geroch R. P.*, Phys. Rev. Lett., **17**, 445 (1966).
329*. *Герок Р.*, в сб. «Квантовая гравитация и топология», «Мир», 1973, стр. 27.
330. *Hawking S. W., Sciama D. W.*, Comments Astrophys. and Space Phys., **1**, 1 (1969).
331. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.*, Ap. J., **152**, 25 (1968).
332. *Ginzburg V. L.*, Comments Astrophys. and Space Phys., **3**, 7 (1971).
333. *Misner C. W.*, Phys. Rev., **186**, 1319 (1969).
334. *Ryan M. P., Jr.*, Ann. Phys., **70**, 301 (1972).
335. *Jacobs K. C., Misner C. W., Zapolsky H. S.* (в печати).
336. *Jacobs K. C., Hughston L. P.* (в печати).
337*. *Зельдович Я. Б.*, Письма ЖЭТФ, **9**, 443 (1970).
338*. *Parker L., Fulling S. A.*, Phys. Rev., **D7**, 2357 (1973).
339. *Rees M. J.*, Observatory, **89**, 193 (1969).
340. *Gold T.*, в книге La Structure et l'Evolution de l'Univers, Institut International de Physique, Solvay, 1958, p. 81.
341. *Gal-Or B.*, Science, **176**, 11 (1972).
342. The Nature of Time, Cornell Univ. Press, 1967.
343. *Weinberg S.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 1264 (1967); **27**, 1688 (1971).
344. *Chen H. H., Lee B. W.*, Phys. Rev., **D5**, 1874 (1972).
345. *t'Hooft G.*, Phys. Lett., **37B**, 197 (1971).

Что касается окончательной истины, то нет человека, который бы постиг ее, так же как никогда не будет, по моему мнению, человека, познавшего богов и все сущее. Ибо если ему и удалось в полной мере высказать что-то совершенно истинное, то он сам не знает об этом; и печать Мнения наложена роком на все на свете.

Ксенофан из Колофона

Глава 16

КОСМОЛОГИЯ: ИНЫЕ МОДЕЛИ

Фридмановская модель большого взрыва (big-bang), обсуждавшаяся в предыдущей главе, ни в каком пункте не вступает в прямое противоречие с наблюдениями. Но сказать, что она определенно подтверждается наблюдениями, пока еще нельзя. Поэтому в этой главе мы коротко рассмотрим некоторые другие космологические модели, которые все еще соперничают со «стандартной» теорией.

§ 1. Наивные модели: парадокс Ольберса

Вероятно, большинство астрономов XVIII и XIX столетий подписались бы под простой космологической картиной, в которой Вселенная предполагается бесконечной, вечной и евклидовой, звезды считаются более или менее покоящимися, а средняя светимость единицы объема постоянна. Подобные наивные модели, по-видимому, исключаются открытием общего красного смещения удаленных галактик, но все же интересно привести один аргумент против таких моделей, который выдвинули швейцарский астроном Ж. П. Л. де Шезо [1] в 1744 г. и независимо от него Г. В. М. Ольберс (1758-1840) [2] в 1826 г. [1]) Их аргумент основан на самом древнем из астрономических наблюдений — на том, что небо темнеет с заходом солнца.

Чтобы понять значение этого наблюдения, вспомним, что в пренебрежении поглощением в наивной космологической модели видимая светимость звезды с абсолютной светимостью L, удаленной на расстояние r, будет равна $L/4\pi r^2$. Если плотность таких звезд есть постоянная n, то число звезд, удаленных на расстояния между r и $r + dr$, равно $4\pi n r^2\, dr$, а плотность общей излученной

---

[1]) В последнее время на парадокс Ольберса обратил внимание Бонди ([3], гл. III).

энергии всех звезд равна

$$\rho_s = \int_0^\infty \left(\frac{L}{4\pi r^2}\right) 4\pi n r^2\, dr = Ln \int_0^\infty dr. \qquad (16.1.1)$$

Этот интеграл расходится, т. е. плотность энергии звездного света бесконечна!

Чтобы устранить этот парадокс, и де Шезо, и Ольберс постулировали существование межзвездной среды, которая поглощает свет очень далеких звезд, вызывающий расходимость интеграла (16.1.1). Однако такое разрешение парадокса неудовлетворительно [3] из-за того, что в вечной Вселенной температура будет расти до тех пор, пока не установится тепловое равновесие между средой и излучением звезд, а тогда среда станет излучать столько же, сколько поглотит, и поэтому не будет понижать плотность энергии излучения. Сами звезды, разумеется, не прозрачны и полностью заслоняют свет достаточно далеких источников, но если *этим* разрешается парадокс Ольберса, то каждый луч зрения должен кончаться на поверхности звезды и все небо должно иметь температуру, равную поверхностной температуре типичной звезды.

Чтобы увидеть, почему в современной космологии не возникает парадокс Ольберса, заметим, что, согласно (14.4.12), видимая светимость звезды с абсолютной светимостью L и с сопутствующей координатой r_1 равна (здесь поглощением пренебрегаем)

$$l = \frac{LR^2(t_1)}{4\pi R^4(t_0)\, r_1^2},$$

где t_0 — момент, в который звезда наблюдается, и t_1 — момент, в который она излучает наблюдаемый свет. Далее, согласно (14.7.4), число звезд со светимостью между L и $L + dL$, свет которых, наблюдаемый в момент t_0, был излучен между моментами $t_1 - dt_1$ и dt_1, равно

$$dN = 4\pi R^2(t_1)\, r_1^2 n(t_1, L)\, dt_1\, dL,$$

где $n(t_1, L)\, dL$ — плотность в момент t_1 звезд со светимостью между L и $L + dL$. Отсюда полная энергия звездного света равна

$$\rho_{s0} = \int\int l\, dN = \int_{-\infty}^{t_0} \mathscr{L}(t_1) \left[\frac{R(t_1)}{R(t_0)}\right]^4 dt_1, \qquad (16.1.2)$$

где $\mathscr{L}$ — собственная плотность светимости:

$$\mathscr{L}(t_1) \equiv \int n(t_1, L)\, L\, dL.$$

В космологии большого взрыва, очевидно, нет никакого парадокса, поскольку интеграл (16.1.2) эффективно обрезается в нижнем пределе $t_1 = 0$, а подынтегральное выражение при $t_1 = 0$

стремится к нулю как $R(t_1)$. Вопрос о парадоксе Ольберса возникает лишь в моделях, в которых, как, например, в стационарной космологии, предполагается, что Вселенная существует бесконечно долго. В таких моделях необходимое условие отсутствия парадокса Ольберса состоит в том, что

$$t_1 R^4(t_1)\,\mathscr{L}(t_1) \to 0 \text{ при } t_1 \to -\infty. \qquad (16.1.3)$$

Для нейтрино условие несколько более строгое [4]: вместо $R^4(t_1)$ должно быть $R^3(t_1)$, поскольку один из множителей $R(t_1)/R(t_0)$ в (16.1.2) появляется из-за потери энергии индивидуальными «покрасневшими» фотонами, а для нейтрино в принципе наблюдаемы как плотность *энергии*, так и плотность *частиц*. Единственной популярной космологической моделью, в которой условие (16.1.3) не удовлетворяется, является модель осцилляций, обсуждавшаяся в § 11 гл. 15. В этом случае, чтобы не было парадокса Ольберса, необходимо поглощение, но оно происходит в эру очень сильного сжатия, и красное смещение при последующем расширении спасает нас от нестерпимо яркого ночного неба. С этой точки зрения 2,7-градусный микроволновый фон представляется тусклым отблеском того грозного огненного горнила, о котором поведали нам де Шезо и Ольберс.

§ 2. Модели с космологической постоянной

Когда Эйнштейн создавал общую теорию относительности (1916 г.), все считали Вселенную статической. Согласно (15.1.18) и (15.1.19), масштабный фактор $R(t)$ может быть постоянным, только если

$$\rho = -3p = \frac{3k}{8\pi G R^2}$$

Однако это требует, чтобы или плотность энергии ρ или давление p были *отрицательными*. Чтобы избежать такого нефизического результата, Эйнштейн в 1917 г. видоизменил свои уравнения следующим образом [5]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_\rho{}^\rho - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \qquad (16.2.1)$$

где λ — новая фундаментальная постоянная, называемая *космологической постоянной*.

В конце § 1 гл. 7 мы уже отмечали, что уравнение (16.2.1) является наиболее общей модификацией уравнений Эйнштейна, сохраняющей то свойство, что $T_{\mu\nu}$ приравнивается тензору, построенному из $g_{\mu\nu}$ его первых и вторых производных и линейному по вторым производным $g_{\mu\nu}$. Однако для наших нынешних целей удобнее перенести $\lambda g_{\mu\nu}$ в правую сторону уравнений:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\rho{}_\rho = -8\pi G \tilde{T}_{\mu\nu}, \qquad (16.2.2)$$

где $\tilde{T}_{\mu\nu}$ — модифицированный тензор энергии-импульса

$$\tilde{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}. \tag{16.2.3}$$

Если $T_{\mu\nu}$ имеет вид (15.1.12), соответствующий идеальной жидкости, то к такому же виду приводится и $\tilde{T}_{\mu\nu}$:

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \tilde{p} g_{\mu\nu} + (\tilde{p} + \tilde{\rho}) U_\mu U_\nu, \tag{16.2.4}$$

где введены модифицированные плотность и давление

$$\tilde{p} = p - \frac{\lambda}{8\pi G}, \qquad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\lambda}{8\pi G}. \tag{16.2.5}$$

Все результаты, полученные в § 1 гл. 15, по-прежнему применимы и в теориях с космологической постоянной при замене величин p и ρ модифицированными давлением и плотностью (16.2.5).

В частности, условие статичности Вселенной выглядит теперь следующим образом:

$$\tilde{\rho} = -3\tilde{p} = \frac{3k}{8\pi G R^2}. \tag{16.2.6}$$

Для Вселенной, заполненной «пылью» (т. е. $p = 0$), отсюда следует

$$\frac{k}{R^2} = \lambda, \tag{16.2.7}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{4\pi G} \tag{16.2.8}$$

Чтобы плотность ρ была положительной, согласно (16.2.8), требуется, чтобы и постоянная λ была положительной. Тогда из (16.2.7) видно, что

$$k = +1 \tag{16.2.9}$$

и

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{16.2.10}$$

Следовательно, статическая вселенная Эйнштейна *конечна* (хотя, разумеется, не ограничена), имеет положительную кривизну и плотность, фиксированную заданием фундаментальных постоянных λ и G.

Открытие в 1920-х гг. систематического соотношения между красным смещением и расстоянием привело к утрате всякого интереса к статической вселенной Эйнштейна как к реалистической космологической модели. Тем не менее существование космологической постоянной остается логической возможностью, и космологи досконально исследовали динамику расширяющейся вселенной

с космологической постоянной (см., например, [3], гл. IX). Здесь мы уделим внимание лишь моделям с нулевым давлением, в которых, согласно (15.1.21), величина ρR^3 постоянна. Удобно выразить эту постоянную через значение, которое она имела бы в статической модели Эйнштейна:

$$\rho R^3 = \frac{\alpha}{4\pi G \sqrt{|\lambda|}}. \tag{16.2.11}$$

Динамическое уравнение (15.1.20), в котором плотность ρ заменена на $\tilde{\rho}$ [см. (16.2.5)], имеет вид

$$(\dot{R})^2 = \frac{1}{R}\left\{\frac{\lambda R^3}{3} - kR + \frac{2\alpha}{3\sqrt{|\lambda|}}\right\}. \tag{16.2.12}$$

Характер поведения $R(t)$ зависит от расположения нулей, максимумов и минимумов кубической формы в правой части. Есть три особо интересных случая, которые связаны с именами де Ситтера, Леметра и Эддингтона.

В *модели де Ситтера* [6] пространство существенно пустое и плоское, так что $k = \alpha = 0$, а $\lambda > 0$. Уравнение (16.2.12) здесь имеет простое решение:

$$R \sim e^{Ht}, \tag{16.2.13}$$

$$H = \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{1/2}. \tag{16.2.14}$$

Метрика совпадает с метрикой стационарной модели, обсуждавшейся в § 8 гл. 14, с той разницей, что вместо непрерывного рождения материи здесь нет материи вообще! Как было указано в § 3 гл. 13, эта метрика допускает десятипараметрическую группу изометрий, которая есть группа «вращений» в пяти измерениях, оставляющих инвариантной диагональную матрицу с элементами $+1, +1, +1, +1, -1$. Соответственно, эту группу часто называют *группой де Ситтера*. Хотя отсутствие в модели де Ситтера материи исключает отношение к ней как к серьезной космологической модели, следует все же отметить, что любая модель с $\lambda > 0$ переходит в модель де Ситтера при $R \to \infty$.

В так называемой *модели Леметра* [7] пространство имеет положительную кривизну, $\lambda > 0$ и вещества в ней больше, чем в статической модели Эйнштейна, так что $k = +1$ и $\alpha > 1$. Из уравнения (16.2.12) следует, что масштабный фактор R при $t = 0$ начинает расти как $t^{2/3}$, но затем расширение замедляется, скорость расширения доходит до минимума при $R = \alpha^{1/3}/\sqrt{\lambda}$, после чего расширение снова ускоряется, асимптотически приближаясь к деситтеровскому поведению (16.2.13). Наиболее замечательным свойством этой модели является наличие в ней «периода отдыха»,

в течение которого $R(t)$ остается близким к значению $R = \alpha^{1/3}/\sqrt{\lambda}$, определяющему минимум функции $\dot{R}$. В этот период уравнение (16.2.12) с $k = +1$ можно записать в приближенном виде:

$$(\dot{R})^2 \approx \alpha^{2/3} - 1 + (\sqrt{\lambda} R - \alpha^{1/3})^2.$$

Решением этого уравнения является

$$R = \frac{\alpha^{1/3}}{\sqrt{\lambda}} [1 + (1 - \alpha^{-2/3})^{1/2} \operatorname{sh} (\sqrt{\lambda}(t - t_m))],$$

где t_m — момент, когда $\dot{R}$ достигает минимума. Если постоянная α очень близка к единице, то R остается близким значению R в статической модели Эйнштейна (16.2.10) в течение длительного времени порядка

$$\Delta t = \lambda^{-1/2} \, | \ln (1 - \alpha^{-2/3}) \, |. \qquad (16.2.15)$$

Модель Эддингтона — Леметра является предельным случаем модели Леметра; она привлекла к себе особое внимание в связи с работой Эддингтона [8]. Кривизна и масса в ней такие же, как в статической модели Эйнштейна, т. е. $k = +1$ и $\alpha = 1$, а развитие во времени в ней такое же, как в модели Леметра с бесконечно долгим «периодом отдыха». Таким образом, если развитие начинается с $R = 0$ при $t = 0$, то при $t \to \infty$ R асимптотически стремится к эйнштейновскому значению $1/\sqrt{\lambda}$. Напротив, если развитие начинается с $R = 1/\sqrt{\lambda}$ при $t = 0$, то R монотонно растет по экспоненциальному закону (16.2.13), характерному для модели де Ситтера. Отсюда сразу видно, что модель Эйнштейна *неустойчива*, так как если на нее наложить бесконечно медленное расширение или сжатие, то R будет продолжать расти или сжиматься с зависимостью от времени, определяемой моделью Эддингтона — Леметра.

Наблюдаемая концентрация красных смещений квазаров около $z \approx 2$ (§ 6 гл. 11 и § 8 гл. 14) оживила интерес к моделям Леметра [9—11], поскольку возникла мысль, что существует необычайно большое число квазаров при выделенном значении масштабного фактора, $R \approx R_0/3$, чего можно было бы ожидать в модели Леметра, в которой радиус «отдыха» $\alpha^{1/3}/\sqrt{\lambda}$ совпадает с этим выделенным значением R. Подбирая $\alpha \approx 1$, можно получить такой «период отдыха», какой нам нужен, так что преобладание выделенного красного смещения $z \approx 2$ можно сделать столь сильным, сколь это необходимо для объяснения наблюдений квазаров. С этой новой мотивировкой в последнее время были проведены исследования распространения световых сигналов вокруг Вселенной [12], числа радиоисточников [13—15] и образования галактик [16] в моделях Леметра. Хотя нет никаких четких данных против

моделей Леметра, но все же представляется довольно искусственным объяснять ими то, что, быть может, является просто деталью эволюции квазаров [1]).

§ 3. Еще раз о стационарной модели

Если Вселенная не только изотропна и однородна в пространстве, но еще и однородна во времени, то, как показано в § 8 гл. 14, она должна иметь метрику Робертсона — Уокера с

$$k = 0, \qquad R(t) \sim e^{Ht}, \tag{16.3.1}$$

где H — постоянная Хаббла, в этом случае настоящая постоянная, данная нам природой. Кроме того, все скаляры, такие, как ρ и p, не должны зависеть от времени так же, как и от положения:

$$\dot{\rho} = \dot{p} = 0. \tag{16.3.2}$$

Уравнения поля, на которых основана стационарная модель в § 8 гл. 14, не уточнялись, но ясно, что в применении к ней уравнения Эйнштейна следует видоизменить. Уравнения Эйнштейна согласуются с тождествами Бианки только при сохраняющемся тензоре энергии-импульса, но постоянство давления не нарушает уравнения сохранения энергии (14.2.19) только при условии $\rho = -p$, которое требует в свою очередь выполнения одного из двух неравенств: $\rho < 0$ или $p < 0$.

Таким образом, необходимо видоизменить уравнения Эйнштейна, добавив поправочный член [17]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\lambda} + C_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{16.3.3}$$

Непосредственным вычислением с использованием (16.3.1) в уравнениях (15.1.6), (15.1.7) и (15.1.11) получаем

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\lambda} = 3H^2 g_{\mu\nu}.$$

Следовательно, поправочный член, требующийся в стационарной модели, имеет вид

$$C_{\mu\nu} = -(8\pi G p + 3H^2)\, g_{\mu\nu} - 8\pi G\, (\rho + p)\, U_{\mu} U_{\nu}, \tag{16.3.4}$$

где U^{μ} — вектор 4-скорости, причем $U^t = 1$, $U^i = 0$.

Для того чтобы что-то извлечь из формулы (16.3.4), нужно выдвинуть какие-то априорные идеи относительно вида тензора

[1]) Надо иметь в виду, что далекие квазары трудно обнаружить из-за бедности спектра, который становится доступным наблюдению при очень больших красных смещениях. По-видимому, резких аномалий в распределении квазаров на самом деле нет.— *Прим. ред.*

$C_{\mu\nu}$. Хойл [17] предлагает в качестве общего условия равенство

$$C_{\mu\nu} = C_{;\,\mu;\,\nu}, \tag{16.3.5}$$

где C — скаляр, названный им «C-поле». Далее Хойл считает, что при полном отсутствии неоднородностей и анизотропий C-поле просто пропорционально космической временной координате, используемой в системе координат Робертсона — Уокера:

$$C = At, \qquad A = \text{const}. \tag{16.3.6}$$

Вторую ковариантную производную легко вычислить:

$$C_{;\,\mu;\,\nu} = -AH\,(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu). \tag{16.3.7}$$

Сравнение выражений (16.3.7)и (16.3.4) показывает, что плотность должна принять значение

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{16.3.8}$$

а коэффициент пропорциональности в (16.3.6) должен быть равен

$$A = \frac{8\pi G\,(\rho + p)}{H}. \tag{16.3.9}$$

Давление может принимать любое значение.

Предсказываемая плотность (16.3.8) такая же, что и в фридмановской модели с нулевой кривизной [см. (15.2.1)]. Таким образом, выполнение равенства (16.3.8) не могло бы служить настоящим аргументом в пользу стационарной модели. Кроме того, стационарность космологии не требует, чтобы тензор $C_{\mu\nu}$ обязательно имел вид (16.3.5), (16.3.6), а поэтому, если бы обнаружилось, что плотность отличается от (16.3.8), это еще не вынуждало бы нас отказаться от стационарной модели.

Наиболее сильным свидетельством против стационарной модели является наблюдаемый космический микроволновый фон, который является, по всей видимости, реликтом сильно отличающейся от современной ранней стадии Вселенной (§ 5 гл. 15). Однако нельзя полностью исключить того, что микроволновый фон возник вместе с барионами в стационарной Вселенной. Согласно (15.4.9), плотность фотонов в единичном интервале частот в стационарной модели равна

$$n_\gamma(\nu) = 8\pi\nu^2 \int_{-\infty}^{t_0} \exp\left(-\int_t^{t_0} \{\Lambda(\nu e^{H(t_0-t')}) - \Omega(\nu e^{H(t_0-t')})\}\,dt'\right) \times$$

$$\times\, \Omega(\nu e^{H(t_0-t)})\,dt,$$

где $\Lambda(\nu)$ — скорость поглощения фотонов частоты ν, а $8\pi\nu^2\Omega(\nu)\,d\nu$ — скорость излучения в единице объема фотонов с с частотой между ν и $\nu + d\nu$. Простой заменой переменных это

выражение можно переписать в виде, не зависящем от t_0:

$$n_\gamma(\nu) = 8\pi\nu^2 \int_\nu^\infty \frac{d\nu'}{H\nu'} \Omega(\nu') \exp\left(-\int_\nu^{\nu'} \frac{d\nu''}{H\nu''} [\Lambda(\nu'') - \Omega(\nu'')]\right). \quad (16.3.10)$$

Дифференцируя по ν, получаем дифференциальное уравнение для $n_\gamma(\nu)$, которое можно представить как формулу для $\Omega(\nu)$ через $\Lambda(\nu)$, $n_\gamma(\nu)$ и $n'_\gamma(\nu)$:

$$\Omega(\nu) = \frac{[\Lambda(\nu) + 2H] n_\gamma(\nu) - H\nu n'_\gamma(\nu)}{8\pi\nu^2 + n_\gamma(n)}. \quad (16.3.11)$$

Таким образом, подходящим выбором скорости излучения фотонов мы можем получить такую функцию распределения фона $n_\gamma(\nu)$, какая нам нужна. Например, если мы требуем, чтобы наблюдалось рэлей-джинсовское поведение $n_\gamma(\nu) \sim \nu$ [см. (15.5.19)], то формула (16.3.11) в пределе $\nu \to 0$ дает

$$\Omega(0) = \Lambda(0) + H. \quad (16.3.12)$$

Член H соответствует чисто космологическому непрерывному рождению фотонов, не связанному какими-либо процессами поглощения. Можно получить и функцию распределения Планка

$$n_\gamma(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{[\exp(h\nu/kT) - 1]},$$

выбирая $\Omega(\nu)$ в виде

$$\Omega(\nu) = e^{-h\nu/kT}\Lambda(\nu) + \frac{H h\nu/kT}{[\exp(h\nu/kT) - 1]}. \quad (16.3.13)$$

Первый член соответствует обычным процессам излучения, которые всегда будут сопровождаться некоторым поглощением [ср. с (15.4.7)], в то время как второй член характеризует непрерывное рождение фотонов. Однако нет никакой априорной причины, приводящей к тому, что скорость непрерывного рождения имеет конкретную частотную зависимость, выражаемую формулой (16.3.13), поэтому с точки зрения стационарной модели распределение Планка возможно, но крайне искусственно. Разумеется, нет никакой особой причины, по которой низкочастотные фотоны должны были бы непрерывно возникать именно со скоростью $8\pi H\nu^2\, d\nu$, требуемой формулой (16.3.12), так что даже рэлей-джинсовское низкочастотное поведение не выглядит естественным.

Некоторую поддержку стационарная модель получает из совсем другого источника. Время от времени делаются попытки сформулировать электродинамику и другие полевые теории непосредственно в терминах дальнодействия [18—20]. Препятствием на пути таких попыток было то обстоятельство, что в них электромагнитные эффекты заряженных частиц описывались полусуммой опережающего и запаздывающего решений уравнений Максвелла,

а не просто обычным запаздывающим решением. В 1945 г. Уилер и Фейнман [21] показали, что эта трудность может быть обойдена при учете электромагнитного взаимодействия на расстоянии ускоренного и пробного зарядов со всеми остальными зарядами во Вселенной. Однако они рассматривали статическую космологическую модель и поэтому могли получить электромагнитное взаимодействие, соответствующее или чисто запаздывающему или чисто опережающему решению. Позднее Хогарт [22] указал, что эта неоднозначность могла бы быть устранена при рассмотрении более реалистических моделей, учитывающих расширение Вселенной. Согласно Хойлу и Нарликару [23], в стационарной модели возможно только чисто запаздывающее решение, а в фридмановской модели с $k \leqslant 0$ — чисто опережающее решение. Хойл и Нарликар впоследствии распространили свои результаты на C-поле [24], теорию гравитации [25] (см. также [26]) и квантовую электродинамику [27]. Эта линия развития несомненно является интригующим подходом к старой проблеме связи физики микромира со свойствами Вселенной в целом. К этой проблеме мы еще вернемся в следующем параграфе. Однако на сегодняшний день было бы слишком рано считать, что из микрофизики следует требование стационарности Вселенной, поскольку нет никаких оснований полагать, что электродинамику и другие полевые теории нужно формулировать в терминах дальнодействия.

§ 4. Модели с переменной гравитационной постоянной

Гравитационные силы исключительно слабы по стандартам атомной и ядерной физики. Например, отношение гравитационной и электрической сил, действующих между протоном и электроном, равно

$$Gm_p \frac{m_e}{e^2} = 4{,}4\ 10^{-40}. \tag{16.4.1}$$

Несмотря на многочисленные попытки (см., например, [28]), не было дано никакого убедительного объяснения причин, по которым такая ничтожная безразмерная величина должна появиться в фундаментальных законах физики. Один из подходов к объяснению этого основан на предположении, что числа, подобные (16.4.1), возникают не только из микрофизики, но в какой-то степени определены влиянием всей Вселенной. В этом подходе используется тот факт, что из величин G, $\hbar$, c и постоянной Хаббла H_0 можно построить массу, которая не слишком отличается от массы типичной элементарной частицы, например пиона:

$$\left(\frac{\hbar^2 H_0}{Gc}\right)^{1/3} \approx m_{\text{п}}. \tag{16.4.2}$$

[При $H_0^{-1} = 10^{10}$ лет левая часть равна 60 МэВ/с^2, в то время как масса пиона 140 МэВ/с^2. Если вместо $\hbar$ в левую часть (16.4.2) подставить e^2/c, то получится величина порядка массы электрона.] Конечно, каждый волен рассматривать (16.4.2) как не имеющее особого значения численное совпадение, но следует отметить, что конкретная комбинация $\hbar$, H_0, G и c, появляющаяся в (16.4.2), намного ближе к массе типичной элементарной частицы, чем любая случайная комбинация этих величин; к примеру, только из $\hbar$, G и c можно образовать единственную величину $(\hbar c/G)^{1/2}$ с размерностью массы, но ее значение $1{,}22 \cdot 10^{22}$ МэВ/с^2 на 20 порядков больше, чем типичная масса!

При обсуждении возможных интерпретаций соотношения (16.4.2) следует проявлять осторожность и выделять это соотношение из других численных «совпадений», таких, как, например, приблизительная связь между G, H_0, m_p и современной плотностью барионов n_0:

$$Gn_0m_p \approx H_0^2. \tag{16.4.3}$$

Это — соотношение между двумя космологическими параметрами n_0 и H_0, и его выполнение требуется в различных космологических моделях, например в модели Фридмана (кроме случаев $q_0 \ll 1$ и $q_0 \gg 1$) и в стационарной модели в варианте Хойла [см. (15.2.6) и (16.3.8)]. Напротив, соотношение (16.4.2) связывает единственный космологический параметр H_0 с фундаментальными постоянными $\hbar$, G, c и m_π, и оно пока не объяснено.

Время от времени отмечаются другие численные совпадения, но в большинстве они являются комбинациями (16.4.2) и (16.4.3), иногда с $e^2/c = 137\hbar$ вместо $\hbar$ и с другими массами вместо m_π. Например, часто отмечалось, что отношение единицы атомного времени e^2/m_ec^3 к времени Хаббла H_0^{-1} того же порядка, 10^{-40}, что и отношение гравитационной и электрической сил в атомах (16.4.1), но этот факт эквивалентен соотношению (16.4.2) с e^2/c вместо $\hbar$ и $m_e^{2/3}m_p^{1/3}$ вместо m_π.

Если мы все-таки предпочтем рассматривать численное соотношение (16.4.2) как имеющее реальный, хотя и таинственный смысл, то нужно решить проблему, связанную с тем, что в большинстве космологических моделей H_0 не постоянная, а функция возраста Вселенной. Один из подходов к этой проблеме заключается в замене H_0 постоянной величиной, сравнимой с H_0 по численному значению. Например, в закрытой модели Фридмана можно использовать величину, обратную времени максимального расширения, а в стационарной же модели H_0 постоянна сама по себе. Единственный недостаток такого подхода в том, что он ни к чему не приводит, и, в частности, мы остаемся с необъяснимо малыми безразмерными величинами вроде (16.4.1) или $Gm^2/\hbar c$.

Совершенно иной подход был предложен в 1937 г. Дираком [29]. Он предположил, что соотношения типа (16.4.2) являются фундаментальными, хотя еще необъяснимыми истинами, которые остаются справедливыми с точностью до постоянного коэффициента пропорциональности даже при изменении «постоянной» Хаббла $\dot{R}/R$ с возрастом Вселенной. Из этого следует, что по крайней мере одна из «постоянных» $\hbar$, G, c и m_π должна изменяться в космических масштабах времени. Чтобы избежать переформулировки всей атомной и ядерной физики, в качестве изменяющейся со временем «постоянной» Дирак выбрал G, а чтобы сохранить соотношение (16.4.2), он предположил, что

$$G \sim \frac{\dot{R}}{R}. \tag{16.4.4}$$

Вдобавок к этому Дирак высказал идею, что при расширении Вселенной соотношения типа (16.4.3) тоже остаются в силе с точностью до коэффициента пропорциональности. Поскольку $n \sim \sim R^{-3}$, то отсюда следует, что

$$GR^{-3} \sim \frac{(\dot{R})^2}{R^2}. \tag{16.4.5}$$

Исключая $G(t)$ из (16.4.4) и (16.4.5), получим дифференциальное уравнение для $R(t)$

$$\dot{R} \sim R^{-2}$$

с решением

$$R \sim t^{1/3}. \tag{16.4.6}$$

Тогда из (16.4.4) или (16.4.5) получается зависимость гравитационной постоянной от времени

$$G \sim t^{-1}. \tag{16.4.7}$$

Таким образом, в космологии Дирака малые безразмерные величины вроде 10^{-40} не имеют никакого фундаментального значения; причина такой исключительной малости величины (16.4.1) просто в преклонном возрасте Вселенной.

При $k = \pm 1$ все же имеются характерные космологические параметры, которые постоянны и сильно отличаются от единицы, как, например, число частиц внутри сферы с радиусом порядка кривизны пространства nR^3. Чтобы избежать этого, Дирак сделал также предположение, что пространство плоское, т. е. $k = 0$, а тогда абсолютное значение робертсон-уокеровского масштабного фактора $R(t)$ и величины вроде nR^3 теряют всякий физический смысл.

Если гравитационная постоянная изменяется, то необходимо заменить общую теорию относительности некоторой другой теорией гравитации. Дирак не уточнял, как должна выглядеть такая теория

поля, и его космологическая модель осталась незавершенной[1]) Тем не менее из нее следовали определенные предсказания Во-первых, (16.4.6) дает соотношение между нынешней постоянной Хаббла H_0 и нынешним возрастом Вселенной t_0:

$$t_0 = \frac{1}{3} H_0^{-1}. \tag{16.4.8}$$

Даже для такого большого значения H_0^{-1}, как $13 \cdot 10^9$ лет, отсюда получается $4{,}3 \cdot 10^9$ лет — меньше, чем возраст Земли и Луны, установленный радиоактивными методами (которые не зависят от предположений относительно G). Здесь теория Дирака, по-видимому, уже вступает в конфликт с наблюдениями. Из (16.4.6) для параметра замедления получается $q_0 = 2$, что не исключается современными данными (§ 6 гл. 14). Наконец, (16.4.7) дает следующее современное значение относительной скорости убывания гравитационной «постоянной»

$$\left(\frac{\dot{G}}{G}\right)_0 = -t_0^{-1} = -3H_0. \tag{16.4.9}$$

Наблюдаемые следствия убывания гравитационной постоянной обсуждаются в конце этого параграфа.

Теория Дирака вызвала к жизни ряд попыток сформулировать теорию гравитационного поля, в которой эффективная «постоянная» гравитации является некоторой функцией скалярного поля. Одна из таких теорий была предложена Иорданом [31, 32]; в ней не сохранялся тензор энергии-импульса, и ее в этом и других пунктах неоднократно критиковали Фирц [33] и Бонди ([3], стр. 163). Последующая переформулировка [34] устранила большую часть возражений, но в теории Иордана все же имелись трудности с описанием нерелятивистского вещества. Наиболее интересную и полную скалярно-тензорную теорию предложили Бранс и Дикке [35] в 1961 г.; мы уже обсуждали некоторые ее детали в § 3 гл. 7 и § 9 гл. 9. В этой теории гравитационная постоянная G заменена на обратную величину некоторого скалярного поля ϕ. Чтобы в теории содержались соотношения типа (16.4.3), предполагается, что ϕ подчиняется уравнению поля

$$\Box^2 \phi \equiv (\phi^{;\mu})_{;\mu} = \frac{8\pi}{3+2\omega} T^{\mu}{}_{\mu}, \tag{16.4.10}$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи (без ϕ) и ω — безразмерный параметр связи. Чтобы не нарушить принцип эквивалентности, предполагается, что ϕ не входит в уравнения движения обычного вещества и излучения, так что $T^{\mu\nu}$ подчиняется известно-

[1]) Эта модель получила определенное завершение в виде конформно-инвариантной скалярно-тензорной теории Дирака [30*]. — *Прим. перев.*

му закону сохранения:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\,\nu} = 0. \tag{16.4.11}$$

Тогда тождества Бианки требуют, чтобы уравнения гравитационного поля имели вид (7.3.14) или, эквивалентно,

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi}{\phi}\left[T_{\mu\nu} - \left(\frac{1+\omega}{3+2\omega}\right) g_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\lambda}\right] - \frac{\omega}{\phi^2}\,\phi;\,\mu\phi;\,\nu - \frac{1}{\phi}\,\phi;\,\mu;\,\nu. \tag{16.4.12}$$

Эта теория становится эквивалентной теории Иордана [34] в специальном случае тензора энергии-импульса с исчезающим следом.

Применяя теорию Бранса — Дикке в космологии, мы снова, как и в гл. 14 и 15, рассматриваем Вселенную сглаженной в однородный изотропный континуум. Тогда метрика имеет робертсон-уолкеровский вид (14.2.1); тензор энергии-импульса имеет вид (14.2.12) для идеальной жидкости, а скалярное поле φ является функцией только времени. Прямое вычисление с использованием (15.1.6), (15.1.7), (15.1.11) и (15.1.13) дает «t — t»-компоненту уравнения (16.4.12) в виде

$$\frac{3\ddot{R}}{R} = -\frac{8\pi}{(3+2\omega)\,\phi}\{(2+\omega)\,\rho + 3\,(1+\omega)\,p\} - \frac{\omega(\dot{\phi})^2}{\phi^2} - \frac{\ddot{\phi}}{\phi}, \tag{16.4.13}$$

тогда как чисто пространственные компоненты (16.4.12) приводят к уравнению

$$-\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{2(\dot{R})^2}{R^2} - \frac{2k}{R^2} = -\frac{8\pi}{(3+2\omega)\,\phi}\{(1+\omega)\,\rho - \omega p\} + \frac{\dot{\phi}\dot{R}}{\phi R}; \tag{16.4.14}$$

смешанные пространственно-временные компоненты просто обращаются в тождество $0 = 0$. Уравнение поля (16.4.10) для φ теперь имеет вид

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi}R^3) = \frac{8\pi}{(3+2\omega)}(\rho - 3p)\,R^3, \tag{16.4.15}$$

а из закона сохранения (16.4.11), так же, как в гл. 14, следует

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{R}}{R}(\rho + p). \tag{16.4.16}$$

Исключая $\ddot{R}$ из (16.4.13) и (16.4.14) и пользуясь уравнением (16.4.15) для исключения $\ddot{\phi}$, можно получить уравнение первого порядка, аналогичное (15.1.20):

$$\frac{(\dot{R})^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi\rho}{3\phi} - \frac{\dot{\phi}\dot{R}}{\phi R} + \frac{\omega(\dot{\phi})^2}{6\phi^2}. \tag{16.4.17}$$

Мы можем вернуться к уравнениям (16.4.13) и (16.4.14), дифференцируя (16.4.17), и, следовательно, в качестве фундаментальных

уравнений космологии Бранса — Дикке можно взять уравнения (16.4.15) — (16.4.17) плюс уравнение состояния, определяющее p как функцию ρ. Кроме того, из уравнения (9.9.11) видно, что гравитационная «постоянная», измеренная по наблюдениям медленно движущихся частиц или в экспериментах по замедлению времени, равна

$$G = \left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right)\phi^{-1}. \qquad (16.4.18)$$

При любом данном уравнении состояния $p = p(\rho)$ уравнения (16.4.15) — (16.4.17) можно рассматривать как систему из одного дифференциального уравнения второго порядка и двух уравнений первого порядка для трех переменных R, ϕ и ρ. Отсюда следует, что эти уравнения определяют $R(t)$, $\phi(t)$ и $\rho(t)$ при всех t, если нам известны постоянные ω и k и нынешние значения *четырех* переменных, скажем R_0, $\dot{R}_0$, ϕ_0 и ρ_0. Это несколько неожиданно, поскольку в модели Фридмана, чтобы вычислить $R(t)$ и $\rho(t)$ при всех t [см. (15.2.1)], нам нужно было задать начальные данные для двух величин, скажем R_0, $\dot{R}_0$ и, конечно, постоянную G.

Первоначально Бранс и Дикке [35] исключали эту лишнюю степень свободы наложением дополнительного ограничения в окрестности начальной сингулярности, где $R = 0$:

$$\dot{\phi}R^3 \to 0 \text{ при } R \to 0. \qquad (16.4.19)$$

При этом начальном условии и при заданных ω, k и уравнении состояния мы можем получить решение для $R(t)$, $\rho(t)$ и $\phi(t)$, задавая только три параметра настоящего момента времени, например R_0, $\dot{R}_0$ и ϕ_0 или более употребительные H_0, G_0 и q_0 (или ρ_0).

Несколько лет назад Дикке [36] [1]) высказал мысль, что, возможно, нужными решениями в действительности являются как раз те, которые не подчиняются ограничению (16.4.19). Вообще говоря, все решения имеют сингулярность с $R = 0$ в конечный момент времени, который мы, как обычно, принимаем за $t = 0$, тогда решение уравнения (16.4.15) имеет

$$\dot{\phi}(t)\,R^3(t) = \frac{8\pi}{2\omega+3}\int_0^t [\rho(t') - 3p(t')]\,R^3(t')\,dt' - C, \qquad (16.4.20)$$

где C — постоянная интегрирования, которая может быть положительной, отрицательной или нулем. При $C = 0$ мы имеем трехпараметрическое семейство моделей, удовлетворяющих условию

[1]) В этой работе Дикке использует модификацию теории Бранса — Дикке [37]; подход, более близкий к излагаемому здесь, см. в [38].

(16.4.19). При $C \neq 0$ мы получаем четырехпараметрическое семейство решений: четвертый параметр нужен для фиксирования значения C.

Эти решения обладают довольно тонкими свойствами, и нам будет полезно изучить подробнее тот случай, когда уравнения (16.4.15) — (16.4.17) могут быть решены аналитически, а именно случай нулевого давления и нулевой кривизны

$$p = 0, \qquad k = 0.$$

Тогда из (16.4.16) следует, что

$$\rho \sim R^{-3}, \tag{16.4.21}$$

и из уравнения (16.4.20) немедленно получаем

$$\dot{\phi} = \frac{8\pi\rho}{2\omega+3}(t-t_c), \tag{16.4.22}$$

где

$$t_c \equiv \frac{(2\omega+3)C}{2\pi\rho R^3}. \tag{16.4.23}$$

Оказывается весьма удобным ввести новую зависимую переменную

$$u \equiv (t-t_c)\frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{8\pi\rho\,(t-t_c)^2}{(2\omega+3)\,\phi} > 0. \tag{16.4.24}$$

Выражая в уравнении (16.4.17) ρ и $\dot{\varphi}/\varphi$ через u и положив $k = 0$, можно сразу же получить решение для $\dot{R}/R$:

$$\frac{2(t-t_c)\dot{R}}{R} = -u \pm \left(\frac{3+2\omega}{3}\right)^{1/2}(u^2+4u)^{1/2}. \tag{16.4.25}$$

Кроме того, из (16.4.21) и логарифмической производной (16.4.22) следует, что

$$\frac{\dot{u}}{u} = -\frac{3\dot{R}}{R} + 2(t-t_c)^{-1} - \frac{\dot{\phi}}{\phi}$$

или, после использования (16.4.24) и (16.4.25),

$$(t-t_c)\,\dot{u} = \frac{1}{2}u\left\{u+4 \mp 3\left(\frac{3+2\omega}{3}\right)^{1/2}(u^2+4u)^{1/2}\right\}. \tag{16.4.26}$$

Интегрированием этого уравнения первого порядка находим $u(t)$, а затем можно проинтегрировать уравнения (16.4.24), (16.4.25) и определить $\varphi(t)$ и $R(t)$.

Один очевидный класс решений уравнения (16.4.26) составляют решения с постоянным u, равным одному из нулей выражения в правой части (16.4.26). Чтобы найти такой нуль с $u > 0$, следует взять верхний знак перед квадратным корнем в (16.4.25) и (16.4.26); тогда искомое решение равно

$$u = \frac{2}{3\omega+4}. \tag{16.4 27}$$

Для этого решения следует положить $t_c = 0$, поскольку в противном случае из уравнения (16.4.25) следовало бы, что $R = 0$ только при $t = t_c$, а мы договорились установить часы так, чтобы эта сингулярность имела место при $t = 0$. При $t_c = 0$ получаем следующие решения уравнений (16.4.24) и (16.4.25) [35]:

$$\phi \sim t^{2/(4+3\omega)}, \tag{16.4.28}$$

$$R \sim t^{(2\omega+2)/(3\omega+4)}, \tag{16.4.29}$$

$$\frac{4\pi\rho t^2}{\phi} = \frac{(2\omega+3)}{(3\omega+4)}. \tag{16.4.30}$$

При $t_c \neq 0$ необходимо анализировать, как движется u в уравнении (16.4.26) между сингулярными точками $u = 0$, $u = 2/(3\omega + 4)$ и $u = \infty$. Результаты критическим образом зависят от того, какого знака t_c.

$t_c > 0$. В этом случае u монотонно падает от $u = \infty$ при $t = 0$ до $u = 0$ при $t = t_c$ и затем монотонно растет к значению (16.4.27) при $t \to \infty$. Знак перед квадратным корнем в (16.4.25) и (16.4.26) в точке t_c меняется с нижнего для $t < t_c$ на верхний при $t > t_c$. Решения уравнения (16.4.26) таким образом имеют вид

$$\ln\left(1 - \frac{t}{t_c}\right) = -2\int_0^u \frac{du}{u\,[u+4+3\,(1+2\omega/3)^{1/2}\,(u^2+4u)^{1/2}]}, \quad t < t_c,$$

$$\ln\left(\frac{t}{t_c} - 1\right) = 2\int_0^u \frac{du}{u\,[u+4-3\,(1+2\omega/3)^{1/2}\,(u^2+4u)^{1/2}]}, \quad t > t_c.$$

Эти интегралы можно представить в замкнутой форме, но интереснее рассмотреть поведение этих решений в очень ранние и в очень поздние моменты времени. При $t \ll t_c$ имеем

$$u \to \frac{(3\,[1+2\omega/3]^{1/2}-1)}{(4+3\omega)\,(t/t_c)}$$

и, следовательно, уравнения (16.4.24) и (16.4.25) имеют решения [36]

$$\phi \sim t^{(1-3[1+2\omega/3]^{1/2})/(4+3\omega)}, \tag{16.4.31}$$

$$R \sim t^{(1+\omega+[1+2\omega/3]^{1/2})/(4+3\omega)}. \tag{16.4.32}$$

При $t \gg t_c$ величина u стремится к значению (16.4.27) и решения принимают форму (16.4.28) и (16.4.29).

$t_c < 0$. В этом случае u монотонно падает от $u = \infty$ при $t = 0$ до значения (16.4.27) при $t \to \infty$. Квадратные корни в (16.4.25) и (16.4.26) берутся с верхним знаком, и уравнение (16.4.26) имеет

решение

$$\ln\left(1+\frac{t}{|t_c|}\right)=2\int_u^\infty \frac{du}{u\{3(1+2\omega/3)^{1/2}(u^2+4u)^{1/2}-u-4\}}.$$

При $t \ll |t_c|$ находим

$$u \to \frac{(3[1+2\omega/3]^{1/2}+1)}{(4+3\omega)(t/|t_c|)}$$

и, следовательно, уравнения (16.4.24) и (16.4.25) имеют решения [36]

$$\phi \sim t^{(3[1+2\omega/3]^{1/2}+1)/(4+3\omega)}, \tag{16.4.33}$$

$$R \sim t^{(1+\omega-[1+2\omega/3]^{1/2})/(4+3\omega)}. \tag{16.4.34}$$

При $t \gg |t_c|$ величина u стремится к значению (16.4.27) и решения (16.4.24) и (16.4.25) снова принимают форму (16.4.28) и и (16.4.29).

Итак, есть три типа решений, которые все ведут себя одинаково при $t \gg |t_c|$, но решительно различаются при $t \leqslant |t_c|$. Только простое решение с $t_c = 0$ гладко переходит в фридмановское решение с нулевой кривизной (ϕ const, $R \sim t^{2/3}$) в пределе больших ω; в решениях с $t_c > 0$ или $t_c < 0$ при $t \to 0$ соответственно $\phi \to \infty$ или $\phi \to 0$ для любого конечного ω.

Хотя эти решения были получены в предположении нулевого давления и нулевой кривизны, в них проявляются многие из свойств намного более сложных общих решений. В общем случае решения могут быть классифицированы в соответствии с тем, положительна, отрицательна или равна нулю постоянная интегрирования C в выражении (16.4.20). При достаточно больших t основной вклад в интеграл дает эра преобладания вещества, когда $\rho \sim R^{-3}$, следовательно, интеграл растет как t и постоянная интегрирования постепенно становится пренебрежимо малой. В этом пределе получаем

$$\dot{\phi} = \frac{8\pi\rho t}{2\omega+3}, \tag{16.4.35}$$

и все решения сходятся к решению с $C = 0$, которое, к сожалению, приходится получать численным интегрированием уравнений (16.4.17) и (16.4.35) при $\rho \sim R^{-3}$. С другой стороны, при t, достаточно малых, в (16.4.20) будет доминировать постоянная интегрирования, разумеется, при условии $C \neq 0$. В этом случае в (16.4.17) члены, соответствующие кривизне и плотности, становятся при $t \to 0$ пренебрежимо малыми, и решения принимают установленный ранее вид

$$\phi \sim t^{(1\mp 3[1+2\omega/3]^{1/2})/(4+3\omega)}, \tag{16.4.36}$$

$$R \sim t^{(1+\omega\pm[1+2\omega/3]^{1/2})/(4+3\omega)} \tag{16.4.37}$$

с верхним знаком при $C > 0$ и с нижним — при $C < 0$. Решения с $C = 0$ при больших ω гладко переходят в решения Фридмана, но решения с $C \neq 0$ имеют отличия в поведении при $t = 0$ для любых ω.

Теория Бранса — Дикке не дает удовлетворительного объяснения численных соотношений, о которых говорилось в начале параграфа. Вообще говоря, $\dot{\phi}/\phi$ и t^{-1} могут быть порядка «постоянной Хаббла» H, а ϕ — порядка G^{-1}, и поэтому, если становится возможным пренебречь постоянной интегрирования C, уравнение (16.4.35) оказывается более или менее сходным с соотношением (16.4.3). Однако в ранние периоды, когда нельзя пренебречь C, (16.4.3) не выполняется даже приблизительно. Еще важнее то, что загадочное соотношение (16.4.2) вообще не объясняется теорией Бранса — Дикке. В самом деле, в простейшем случае нулевого давления, нулевой кривизны и нулевой постоянной интегрирования C из (16.4.29) и (16.4.28) следует, что $H \sim 1/t$ и $G \sim t^{-2/(4+3\omega)}$, поэтому масса $(\hbar^2 H/Gc)^{1/3}$ убывает со временем, и соотношение (16.4.2) может выполняться лишь в течение короткого периода истории Вселенной.

Обратимся теперь к наблюдательным следствиям этой теории. Ни гравитационное поле, ни поле Бранса — Дикке не оказывают непосредственного воздействия на те ядерные процессы, в которых, как мы считаем, образуется гелий в ранней Вселенной, но они влияют на скорость расширения Вселенной, которая в свою очередь определяет, сколько гелия сможет образоваться (§ 7 гл. 15). Решения с $C = 0$, полученные численным интегрированием уравнений (16.4.17) и (16.4.20), показывают [36], что в случае $\omega = 5$, $k = 0$, $H_0^{-1} = 9{,}5 \cdot 10^9$ лет, $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-29}$ г/см^3 влияние поля Бранса — Дикке проявляется в сокращении на 55% времени, требующегося для падения температуры до 10^9 К, и соответственно в увеличении количества нейтронов, остающихся к началу нуклеоинтеза; вследствие этого содержание космологически образовавшегося гелия получается около 42% вместо 27% (по массе). При $k = -1$ и меньшей современной плотности различие между моделями Фридмана и Бранса — Дикке значительно меньше [39]. С другой стороны, если в (16.4.20) $C \neq 0$, то мы можем получить любую угодную нам скорость расширения ранней Вселенной. Как было отмечено в § 7 гл. 15, при умеренном ускорении расширения выход гелия увеличивается, но если это ускорение слишком большое, то не хватит времени для того, чтобы в реакции $n + p \rightarrow d + \gamma$ образовалось такое количество дейтерия, которое достаточно для «запуска» нуклеосинтеза, и тогда образуется очень мало гелия.

В более близкую к нам эпоху, находящуюся в пределах досягаемости оптических телескопов, постоянной интегрирования C, по-видимому, хотя и не наверняка, можно пренебречь, и поэтому

при больших ω соотношения между кривизной, плотностью, возрастом Вселенной, постоянной Хаббла и параметром замедления почти те же самые, что и в моделях Фридмана. Например, в модели без давления и с нулевой кривизной из (16.4.28) — (16.4.30) в пределе $t \gg |t_c|$ получаем соотношения

$$H_0 t_0 = \frac{2+2\omega}{4+3\omega}, \tag{16.4.38}$$

$$q_0 = \frac{\omega+2}{2\omega+2}, \tag{16.4.39}$$

$$\frac{4\pi G\rho_0}{H_0^2} = \frac{(4+3\omega)(4+2\omega)}{(2+2\omega)^2}. \tag{16.4.40}$$

При $\omega = 6$ эти три величины имеют значения 0,64; 0,57; 1,80, в то время как соответствующие значения в модели Фридмана с $k = 0$ равны 0,67; 0,50 и 1,50.

Несомненно, наиболее отличительной чертой теорий Дирака и Бранса — Дикке является убывание гравитационной постоянной G со временем. Из (16.4.35) получается следующее выражение для относительной скорости изменения G в настоящее время:

$$\left(\frac{\dot G}{G}\right)_0 = -\left(\frac{\dot\phi}{\phi}\right)_0 = -\frac{8\pi\rho_0 t_0}{(2\omega+3)\,\phi_0} = -\frac{8\pi G_0\rho_0 t_0}{(2\omega+4)}. \tag{16.4.41}$$

Вообще говоря, чтобы выразить ρ_0 и t_0 через G_0, H_0 и q_0, пришлось бы прибегать к численному решению дифференциальных уравнений (16.4.35) и (16.4.17). Однако если постоянная ω достаточно велика (скажем, $\omega \geqslant 5$), то скорость убывания G можно вычислить с довольно высокой точностью, используя в (16.4.41) в качестве ρ_0 и t_0 значения, полученные в § 2 и 3 гл. 15 из уравнений Эйнштейна. Общее выражение для ρ_0 в модели Фридмана имеет вид

$$\frac{4\pi G_0\rho_0}{3H_0^2} = q_0. \tag{16.4.42}$$

Значения $H_0 t_0$ и соответствующие значения $(\dot G/G)_0$ в (16.4.41) сведены в табл. 16.1.

В особом случае $k = 0$, когда мы имеем аналитическое решение, формулы (16.4.18), (16.4.28) и (16.4.29) приводят к следующему «точному» результату:

$$\left(\frac{\dot G}{G}\right)_0 = -\frac{H_0}{1+\omega},$$

и оценки этой величины, приведенные в табл. 16.1, в этом случае на 12% ниже (при $\omega = 6$). Оценки в табл. 16.1 хорошо согласуются с «точными» результатами, вычисленными для $k = -1$ и $\omega = 5$ или $\omega = 10$ [39].

Таблица 16.1

Скорость убывания G в моделях Бранса — Дикке и в модели Дирака *

Модель	q_0	$t_0 H_0$ ($\omega = \infty$)	$(\dot{G}/G)_0$
Бранс — Дикке	$\ll 1$	1	$-\frac{3q_0H_0}{\omega+2}$
Бранс — Дикке	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{H_0}{\omega+2}$
Бранс — Дикке	1	$\frac{\pi}{2}-1$	$-\frac{1{,}71H_0}{\omega+2}$
Бранс — Дикке	$\gg 1$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2q_0}}$	$-\frac{3{,}34H_0\sqrt{q_0}}{\omega+2}$
Дирак	2	$\frac{1}{3}$	$-3H_0$

* Оценки для значений $(\dot{G}/G)_0$ получены из уравнения (16.4.41) с использованием в качестве t_0 и ρ_0 результатов для модели Фридмана (т. е. $\omega = \infty$), при этом значение t_0 указано в третьей колонке, а значение ρ_0 берется из (16.4.42).

При $H_0^{-1} = 10^{10}$ лет, $0{,}01 \leqslant q_0 \leqslant 1{,}0$ и $\omega = 6$ табл. 16.1 дает относительную скорость убывания G от $4 \cdot 10^{-13}$ до $2 \cdot 10^{-11}$ в год. В противоположность этому модель Дирака предсказывает значительно более быстрое убывание гравитационной «постоянной»: при $H_0^{-1} = 10^{10}$ лет G убывает на $3 \cdot 10^{-10}$ в год.

Наилучший экспериментальный верхний предел современной скорости изменения G получается из анализа радиолокационных наблюдений Меркурия и Венеры [40]. Для планеты с круговой орбитой радиусом r и со скоростью v имеем $M_\odot G = v^2 r$, поэтому, если угловой момент mrv остается фиксированным, а G при этом меняется, то r и v изменяются как

$$r \sim \frac{1}{v} \sim \frac{1}{G}, \tag{16.4.43}$$

а период обращения $2\pi r/v$ — как

$$2\pi \frac{r}{v} \sim \frac{1}{G^2}. \tag{16.4.44}$$

Путем повторных сравнений периода обращения внутренних планет в 1966—1969 гг. с измерением времени по атомным часам (ход которых не зависит от G) Шапиро и др. [40] установили верхний

предел

$$\left|\frac{\dot{G}}{G}\right|_0 \leqslant 4\cdot 10^{-10} \text{ год}.$$

Этого условия почти достаточно, чтобы исключить теорию Дирака, но оно слишком слабое, чтобы как-то ограничивать параметр взаимодействия Бранса — Дикке ω. Однако погрешность этих измерений $(\dot{G}/G)_0$ убывает примерно как длительность наблюдений во времени в степени $^5/_2$, поэтому следующие пять лет наблюдений должны снизить верхнюю границу $\dot{G}/G$ до значения, ожидаемого в модели Бранса — Дикке, с q_0 порядка единицы и $\omega = 6$.

В перспективе есть еще возможность определить верхний предел скорости изменения G из анализа времени прохождения сигнала лазера, посланного от Земли к Луне и отраженного назад уголковыми отражателями, установленными на лунной поверхности экспедициями «Аполло» [41, 42]. Однако анализ этих наблюдений серьезно усложняется приливными явлениями, которые играют главную роль в динамике системы Земля — Луна. (К счастью, приливные эффекты не оказывают заметного воздействия на движения тех планет, которые изучаются Шапиро и др.)

Вариации G в течение последних нескольких тысячелетий, возможно, могут быть установлены при изучении исторических свидетельств о затмениях [43]. Полное солнечное затмение наблюдается в очень малой области земной поверхности, и поэтому данные о том, что определенное полное затмение наблюдалось в некотором конкретном месте, дают точную информацию об отношении длительности суток (которая слабо зависит от G) к длительности года и лунного месяца, меняющихся как G^2. Кюро [44] и Дикке [45, 46] проанализировали пять затмений, имевших место между 1062 г. до н. э. и 71 г. н. э., и получили, что относительное удлинение земных суток при сравнении их с периодами обращения планет равно в среднем $(15{,}9 \pm 0{,}7)\cdot 10^{-11}$ в год. На длительность земных суток оказывает влияние ряд известных факторов [47], в частности, приливное замедление, относительная величина которого составляет $23{,}5\cdot 10^{-11}$—$25{,}6\cdot 10^{-11}$ в год, и ускорение вследствие повышения уровня моря и изостатического восстановления геоида, равное $0{,}5\cdot 10^{-11}$—$3{,}0\cdot 10^{-11}$ в год. После этого остается необъясненное относительное *сокращение* суток от $4\cdot 10^{-11}$ до $10\cdot 10^{-11}$ в год. Поскольку по данным о затмениях измеряется длительность земных суток относительно периодов обращения планет, это кажущееся сокращение суток можно было бы объяснить как замедление движения планет вследствие убывания G с относительной скоростью от $2\cdot 10^{-11}$ до $5\cdot 10^{-11}$ в год [см. (16.4.44)]. Однако данные по затмениям довольно неопределенны. (Где находился Архилох во время затмения в 648 г. до н. э. — на Паросе или на Тасосе?) Еще важнее то, что имеется много неопределенностей

в сложной динамике системы Земля — Луна, за счет которых можно объяснить оставшееся небольшое ускорение вращения Земли, не прибегая к гипотезе об убывании G.

Не исключено, что можно измерить имевшие место за последние 350 миллионов лет изменения числа суток в лунном месяце или в году путем подсчета месячных или годичных колец роста и суточных выступов роста в ископаемых кораллах [48, 49]. Однако пока этот метод не дал результатов, точность которых была бы приемлема для космологов.

Вековое уменьшение гравитационной «постоянной» в течение миллиардов лет могло бы иметь интересные проявления в эволюции Земли и звезд, но, к сожалению, ни одно из них не дало бы однозначного ответа на вопрос, убывает ли в действительности G. При убывании G радиус Земли должен расти приблизительно как $G^{-0,1}$, что вызвало бы сложные разломы земной коры [50]. Если постоянная G в прошлом была больше, то термоядерная эволюция звезд должна была идти быстрее [51]; при относительном убывании G $1 \cdot 10^{-11}$—$2 \cdot 10^{-11}$ в год звезда, истинный возраст которой 6—8 миллиардов лет, должна казаться нам на 9—19 миллиардов лет старше [46, 52]. Наконец, если «постоянная» G в прошлом была больше, то была больше и светимость Солнца $L_\odot$, которая при этом зависела от времени как G^8 [53, 51]. Поскольку температура поверхности Земли $T_\oplus$ меняется со временем примерно как $(L_\odot/r_\oplus^2)^{1/4}$, а радиус орбиты Земли $r_\oplus$ — как G^{-1}, то $T_\oplus \sim G^{2,5}$. Согласно (16.4.28), в модели Бранса — Дикке с $k = 0$ и $\omega = 6$ G убывает как $t^{-0,09}$ и поэтому, если возраст Вселенной $8 \cdot 10^9$ лет, то $2 \cdot 10^9$ лет назад температура поверхности Земли была лишь на 20° С выше, чем сейчас; это обстоятельство вряд ли могло решающим образом сказаться на биологической эволюции. С другой стороны, если «постоянная» G в соответствии с теорией Дирака убывала как t^{-1}, то 10^9 лет назад температура поверхности Земли была выше точки кипения воды, если только альбедо Земли не было тогда много выше, чем сейчас [54] (см. также [34]). Таким образом, слишком большое значение гравитационной постоянной в отдаленном прошлом могло бы воспрепятствовать возникновению таких форм жизни, которые проявляли бы любопытство в вопросе о том, как устроена Вселенная.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

См. литературу к гл. 14 и 15, а также следующие две статьи:

Petrosian V., Salpeter E. E., Lemaître Models and the Cosmological Constant, Comments Astrophys. and Space Phys., 2, 109 (1970).

Dicke R. H., Gravitation an Enigma, 27th Joseph Henry Lecture of the Philosophical Society of Washington, J. Wash. Acad. Sci., 48, 213 (1958).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *De Cheseaux J. P. L.*, Traité de la Comète, Lausanne, 1744, p. 223, воспроизведено в книге *Dickson F. P.*, The Bowl of Night, M.I.T. Press, 1968, приложение II.
2. *Olbers H. W. M.*, Bode's Jahrbuch, 111 (1826); перепечатано в книге The Bowl of Night (см. [1], приложение I).
3. *Bondi H.*, Cosmology, 2nd ed., Cambridge University Press, 1960, Ch. III.
4. *Weinberg S.*, Nuovo Cimento, Ser. X, **25**, 15, 1962.
5. *Einstein A.*, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., **142** (1917); (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1965, т. 1, стр. 601).
6. *de Sitter W.*, Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam), **19**, 1217 (1917); **20**, 229 (1917); **20**, 1309 (1917); Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **78**, 3 (1917).
7. *Lemaître G.*, Ann. Soc. Sci. Brux., **A47**, 49 (1927); Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **91**, 483 (1931).
8. *Eddington A. S.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **90**, 668 (1930).
9. *Petrosian V., Salpeter E. E., Szekeres P.*, Ap. J., **147**, 1222 (1967).
10. *Shklovsky I.*, Ap. J., **150**, L1 (1967).
11. *Rowan-Robinson M.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **141**, 445 (1968).
12. *Petrosian V., Salpeter E. E.*, Ap. J., **151**, 411 (1968).
13. *Kardashev N. S.*, Ap. J., **150**, L135 (1967).
14. *McVittie G. C., Stabell R.*, Ap. J., **150**, L141 (1967).
15. *Petrosian V.*, Ap. J., **155**, 1029 (1969).
16. *Brecher K., Silk J.*, Ap. J., **158**, 91 (1969).
17. *Hoyle F.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **108**, 372 (1948); **109**, 365 (1949).
18. *Schwarzschild K.*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, **128**, 132 (1903).
19. *Tetrode H.*, Zs. Phys., **10**, 317 (1922).
20. *Fokker A. D.*, Zs. Phys., **58**, 386 (1929); Physica, **9**, 33 (1929); **12**, 145 (1932).
21. *Wheeler J. A., Feynman R. P.*, Rev. Mod. Phys., **17**, 157 (1945); ibid., **21**, 425 (1949).
22. *Hogarth J. E.*, Proc. Roy. Soc., **A267**, 365 (1962).
23. *Hoyle F., Narlikar J. V.*, Proc. Roy. Soc., **A277**, 1 (1964).
24. *Hoyle F., Narlikar J. V.*, Proc. Roy. Soc., **A282**, 178 (1964).
25. *Hoyle F., Narlikar J. V.*, Proc. Roy. Soc., **A282**, 184, 191 (1964).
26. *Deser S., Pirani F. A. E.*, Proc. Roy. Soc., **A288**, 133 (1965).
27. *Hoyle F., Narlikar J. V.*, Ann. Phys., **54**, 207 (1969).
28. *Eddington A. S.*, Fundamental Theory, Cambridge University Press, 1946.
29. *Dirac P. A. M.*, Nature, **139**, 323 (1937); Proc. Roy. Soc., **A165**, 199 (1938).
30*. *Dirac P. A. M.*, Proc. Roy. Soc., **A333**, 419 (1973).
31. *Jordan P.*, Nature, **164**, 637 (1949).
32. *Jordan P.*, Schwerkraft und Weltall, 2nd ed., Vieweg und Sohn, 1955.
33. *Fierz M.*, Helv. Phys. Acta, **29**, 128 (1956).
34. *Jordan P.*, Zs. Phys., **157**, 112 (1959).
35. *Brans C., Dicke R. H.*, Phys. Rev., **124**, 925 (1961).
36. *Dicke R. H.*, Ap. J., **152**, 1 (1968).
37. *Dicke R. H.*, Phys. Rev., **125**, 2163 (1962).
38. *Greenstein G. S.* (в печати).
39. *Greenstein G. S.*, Astrophys. Lett., **1**, 139 (1968).
40. *Shapiro I. I., Smith W. B., Ash M. E., Ingalls R. P., Pettengill G. H.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 27 (1971).
41. *Alley C. O., Bender P., Dicke R. H., Faller J., Franken P., Plotkin H., Wilkinson D. T.*, J. Geophys. Res., **70**, 2267 (1965).
42. *Alley C. O. et al.*, Science, **167**, 458 (1970).
43. *Fotheringham J.*, Mon. Not. Roy. Ast. Soc., **81**, 104 (1920).
44. *Curott D. R.*, Astron. J., **71**, 264 (1966).
45. *Dicke R. H.*, в книге The Earth-Moon System, Plenum Press, 1966, p. 93.
46. *Dicke R. H.*, Physics Today, **20**, 55 (1967).

47. *Munk W. H., MacDonald G. J. F.*, The Rotation of the Earth, Cambridge University Press, 1960.
48. *Scrutton C. T.*, Paleontology, 7, 552 (1965).
49. *Wells J. W.*, в книге The Earth-Moon System, Plenum Press, 1966, p. 70.
50. *Dicke R. H.*, Science, 138, 653 (1962).
51. *Dicke R. H.*, Rev. Mod. Phys., 34, 110 (1962).
52. *Dicke R. H.*, в книге Stellar Evolution, Plenum Press, 1966, p. 319.
53. *Dicke R. H.*, Rev. Mod. Phys., 29, 355 (1957).
54. *Teller E.*, Phys. Rev., 73, 801 (1948).

Приложение

ЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВЕЛИЧИН[1)]

Числовые постоянные	
$\pi = 3{,}1415927$	$1'' = 4{,}8481 \cdot 10^{-6}$ рад
$e = 2{,}7182818$	$\ln 10 = 2{,}3025851$
Физические постоянные	
Скорость света	$c = 2{,}99792458\,(1{,}2) \cdot 10^{10}$ см·с$^{-1}$
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}6732\,(31) \cdot 10^{-8}$ дин·см^2·г$^{-2}$
	$\frac{G}{c^2} = 7{,}425 \cdot 10^{-29}$ см·г$^{-1}$
Постоянная Планка	$\hbar = 6{,}582173\,(17) \cdot 10^{-16}$ эВ·с = $= 1{,}0545887\,(57) \cdot 10^{-27}$ эрг·с
	$h = 2\pi\hbar = 6{,}625 \cdot 10^{-27}$ эрг·с
Электронвольт	1 эВ $= 1{,}6021917\,(70) \cdot 10^{-12}$ эрг
Заряд электрона	$e = 4{,}803242\,(14) \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ
Постоянная тонкой структуры	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137{,}03604\,(11)$
Масса электрона	$m_e = 9{,}109534(47) \cdot 10^{-28}$ г
	$m_e c^2 = 0{,}5110034\,(14)$ МэВ
Масса протона	$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г
	$m_p c^2 = 938{,}2796\,(27)$ МэВ
Масса нейтрона	$m_n c^2 = 939{,}5731\,(27)$ МэВ
Постоянная Ридберга	$\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13{,}605804\,(36)$ эВ
Томсоновское сечение	$\frac{8\pi e^4}{3 m_e{}^2 c^4} = 0{,}6652448\,(33) \cdot 10^{-24}$ см^2

[1)] Взяты из обзора «Review of Particle Properties», Particle Data Group, Rev. Mod. Phys., 43, No. 2, Part II (1971), и из книги *C. W. Allen*, Astrophysical Quantities, Athlone Press, London, 1955. (*К. Аллен*, Астрофизические величины, М., 1960.) Цифры, взятые в скобки, означают одно стандартное отклонение данной величины. (Исправлено по Phys. Lett. 50B, № 1 (1974).— *Прим. ред.*)

Константа слабого взаимодействия	$\frac{g_v c}{\hbar^3} = 1{,}02 \cdot 10^{-5}\, m_p^{-2}$
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38062\,(44) \cdot 10^{-16}$ эрг·К$^{-1}$
Постоянная абсолютно черного тела	$a \equiv \frac{\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3} = 7{,}5641 \cdot 10^{-15}$ эрг·см$^{-3}$·К$^{-4}$
Масса типичной звезды	$\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} m_p^{-2} = 3{,}77 \cdot 10^{33}$ г

Основные астрономические постоянные

Сидерический год (1900)	1 год $= 3{,}1558149984 \cdot 10^7$ с
Световой год	1 св. год $= 9{,}4605 \cdot 10^{17}$ см
Среднее расстояние от Земли до Солнца	1 а. е. $= 1{,}495985\,(5) \cdot 10^{13}$ см
Парсек	1 пс $= 3{,}0856\,(1) \cdot 10^{18}$ см $= 3{,}2615$ св. лет
Время Хаббла при постоянной Хаббла, равной 100 км·с$^{-1}$× × Мпс$^{-1}$	$[100$ км·с$^{-1}$·Мпс$^{-1}]^{-1} = 9{,}78 \cdot 10^9$ лет
Масса Солнца	$M_\odot = 1{,}989\,(2) \cdot 10^{33}$ г
	$\frac{M_\odot G}{c^2} = 1{,}475$ км
Радиус Солнца	$R_\odot = 6{,}9598\,(7) \cdot 10^5$ км
Безразмерный потенциал поверхности Солнца	$\frac{M_\odot G}{R_\odot c^2} = 2{,}12 \cdot 10^{-6}$
Светимость Солнца	$L_\odot = 3{,}90\,(4) \cdot 10^{33}$ эрг·с
Масса Земли	$M_\oplus = 5{,}977\,(4) \cdot 10^{27}$ г
	$\frac{M_\oplus G}{c^2} = 0{,}443$ см
Экваториальный радиус Земли	$R_\oplus = 6{,}37817\,(4) \cdot 10^3$ км
Безразмерный потенциал поверхности Земли	$\frac{M_\oplus G}{R_\oplus c^2} = 6{,}95 \cdot 10^{-9}$

Ускорение свободного падения на поверхности Земли	$g = 980{,}665$ см·с$^{-2}$
Скорость спутника Земли на низкой орбите	$v_s = 7{,}9$ км·с$^{-1}$
Средняя орбитальная скорость Земли	$v_\oplus = 29{,}78$ км·с$^{-1}$
Масса Луны	$M_\leftmoon = 7{,}35 \cdot 10^{25}$ г
	$\frac{M_\leftmoon G}{c^2} = 5{,}45 \cdot 10^{-3}$ см
Радиус Луны	$R_\leftmoon = 1738$ км
Безразмерный потенциал поверхности Луны	$\frac{M_\leftmoon G}{Rc^2} = 3{,}14 \cdot 10^{-11}$
Среднее расстояние от Земли до Луны	$r_\leftmoon = 3{,}84 \cdot 10^5$ км
Видимая светимость звезды видимой болометрической величины m	$l = 2{,}52 \cdot 10^{-5}$ эрг·см$^{-2}$·с$^{-1}$·$10^{-2m/5}$
Абсолютная светимость звезды абсолютной болометрической величины M	$L = 3{,}02 \cdot 10^{35}$ эрг·с$^{-1}$·$10^{-2M/5}$

Элементы орбит планет

Планета	Символ	Период T, тропический год	Фокальный параметр L, 10^6 км	Эксцентриситет e (в 1900 г.)
Икар	—	1,12	51,0	0,827
Меркурий	☿	0,24085	55,46	0,205615
Венера	♀	0,61521	108,20	0,006820
Земля	⊕	1,00004	149,54	0,016750
Марс	♂	1,88089	225,95	0,093312
Юпитер	♃	11,86223	776,5	0,048332
Сатурн	♄	29,45772	1423	0,055890
Уран	♅	84,013	2863	0,0471
Нептун	♆	164,79	4498	0,0085
Плутон	P	284,4	5500	0,2494

Некоторые галактики *

Галактика	Тип	Расстояние, Мпс	m_{pg}	cz (наблюдаемое), км/с
Млечный Путь и его ближайшие соседи				
Млечный Путь	Sb или Sc	—	—	—
Б. Магелл. Облако	Ir или SBc	0,049	0,86	+280
М. Магелл. Облако	Ir	0,058	2,86	+167
М. Медведица	dE	0,077	?	?
Дракон	dE	0,08	?	?
Скульптор	dE	0,09	10,5	?
Печь	dE	0,13	9,1	+40
Лев I	dE	0,23	11,27	?
Лев II	dE	0,23	12,85	?
NGC6822	Ir	0,52	9,21	—40
Прочие галактики Местной Группы				
NGC 224 (M31)	Sb	0,65	4,33	—270
NGC 205	E6p	0,65	8,89	—240
NGC 221 (M32)	E2	0,65	9,06	—210
NGC 147	dE4	0,65	10,57	?
NGC 185	E0	0,65	10,29	—340
NGC 598 (M33)	Sc	0,74	6,19	—210
IC1 613	Ir	0,74	10,00	—240
Маффей 1	E	~ 1	$\sim 5{,}8$ (виз.)	?
Отдельные яркие галактики				
NGC 3031 (M 81)	Sb	2,0	7,85	+80
NGC 3034 (M 82)	Scp	2,0	9,20	+400
NGC 5236 (M 83)	Sc	2,4	7,0	+320
NGC 4826 (M 64)	?	3,7	9,27	+360
NGC 5128 (Cen A)	E0p (R)	$\sim 4{,}0$	7,87	+260
NGC 4736 (M 94)	Sbp	4,3	8,91	+350
NGC 5055 (M 63)	Sb	4,3	9,26	+2600
NGC 5194 (M 51)	Sb	4,3	9,26	+550
NGC 5457 (M 101)	Sc	4,3	8,20	+400

* Расстояния, типы и величины галактик взяты в основном из справочника S. van den Bergh, Observers Handbook of the Royal Canadian Astronomical Society, 1971. В графе «Тип» E означает «эллиптическая», E0, E1, ... — подтипы, расположенные в порядке увеличения сплюснутости; S означает «спиральная»; S0, Sa, Sb, Sc, ... — подтипы, расположенные в порядке роста клочковатости ветвей; SB означает «спиральная с перемычкой»; SB0, SBa, SBb, SBc, ... — подтипы, расположенные в порядке роста клочковатости ветвей; Ir означает «иррегулярная»; p — пекулярная; d — карликовая; R — сильный радиоисточник. Относительно Маффей 1 см. *Spinrad H et al.*, Ap. J., 163, 125 (1971).

Продолжение

Галактика	Тип	Расстояние, Мпс	m_{pg}	cz (наблюдаемое), км/с
Галактики из каталога Мессье в скоплении Девы (визуальные величины)				
NGC 4472 (M 49)	E4	15±5	8,9	
NGC 4579 (M 58)	SBb	15±5	9,9	
? NGC 4621 (M 59)	E5	15±5	10,3	
NGC 4649 (M 60)	E2	15±5	9,3	
NGC 4303 (M 61)	Sc	15±5	9,7	
NGC 4374 (M 84)	E?	15±5	9,8	
NGC 4382 (M 85)	SO	15±5	9,5	
NGC 4486 (M 87)	E0p (R)	15±5	9,3	+1200
NGC 4501 (M 88)	Sb	15±5	9,7	
NGC 4552 (M 89)	E0	15±5	10,3	
NGC 4569 (M 90)	Sb	15±5	9,7	
? NGC 4192 (M 98)	Sb	15±5	10,4	
NGC 4254 (M 99)	Sc	15±5	9,9	
NGC 4321 (M 100)	Sc	15±5	9,6	
NGC 4594 (M 104)	Sb	15±5	8,1	+1020

Некоторые скопления галактик

Скопление	Установленное число галактик	cz, км/с	Скопление	Установленное число галактик	cz, км/с
Дева	2 500	1 150	Скопление А	400	15 800
Пегас I	100	3 800	Б. Медведица I	300	14 500
Рыбы	100	5 000	Лев	300	19 500
Рак	150	4 800	Близнецы	200	23 300
Персей	500	5 400	Сев. Корона	400	21 600
Волосы Вероники	1 000	6 700	Волопас	150	39 400
			Б. Медведица II	200	41 000
Геркулес		10 300	Гидра		60 600
Пегас II		12 800			

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абрахам (Abraham) 33
Адамс (Adams) 27
Аделяр из Бата (Adelard) 26
Алфер (Alpher) 548
Альварес (Alvarez) 597
Альфвен (Alfvén) 636
Амбарцумян В. А. 642
Арнетт (Arnett) 585
Архилох (Archilochus) 671
Ашбрук (Ashbruck) 218

Бааде (Baade) 461—464, 465
Бакал (Bahcall) 536, 597, 598
Баум (Baum) 477
Бельтрами (Beltrami) 23
Бентли (Bentley) 603
Беркли (Berkeley) 30
Бернстайн (Bernstain) 584
Бессель (Bessel) 16, 24, 80, 455
Бете (Bethe) 585
Бианки (Bianchi) 164, 175, 178, 181, 272, 323, 390, 505, 656
Биркгофф (Birkhoff) 363, 364, 371, 375
Бозе (Bose) 526, 568
Бойяи В. (Bólyai W.) 16
Бойяи Я. (Bólyai J.) 16—19, 20, 22, 418
Больцман (Boltzman) 72, 286, 543, 629
Бонди (Bondi) 360, 490, 650, 662
Боннер (Bonner) 605
Борелли (Borelli) 15
Бранс (Brans) 174, 198, 213, 264—268, 494, 671
Бречер (Brecher) 537, 584
Булиалдус (Bullialdus) 26
Бэрбидж Г. (Burbidge G.) 521, 537, 585, 602
Бэрбидж М. (Burbidge M.) 521

Вагонер (Wagoner) 536, 539, 594, 602
Вакано (Wakano) 341
Валлерстайн (Wallerstain) 460
Валлис (Wallis) 15
Вебер (Weber) 292, 298, 303, 305, 307
Вейль (Weyl) 163
Вейнберг (Weinberg) 108, 137, 648, 649, 673
Велтман (Weltman) 11
Викрамсингх (Wickramsinghe) 563
Вилсон (Wilson) 462, 465, 534, 548, 549, 551
Виртц (Wirtz) 444, 445
Витале (Vitale) 15
Вокулер (de Vaucouler) 468
Волков (Volkoff) 345, 349, 368, 376
Врен (Wren) 26
Вульф (Woolf) 551

Галилей (Galileo) 23, 28, 31—33, 80, 108
Галлей (Halley) 26, 27
Гамов (Gamov) 547, 586, 600
Ган (Gunn) 535
Гаррисон (Harrison B.) 341
Гаусс (Gauss) 15—22, 23, 136, 147, 161, 164, 418
Гедель (Gödel) 434
Гейсс (Geiss) 595
Гендерсон (Henderson) 455
Генри (Henry) 537
Герлинг (Gerling) 16
Герман (Herman) 548
Герцшпрунг (Herzsprung) 457, 458, 460, 522, 523, 599
Гинзбург В. Л. 464, 538, 643, 642
Голд (Gold) 490
Голденберг (Goldenberg) 217, 218, 251
Гроссман (Grossman) 34
Гук (Hooke) 26
Гюйгенс (Huygens) 80

Де Витт (De Witt) 342
Дезер (Deser) 11
де Ситтер (de Sitter) 419, 654
де Шезо (de Cheseaux) 650, 651, 650—652
Джинс (Jeans) 553, 603, 605, 607, 608, 614, 615, 618, 619, 627, 628
Дикке (Dicke) 25, 83, 100, 174, 198, 210, 218, 251, 264—268, 434, 522, 548, 600, 664, 671
Дирак (Dirac) 174, 661, 669
Дэвис (Davis R) 597, 598

Евклид (Euclid) 14—17, 22

Зеелигер (Seeliger) 28
Зельдович Я. Б. 380, 633, 640, 642, 647—649

Ибен (Iben) 598, 599
Йордан (Jordan) 663

Камерон (Cameron) 585
Кант (Kant) 30
Картер (Carter) 375
Кассини (Cassini) 454
Кастальди (Cataldi) 15
Кеплер (Kepler) 26, 250
Керр (Kerr) 259, 375, 376
Киллинг (Killing) 400—407, 414, 415, 420—430, 438
Кларк С. (Clarke S.) 30
Кларк Ф. (Clarke F.) 584
Клейн О. (Klein O.) 636
Клейн Ф. (Klein F.) 17, 18, 418
Клейтон (Clayton) 641, 642
Клюбер (Klüber) 209
Кобетич (Kobetich) 537
Коккони (Cocconi)
Конклин (Conklin) 559, 560
Константинов Б. П. 584
Коусик (Cowsik) 537, 584
Кочаров Г. Е. 584
Крафт (Kraft) 466
Кристи (Christy) 599
Кристоффель (Christoffel) 23, 90
Кюро (Curott) 671

Ламберт (Lambert) 15
Ландау Л. Д. 68
Леавитт (Leavitt) 460, 461
Леверье (Le Verrier) 27
Леви бен Герзон (Levi ben Gerson) 15
Леви-Чивита (Levi-Civita) 52, 55
Лежандр (Legendre) 15
Лейбниц (Leibniz) 29
Леметр (Lemaître) 154, 656
Лензе (Lense) 259
Лифшиц Е. М. 68, 604, 605, 647
Лобачевский Н. И. 16—19, 20, 22, 418
Лонгейр (Longair) 490
Лоренц (Lorentz) 32, 33, 37—47, 53, 54, 72—76, 393
Лундмарк (Lundmark) 445

Майкельсон (Michelson) 31, 33
Мак-Келлар (McKellar) 551
Максвелл (Maxwell) 31—34, 37
Мандельштам (Mandelstam) 342
Мах (Mach) 31, 34, 102—104, 174, 257—259, 506
Мёссбауэр (Mössbauer) 97
Мигдал А. Б. 349, 379
Мизнер (Misner) 636
Минковский Г. (Minkowski G) 51, 142, 172, 180
Минковский Р. (Minkowski R) 477
Михайлов А. А. 209, 210, 227, 228
Морли (Morley) 33
Моррисон (Morrison) 564
Мэйол (Mayall) 477

Нарликар (Narlikar) 563, 659
Новиков И. 380, 640, 646
Нордведт (Nordvedt) 11
Нордстрем (Nordström) 33
Нунан (Noonan) 511
Ньювенхойзен (van Niewenhuizen) 11
Ньюком (Newcomb) 27, 34, 216
Ньютон (Newton) 23, 24, 26, 28—30, 37, 80, 102, 214, 236, 259, 261, 363, 364, 506, 603

Озерной Л. М. 647
Оке (Oke) 473, 536
Ольберс (Olbers) 16, 651, 652
Онес (Omnes) 636
Оорт (Oort) 434, 510
Оппенгеймер (Oppenheimer) 318, 345, 349, 368, 376
Остроградский О. О. 123, 136

Пал (Pal) 584
Папапетроу (Papapetrou) 269
Патридж (Partridge) 512, 557, 559, 560
Паули (Pauli) 337, 342, 345, 348, 349, 582, 586
Паунд (Pound) 97, 98
Пензиас (Penzias) 533, 534, 548, 549, 551
Пенроуз (Penrose) 376, 637
Петерсон (Peterson) 535
Петров А. З. 159, 163
Пиблз (Peebles) 512, 536, 548, 554, 588, 590, 593, 594, 601
Пифагор (Pythagoras) 19, 20, 82
Планк (Planck) 309, 452, 543, 554, 572, 658
Платон (Platon) 15
Понтекорво Б. 597, 646
Попов В. Н. 342
Прокл (Proclos) 15
Птолемей (Ptolemy) 15
Пуанкаре (Poincaré) 32
Пули (Pooley) 490

Пью (Pugh) 251
Рассел (Russel) 457, 458, 460, 522, 523, 594
Ребка (Rebka) 97, 98
Резерфорд (Rutherford) 521
Ривз (Reeves) 595
Риз (Rees) 538
Риман (Riemann) 22, 23, 34, 147, 155, 162, 408, 409, 415
Риндлер (Rindler) 525
Ришар (Richer) 454
Риччи (Ricci) 23, 149, 151, 158, 162, 235, 271, 408, 409, 504
Робертсон (Robertson) 203, 212, 256, 434, 438—440, 450, 482, 503, 505, 540, 619, 634, 657
Робинсон (Robinson) 103
Ролл (Roll) 548, 549
Рудерман (Ruderman)
Рэлей (Rayleigh) 553

Саккери (Saccheri) 15
Скотт (Scott) 469, 470, 474, 533
Слайфер (Slipher) 444, 475
Снайдер (Snyder) 376
Соломон (Solomon) 536
Солпитер (Salpeter) 103, 535
Старбунов Ю. Н. 584
Стефан (Stefan) 72, 629
Сэндидж (Sandage) 462, 466—469, 475, 477, 479, 480

Тамман (Tammann) 466
Тауринус (Taurinus) 16
Тирринг (Thirring) 259
Торн (Thorne) 341
Тсао (Tsao) 11
Тузи Насириэддин (Nasir al din al Tusi) 15
't Хуфт ('t Hooft) 345
Тэндон (Tandon) 584

Уамплер (Wampler) 536
Уилер (Wheeler) 18, 341
Уилкинсон (Wilkinson) 548, 549, 657, 559, 560
Уиттекер (Whittaker) 32
Ульрих (Uhlrich) 598
Уокер (Walker) 434, 438—440, 450, 482, 503, 505, 540, 619, 634, 657

Фаддеев О. О. 342
Файнберг (Feinberg) 584
Фаулер (Fowler) 360, 521, 522, 585, 593, 594, 602
Фейнман (Feynman) 659
Ферми (Fermi) 141, 574, 580, 582, 586, 631
Филд (Field) 532, 533, 536—538, 627
Фирц (Fierz) 662
Фицджеральд (Fitzgerald) 32
Фок В. А. 251
Форвард (Forward) 304
Фридман А. 434, 505, 636, 669

Хаббл (Hubble) 445, 451, 467, 469 471, 475—477, 479, 480, 483, 510, 521, 530, 656, 659
Хагедорн (Hagedorn) 632
Хогарт (Hogarth) 659
Ходж (Hodge) 460
Хойл (Hoyle) 360, 490, 521, 522, 563, 585, 593, 594, 602, 657, 659, 660
Хоукинг (Howking) 376
Хьюз (Hughes) 104
Хьюмасон (Humason) 476, 477

Цвикки (Zwicky) 434

Чандрасекар (Chandrasekhar) 339, 340, 341, 376

Шапиро И. (Shapiro I. I) 218—222, 671, 672
Шапиро С. (Shapiro S. L.) 511
Шварцшильд (Schwarzschild) 182, 189, 190, 195, 196, 199, 211, 225—227, 230, 231, 247, 367, 373, 374, 376, 448
Шепли (Shapley) 462—465, 475
Шифф (Schiff) 251
Шкловский 551
Шмидт (Schmidt) 480, 521, 538
Шумахер (Schumacher) 16

Эддингтон (Eddington) 198, 585, 655
Эйбелл (Abell) 434
Эйлер (Euler) 30
Эйнштейн (Einstein) 18, 23, 28, 32—34, 37, 102, 165, 172, 174, 192, 198, 210, 229, 235, 270, 369, 390, 399, 501, 502, 505, 514, 543, 632, 653, 654, 656
Эригена(Erigena Johanus Scotus) 26
Этвеш (Eötvös) 25, 80, 83, 100

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аберрация света звезд 254
Абсолютная светимость, *см.* Светимость, расстояние фотометрическое
Абсорбционный эксперимент с Li′ 102
Аддитивность энергии и импульса 189, 190
Анизотропия, *см.* Изотропия
Анизотропия скоростей 474
Антенны температура 534, 544, 556
Антивещество во Вселенной 502, 636
Антиматерия, необходимость в релятивистской квантовой механике 76, 78
Антисимметризации оператор 133
Апертурные поправки 473
Асимптотическое поведение метрики 186, 187, *см. также* Пространства с почти плоской метрикой
Астрономическая единица 453, 454, 646
Аффинная связность в постньютоновском приближении 232, 233
— — в приближении слабого поля 271
— — для зависящей от времени изотропной метрики 362, 367
— — для максимально симметричного пространства 415
— — для метрики Робертсона — Уокера 503
— — для статической изотропной метрики 194
— — малые возмущения 343, 621
— — определение 85—90
— — преобразование 116—118
— — шпур 123

Барионное число 502, 630—632
— — сохранение 569
Белые карлики 96, 334—337, 342
Биркгоффа теорема 363, 364, 371, 375, 506
Болометрические светимости 452, *см. также* Светимость и расстояния фотометрические
Бранса — Дикке теория
— космологическая модель, 662—671
— отклонение света 210
— параметры Робертсона 199
— — получение уравнений поля 174—177
Бранса космологическая, постньютоновское приближение 264—268
— — прецессия перигелия 213
Бэта-распад, *см.* Слабые взаимодействия

Вектор 4-скорости 59, 60, 139, 146, 261, 321, 367, 441, 620, 623
Вейля тензор 162, 163
Венера, постоянство G 670
— прецессия перигелия 216
— радарного эха задержка 222
— элементы орбиты 677
Венециано модель 631
Вероятности излучения гравитационных волн, *см.* Гравитационные волны, вероятность излучения
Вес (тензорных плотностей) 114
Видимая звездная величина 453—454
— — — предел 200-дюймового телескопа обсерватории Маунт-Паломар 460, 463
Видимая светимость, *см.* Светимость и расстояние фотометрическое
Вириала теорема 509, 511, 512
Внешнее произведение 131, 132
Внешняя производная 132—136
Водорода линия 21 см в радиодиапазоне 533, 534
Возраст Вселенной 506, 516—518, 521—523, 661, 662, 669—670
Волновая зона 273, 282
Вращение нормальных мод 613, 614, 629
— ньютоновского ведра с водой 29, 508
— скорость вращения звезд 337, 349, 350, *см. также* Угловой момент, Гипертонкая прецессия, Изотропные пространства, Керра метрика
Второй потенциал 237
Вырожденность, *см.* Ферми-газ, Нейтрино, Нейтринные звезды, Принцип Паули, Белые карлики
Вязкость объемная 70—72, 609, 620, 634—636
— нейтрино 636
— сдвига 70—72, 609, 620, 636

Галактики, вклад в плотность космической массы и в плотность излучения 510, 511
— истинная природа открытых 464
— как привилегированные наблюдатели 436
— классификация 678
— массы 509
— образование 602—611, 614—619, 655
— отдельные яркие (таблица) 678
— плотность и ток 440—442, 492
— размеры 466
— распределения яркости 452, 453
— эволюция 474, 520, 511
— ядра 492
— ярчайшие в скоплениях 469, 471, 478, 480, *см. также* Скопления галактик
Галилея относительность 23, 28, 33, 108
Гармоничность координат 179, 181
— — в постньютоновском приближении 234
— — в приближении слабых полей 273, 279
— — для произвольных статических изотропных метрик 195
— — для решения Шварцшильда 197
— — Робертсона параметры 198, 199
Гаунта фактор 536, 537
Гаусса — Остроградского теорема 123, 135, 136
Гауссова кривизна 21, 161, 164, 165, 409, 412
Гауссовы нормальные координаты, *см.* Нормальные координаты Гаусса
Гелий, синтез в горячей Вселенной 584—602
— содержание He^3 в современной Вселенной 592—595, *см. также* Нуклеосинтез
— — He^4 в современной Вселенной 521, 537, 583, 584, 597—600, *см. также* Нуклеосинтез
Геодезическая девиация 165
— прецессия 255, 256
Геодезические 92
— для максимально симметричного пространства 415
Геометрия Гаусса — Бойяи — Лобачевского 17—22, 418
Герцшпрунга — Рассела соотношение 457, 458, 460, 522, 599
Гиады 456, 458, 460—461
Гидродинамика, *см.* Тензор энергии-импульса, Идеальные жидкости, Постньютоновское приближение
Гидростатическое равновесие 145, 146, 328
Главная последовательность (звезд) 457, 459
Голубое смещение космологическое 444
Горизонт
— событий 525
— частиц 523, 524
Горячая Вселенная 547
Гравитационная сила, *см.* Сила
Гравитационная энергия звезд 324, 325, 332, 333, 352, 353
Гравитационного поля уравнения 167—190
— — — в космологии 502—505, 568
— — — в постньютоновском приближении 235
— — — в приближении слабых полей 270, 272
— — — в тетрадном формализме 399
— — — для гравитационного коллапса 369
— — — для звездной структуры 321
— — — для малых возмущений 343
— — — из принципа действия 389
Гравитационное излучение 168, 183, 270—317, 362, 624—626
— — вероятность излучения 297—306
— — вращающимся твердым телом 292—294
— — для атомных переходов 308
— — от вибрирующего вещества 290, 292
— — от контактных столкновений свободных частиц 285—287, 308, 309
— — поперечность 299, 307
Гравитационный потенциал 92, 93, 196, 326
Гравитоны 168, 169, 307—311, 632
— космический фон 513, 514, 632, 633
Градиента оператор 122, 123, 125, 132

Давление 62, 64, 65, 67, 145, 146, 505, 654
Даламбертиан 49, 180
Далекий инфракрасный фон, *см.* Микроволнового излучения фон

Датирование по урану 521, 522
Движущиеся скопления 456
Дейтерия содержание в современной Вселенной 10, 554, 595, *см. также* Нуклеосинтез
Дельта-функция 53, 144, 283
де Ситтера космологическая модель 419, 654, 655
— — — — при гравитационном коллапсе 373, 374
Джинса масса и волновое число 603—611, 614, 615, 618—619
Дивергенция векторов, тензоров 123, 125, 132
Динамические симметрии 108
Дисперсия в межгалактической среде 539—542
Диссипация, *см.* Вязкость, Теплопроводность, Энтропия
Дифференциальные формы 131, 132
Длина наибольшей окружности в максимально симметричном замкнутом пространстве 417, 524
Доплера эффект 43, 95, 318, 444, 456

Евклида пятый постулат 14—16

Запаздывающие потенциалы, 273, 659
Заряд, сохранение 54, 130, 243, 388
— наличие во Вселенной 502, 636
— плотность во Вселенной 508—514, 569, 636
Затмение, *см.* Экспедиции в Собраль и на Принсипи, Солнце
Звездная величина болометрическая
— — абсолютная 453
— — видимая 453
Звезды переменные типа РР Лиры 461—467
— — — Девы 461—467
Звездного света плотность, *см.* Оптический фон
Звук
— затухание 608
— скорость 66, 67, 602, 604, 606, 611, 612, 618
Земля, возраст 521
— длина суток 671
— и изменение масштаба времени 99
— как гравитационная антенна 304
— некоторые характеристики 676, 677
— прецессия перигелия 215
Земля, спутники, прецессия орбитального гироскопа 251—254
— температура поверхности 672
— угловой момент 255, 256

Идеальная несжимаемая жидкость 61—65, 145, 261
Идеальные газы 56, 144, 286, 349, 350, 386, *см. также* Ферми-газы
Идеальные жидкости в гравитационном поле 145—147
— — в постньютоновском приближении 261—264
— — тензор энергии-импульса 62—67
Иерархическая космологическая модель 433
Излучение черного тела, *см.* Температура черного тела, Микроволнового излучения фон, Распределение Планка
Изменение масштаба времени в специальной теории относительности 42, 43
Изменение скорости хода часов (в поле тяготения) 5, 88, 100, 200
— — — — белые карлики 337
— — — — гравитационный коллапс 373—375
— — — — звездные скопления 360
— — — — квазары 318
— — — — максимальные значения на поверхности звезд 359
— — — — нейтронные звезды 341
Изометрии 400—432, 436, 655
Изотропия Вселенной 436
— инерции 102—104
— микроволнового фона 556—562, 611, 617, 636
Изотропная форма статической изотропной метрики 192—195, 201
Изотропные пространства 192, 403—406, 413, 420, 431, 435—439
Изофотальный угловой диаметр 451, 452
Индуцированное излучение
— — гравитационных волн 309, 310
— — электромагнитных волн 526, 527
Импульс, *см.* Сохранение энергии и импульса, Тензор энергии-импульса
Индуцированное излучение 310, 528, 533
Инерциальные системы отсчета 28—32, 102—104, 258—260, 507

Интерферометрия (в радиоастрономии) 209, 210, 457, 489
Инфракрасные расходимости 309
Инфракрасный фон, *см.* Микроволнового излучения фон

Калибровочная инвариантность для гравитации 273—276, 278—280, 311—313, 315
— — для электромагнетизма 56, 109, 128, 129, 133, 178—179, 277, 278, 386—387
Квадрупольное приближение 287—293, 297, 307
Квазитрансляции 414, 439, 440
Квантовая теория гравитации 307, 308
Кварки 630, 633
Киллинга векторы 400—432, 438
Киральные симметрии 108, 130
Ковариантное дифференцирование 119—122
— — вдоль кривой 126—128
— — в тетрадном формализме 394—396
— — p-форм 132
Ковариантные векторы и тензоры 48—52, 109—111
Коллапс гравитационный 368—375
— — и избыток гелия 594
— — и недостающая масса 511, 512
— — и сингулярность Шварцшильда 225—227, *см. также* Черные дыры
Коллапсировавшее скопление галактик 512, 513, 679
Коммутационные соотношения
— — ковариантных производных 157
— — операторов рождения и уничтожения 311
— — спиновых матриц 74
Конвективное равновесие 322, 350
Конгруэнция 101, 155
Контравариантные векторы и тензоры 48—52, 109—113
Конформные преобразования 40, 163, 164
Координатные тензоры и скаляры 393
Координатные условия 177—180, *см. также* Гармоничность координат
Кораллы ископаемые 672
Космические лучи 514, 562—564, 584
Космический масштабный фактор 439, 442—444, 467—478
Космологическая постоянная 171, 652
Космологический принцип 434—439
— — абсолютный 490
Коши задача 181, 182
Красное смещение космологическое 318, 442—445, 452, 470—486, 490, 492, 650, *см. также* Космический масштабный фактор, Замедления параметр, Хаббла постоянная
Кривизна, *см.* Скалярная кривизна, Гауссова кривизна, Риччи тензор, Римана — Кристоффеля тензор кривизны, Постоянная пространственной кривизны
Критическая масса (для подавления флуктуаций) 610, 611
Критическая плотность
— — в космологии 509, 513, 514
— — для белых карликов 338
— — для нейтронных звезд 341
Кронекера символ 110, 113
Кулоновское рассеяние 286, 609
— — k-член 473

Лагранжиан (свободно падающей частицы) 238
Лаймана А-линия 535, 536, 538, 553
Лапласиан 126
Леви-Чивита тензор 52, 115
Лейна — Эмде на уравнение (функции) 332
Леметра космология 654—656
Лензе — Тирринга эффект 259, 260
Лептонное число, сохранение 569
Лестница космических расстояний 454—470
Ли производная 315, 316, 387, 397, 420
Лифт Эйнштейна, мысленный эксперимент 81
Локально-инерциальные системы отсчета 81, 82, 84—88, 106—108, 117, 118, 156, 167, *см. также* Эквивалентности принцип, Тетрады
Локальные евклидовы координаты 18, 81, 82
Лоренца калибровка 178, 277
Лоренца преобразования 32, 37—42, 185, 311, 312, 392, 558, 559
— — инфинитезимальные 73; 74
— — собственные 40, 50
Луна, длина лунного месяца 671, 672
— как гравитационная антенна 304
— отражение лазерных сигналов 671

Луна, различные свойства 677
— ускорение к Земле 27

Магнитные поля 349, 350, 543
Мазеры 526
Майкельсона — Морли эксперимент 31, 38
Максвелла — Больцмана распределение 276, 286, 592
Максвелла уравнения 32, 33, 37, 55, 56, 141, 142, 178, 190, 270, 271, 387, 502, 658
Максимальная температура 631, 632
Максимально симметричные подпространства 422—431, 437, 438, 492
Максимально симметричные пространства 405—422
Марс, параллакс 454
— прецессия перигелия 223
— элементы орбит 677
Масса в решении Керра 260
— в решении Шварцшильда 198
— звездной структуры 323, 324
— коллапсирующей звезды 373
— равенство гравитационной и инертной 6, 23, 24
— эквивалентность энергии 47, *см. также* Чандрасекара предел, Критическая масса, Плотность Вселенной, Джинса масса и волновое число, Оппенгеймера — Волкова предел
Масштабные изменения (при наблюдении отклонения света) 208
Масштабный фактор, *см.* Космический масштабный фактор
Маха принцип 30, 102—104, 174, 257—260, 506
Межгалактическое вещество 511—514, 525, 533—542, 555
Межзвездное вещество 465, 466, 472, 473, 477, 530, 600
Меркурий, задержка радарного эха 220—222, 225
— постоянство ньютоновской константы 670
— прецессия перигелия 27, 28, 214—216, 249—251
— элементы орбиты 677
Местная Группа (галактик) 433, 466—467, 475, 476
Метрика 18, 19, 85—87, 101, 102, 110, 121, 122, 391, 392, *см. также* Керра метрика, Максимально симметричные пространства, Максимально симметричные подпространства, Постньютоновское приближение, Робертсона — Уокера метрика, Шварцшильда метрика, Приближение слабых полей
Метрического тензора детерминант 113, 119, 122
Микроволнового излучения фон 434, 435, 495, 513, 534, 537, 542—564, 585, 586, 597, 601, 608, 611, 617, 627, 653, 656, 657
— — — анизотропия 555—564
Минковского тензор 38, 48, 51, 110
Множества (ориентируемые) 136
Модуль расстояния 453, 454
Мультипольные поля 245—249
Мюоны в нейтронных звездах 348
— в ранней Вселенной 567, 569, 572, 573
— сохранение числа 569

Наименьшего действия принцип для гравитационных полей 386—388, 391—398
— — — для звездных структур 326—328, 333
— — — для плазмы несталкивающихся частиц 382—384
— — — для произвольных материальных систем 384, 385
— — — для свободно падающих частиц 94, 96
— — — для электродинамики 385
Населения звездные типа I и типа II 465—467
Недостающая масса, *см.* Плотность Вселенной, Межгалактическое вещество
Нейтрино в ранней Вселенной 566, 567, 572—588, 586—588, 597, 601
— вырожденность 580, 581, 601, 602
— вязкость 433, 635
— излучаемые белыми карликами 340
— излучаемые нейтронными звездами 342, 346, 348
— космический фон 514, 652
— солнечные 596—598
— температура 567, 583—592, 601
Нейтронные звезды 318, 341—349
Нейтроны в белых карликах 340
— в нейтронных звездах 342—348
— в ранней Вселенной 566—569, 581—590, 601, 602
— гравитационная и инертная массы 24
— и *r*-процессы 521
— масса 675

Нелинейность уравнений поля 167, 185, 189
Непрерывное рождение 492, 657
Несжимаемые звезды 333, 355—360
Нормальные координаты Гаусса 367, 439
Нормальные моды, вращательные 614—619, 626, 627
— — излучательные 625, 626
— — сжатия 614—619, 627, 628
Нулевой тензор 50, 112
Нуклеосинтез 512, 520, 521, 546, 547, 567, 585—594, 625, 677, 678
Ньютоновская космология 364, 507, 508, 604, 615—622, 627
Ньютоновские звезды 332—341
Ньютоновская постоянная (G) 168, 674
— — в теории Бранса — Дикке 174, 265, 268
— — изменение со временем 661—672
— — связь с атомными константами 659, 660
Ньютоновский предел уравнений поля 168, 173

Обратный метрический тензор 89, 90, 110, 113, 193
Обратных квадратов закон 26
Общая ковариантность 106—108, 118, 122, 138, 142, 149, 311, 381, 386—388
Однородность Вселенной (пространственная) 437—438
Однородные пространства 404, 405, 414, 430—432
Ольберса парадокс 650—652
Оппенгеймера — Волкова предел 318, 349, 368, 376
Оптическая теорема 298
Оптическая толща (межгалактического пространства) 526—539
— — очень ранней Вселенной 633, 634
Ориентируемое множество 136
Ортогональные координаты 125, 126
Осциллирующие космологические модели 548, 636, 637, 653
Отклонение света гравитационными полями 33, 34, 204—210
— — — — — в произвольном постньютоновском поле 239
— — — — — для космического микроволнового фона 556
— — — — — при наблюдении прецессии гироскопа 251
Отклонение света гравитационными полями 211
— — — — — при исследовании коллапсирующих галактик 512, 513
Открытые скопления 461, 466, 469

Палатини тождества 313
Параллакс 447, 453—456
— тригонометрический 453, 455
— Параллельный перенос 128, 139—141, 151—153
Параметр замедления (q_0) 10, 471—481, 493, 502, 509, 514, 517, 520, 660, 648—649
— — эффективный 475—480
Парсек 453
Паули принцип 337, 342, 348, 349, 582, 586
Переходная плотность 343
Периодические космологические модели, *см.* Осциллирующие космологические модели
Период «отдыха» 654, 655
Петрова обозначения 159
Пионы 565, 571, 659
Плазменная частота 541, 604
Планка распределение, гравитационное излучение 309
— — и наблюдаемые светимости 452
— — электромагнитный фон 544, 543, 552—554, 572, 658
Плотность Вселенной 10, 509—513, 525, 653, 656, 668—669
Плотность перехода 343
Плотность потока космического радиоизлучения 484—490
Поглощение гравитационного излучения 295, 296, 307, 308
— поправка на фотометрические расстояния 462—464, 473, 474, 476
— электромагнитного излучения в межгалактическом пространстве 526—528, 534, 651
Поднимание и опускание индексов 48, 49, 109, 110, 113, 272
Показатель цвета 453, 454
Поле электрона Дирака 72, 393
Политропы 330—335
Положительность энергии 187
Поляризация гравитационных волн 274—276, 280, 281
— электромагнитных волн 277—279
Постньютоновское приближение 229—268, 294
Представления группы Лоренца 72—75, 390, 392, 394

Прецессия гироскопа 141, 251—257, 268
Прецессия перигелия 27, 28, 33, 215—221, 248—251
Прецессия сверхтонкая 256
Прецессия узлов 27, 221
Приливные силы 82, 84, 102, 671, 672
Принцип наименьшего действия, *см.* Вариационный принцип
Принцип общей ковариантности, *см.* Общая ковариантность
Принцип эквивалентности, *см.* Эквивалентности принцип
Прицельный параметр 204—206, 447
Проблема движения 231, 232
Пространства с почти плоской метрикой 182—187, 193
Пространственной кривизны постоянная (k) 371, 372, 431, 439, 490, 491, 514, 515—517, 567, 653, 654
Протоны
— в белых карликах 340, 344—346
— в космических лучах 565, 585
— в нейтронных звездах 342
— в ранней Вселенной 566—568, 584—593, 600, 602
— масса 675
— p-p-циклы 596, 597
Прямое произведение
— — p-форм 131
— — тензоров 50, 112
— — тензорных плотностей 115
Пуанкаре группа 40
Пуанкаре лемма 133
Пульсары 320, 349, 350
— гравитационное замедление времени 225
— гравитационное излучение 293, 297
— и межгалактическая дисперсия 541, 542, *см. также* Нейтронные звезды
p-формы 130—136

Радарного эха задержка 221—225, 454, 671
Радиоисточники, подсчеты числа 483—490, 495, 496, 511, 520, 521
— каталоги 489
Радиометры 648, 649
Рассеяние
— гравитационного излучения 295
— комптоновское 537, 564
— томсоновское 529, 538, 539, 609, 611, 617
Расстояние (космическое), измерение 445—455
— параллактическое 447—448, 450
— по собственному движению 450, 519
— по угловому диаметру 449, 450, 519
— собственное 442, 450
— фотометрическое 448—450, 462—488, 491, 494, 518, 519, 651
Расширение Вселенной, *см.* Космический масштабный фактор, Красное смещение (космологическое)
Резонансное поглощение гравитационного излучения 298—307
— — электромагнитного излучения 103, 529—535
Рекомбинация водорода 542, 551, 557, 564, 608, 617
Рентгеновское излучение
— — от коллапсировавшего созвездия 513
— — от пульсаров 319, 320
— — от Центавра А 565
— — фон 508, 509, 537, 538, 564, 565
Римана — Кристоффеля тензор кривизны 147—165, 170, 408, 415
Риччи тензор 151, 159—163
— — в максимально симметричных пространствах 408, 409
— — в первом порядке 182, 183, 186
— — в постньютоновском приближении 235
— — в приближении слабых полей 271, 272, 278
— — в сопутствующих координатах 362
— — второго порядка 184
— — для изотропной метрики, зависящей от времени, в стандартных координатах 358, 359
— — для метрики Робертсона — Уокера 503, 504
— — для статической изотропной метрики в стандартных координатах 358
— — и уравнения поля 170, 174
— — малые возмущения 343, 389, 390, 622
Робертсона — Уокера метрика 434, 438—440, 450, 482, 491, 503—505, 619, 634, 657
Робертсона параметры 198, 199
— — в теории Бранса — Дикке 267
— — отклонение света 212

Робертсона параметры перигелия 219
— — прецессия гироскопа 256, 257
— — радарного эха задержка 223, 224
Ротор 56, 123, 125, 134
Рунге — Ленца вектор 248
Рэлея — Джинса закон 534, 551—553, 657
r-процесс 521, 522

Свертка индексов 50, 82, 116, 121
Сверхмассивные звезды 318, 350—355
Света скорость 32, 40, 85, 240, 675
Светимость абсолютная 448, 449, 451, 457, 461—470, 596—598
— болометрическая 452—453
— видимая 448—453, 458
— визуальная 452
— голубая 452
— инфракрасная 452
— ультрафиолетовая 452
— фотографическая 452, *см. также* Расстояние фотометрическое
Свободное падение 81—83, 87, 88, 138—140, 150, 166, 201—204, 238—240, 440
Сдвига тензор 70
Серого тела распределение 553
Сила гравитационная 84—86, 92, 140, 143
— релятивистская 43—46, *см. также* Сохранение энергии и импульса
Сильные взаимодействия в нейтронных звездах 351
— — в ранней Вселенной 629—637
Сильный принцип эквивалентности 82, 83
Симметричные пространства 400—432, *см. также* Киллинга векторы, Максимально симметричные пространства, Максимально симметричные подпространства
Сингулярности в конце эволюции Вселенной 506, 525, 626
— в начале эволюции Вселенной 505, 524, 627, 652, 665—668
— в шварцшильдовской метрике 637, 638
Синтез ядер, *см.* Нуклеосинтез
Скалярная кривизна 151, 159—162, 169, 170, 225, 389, 390, 408, 409, 504
Скопления галактик 469, 511, 512, 537, 679
Скопления звездные 457, *см. также* Рассеянные скопления, Шаровые скопления
Скорость света, *см.* Света скорость
Скотт-эффект 469, 474
Слабые взаимодействия
— в нейтронных звездах 338, 342, 344
— в *p*-*p*-циклах 595, 596
— в ранней Вселенной 572, 573, 586—591, 601
— He^3-распад 583, 584
— расходимости, сравнимые с гравитацией 309
— эксперименты с нейтрино от Солнца 597, 598
Слабый принцип эквивалентности 83
Слабых полей приближение 87, 273—276
Смешанный тензор 110
Собственное время 38, 42, 84, 89, 90, 202, 440
Собственные значения метрического тензора 101, 155, 156, 409
Собственные преобразования Лоренца, *см.* Лоренца преобразования
Собственный объем 114, 125, 194, 417, 441, 483, 491
Сопутствующие координаты 364—368, 440—442, 518
Сохранение заряда и тока 53—55, 142, 286
Сохранение энергии и импульса в гидродинамике 62—64, 262, 263
— — — — в квадрупольном приближении 257, 288
— — — — включая гравитацию 184
— — — — в космологии 441, 505, 508, 623
— — — — в приближении слабых полей 272
— — — — в стационарной космологической модели 492
— — — — и антисимметрия тензора углового момента 262, 263
— — — — и видимая светимость 449
— — — — и общая инвариантность действия 384, 396—398
— — — — и тензор энергии-импульса 57, 143, 144
— — — — лоренц-инвариантность 46, 47
— — — — ньютоновское приближение 235—238, 240—243
— — — — постньютоновское приближение 243

Сохранение энергии и импульса, эквивалентность энергии и массы 46, 47
Спектральные классы звезд 457
Спектральный индекс 485—489
Спиральность гравитационных волн 276, 302, 307, 310, 311
— электромагнитных волн 277
Сплюснутость Солнца (несферичность) 10, 217, 218
Спин 61, 138—143
— матрицы 74, 75, 395, 396
Спиновая температура 633, 634
Спинорные поля 75, 76, 392, 393
Стабильность и нестабильность
— белых карликов 336—339
— звезд вообще 326—328
— космологической модели Эйнштейна 659
— нейтронных звезд 338, 345
— расширяющейся Вселенной 602—630
— сверхмассивных звезд 355
Стандартная форма изотропной метрики 193—195, 200, 320, 321, 361—364
Статистический параллакс, *см.* Собственное движение
Статическая изотропная метрика 193
Стационарная космологическая модель 490—496, 656—659
Стефана — Больцмана закон 72, 310, 350, 545, 572, 629, 676
Стокса теорема 136, 150
Суммарное гравитационное красное смещение 95
Суммирования условие 38
Сферическая симметрия, *см.* Изотропные пространства, Изотропия

Тензорные плотности 113—115, 135
Тензор электромагнитного поля 65, 56, 134
Тензор энергии-импульса 54—57, *см. также* Сохранение энергии и импульса
— — в стационарной космологической модели 491
— — гравитации 185—191
— — гравитационного излучения 278, 279
— — для сталкивающихся свободных частиц 283
— — идеальной жидкости 69, 143
— — как функциональная производная действия 381, 382, 395—397
Тензор энергии поля Бранса — Дикке 178 — 180
— — симметрии 396
— — согласно космологическому принципу 440
— — точечных частиц 65, 142, 245, 385
— — фурье-компоненты 280
— — электромагнитного поля 56, 143, 382
Тензоры 48—51, 109—112
Тепловая энергия (звезды) 324, 325 333, 334, 352—355
Тепловой поток 70, 619
Теплопроводность 69—71, 609, 610, 618, 635
Тетрады 390—399
Тождества Бианки 323, 390, 656
— — в космологии 505
— — в теории Бранса — Дикке 178 181
— — и общая ковариантность действия 390
— — и приближение слабого поля 272
— — и уравнения поля 170, 171, 323
— — неоднозначность решений 178, 181
— — получение 164
Томасова прецессия 141, 255, 256
Томсоновское сечение 609, 675
Тормозное излучение
— — гравитационное 285, 286
— — электромагнитное 536, 537, 564
Трансляции, *см.* Однородные пространства
Тригонометрический параллакс, *см.* Параллакс
Турбулентность 634, 637

Угловой диаметр и расстояние по угловому диаметру 449—453, 493 510, 518
Угловой момент
— — в метрике Керра 260
— — гравитационного поля 184
— — и потенциал поля тяготения 245—247
— — определение 60, 144, 187
— — орбит планет 211, 248, 681
— — сохранение 60
Угол развития (θ) 516—518, 615, 616
Ультрафиолетовые расходимости 11, 312

Уравнения поля Эйнштейна, *см.* Гравитационного поля уравнения
Уравнения состояния 64, 65, 332, 342, 504, 505
Уравнения Эйлера 63, 593

Фарадеевское вращение 542
Ферми-газы 338, 339, 346, 568, 571, 586, 631
Ферми-перенос 141
Фокальный параметр эллипса 213
— — орбит планет 677
Форм-инвариантные тензоры 400, 413—416, 429, 435, 438, 440
Фотоны 99, 100, 207, 448, *см. также* Гамма-лучи, Света скорость, Микроволнового излучения фон
Фотоэлектрическое измерение отклонения света 209

Хаббла постоянная (H_0) 471—481, 489, 540, 531, 537, 655
Химический потенциал 569, 570, 591, 600, 601
Холодные модели Вселенной 600

Цефеиды классические 461—467, 473, 474
Циана линия поглощения 548—551
Циклическая производная антисимметричных тензоров 124
Циклическое правило сумм 158, 161

Чандрасекара предел 339, 341, 368, 376
Частицы с нулевой массой покоя 47, 85, 204, 285, 307
Частоты вибрации звезд 333, 350, 355
4-векторы 48, 52
Черного тела температура 544, 545
— — — эквивалентная 544, 545
Черные дыры 318, 368, 512
Число частиц и ток 63, 263, 307, 623

Шаровые скопления 460—462, 467—469, 472, 479, 480, 523, 599, 608
Шварцшильда метрика 195—198, 247
Шварцшильда сингулярность 225—227, 356, 373—376

Эддингтона — Леметра космологическая модель 655, 656
Эйнштейна — де Ситтера космологическая модель 517, 619, 620
Эйнштейна космологическая модель 653, 656
Эквивалентности принцип 13, 29, 80—105, 117, 118, 147
— — и геодезическая девиация 165, 166
— — и геометрическая оптика 206, 207
— — и квантовая теория гравитации 312
— — и космография 433
— — и параметры Робертсона 198
— — и прецессия гироскопов 255
— — и теория Бранса — Дикке 174
— — и тетрадный формализм 390
Экспедиции в Собраль и на Принсипи 208, 209
Электромагнитное излучение в межгалактическом пространстве 526—537
Электромагнитные силы 56, 142
Электроны (и позитроны)
— в белых карликах 338—340
— в космических лучах 564, 565
— в нейтронных звездах 341, 345—347
— в ранней Вселенной 566—568, 571—579, 584—588, 598—601
— гравитационная и инерциальная масса 23, 24
— сохранение 569, *см. также* Комптоновское рассеяние, Плазменная частота, Рассеяние комптоновское
Энтропия, *см. также* Удельная энтропия
— для собственного объема 571—574
— рост 70, 623—634, 637
— 4-вектор тока 69
Эра преобладания вещества 515—525
Эталонная космическая координатная система 435—437
Эталонная космологическая модель 490—495, 655—678
Эфир светонесущий 32

Юпитер, гравитационное излучение 293, 294
— отклонение света 206
— элементы орбиты 677

Якобиан преобразования 114, 135
Яркость 451
Ярчайшие звезды (как индикатор расстояний) 467, 472, 474—476

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 5
Предисловие автора 7
Предисловие автора к русскому изданию 10

Часть I. ВВЕДЕНИЕ

Гл. 1. Историческое введение 13
§ 1. История создания неевклидовой геометрии 14
§ 2. История создания теории тяготения 23
§ 3. История открытия принципа относительности 28
Рекомендуемая литература 34
Цитированная литература 35

Гл. 2. Специальная теория относительности 37
§ 1. Преобразования Лоренца 37
§ 2. Изменение масштаба времени 42
§ 3. Динамика частицы 43
§ 4. Энергия и импульс 45
§ 5. Векторы и тензоры 48
§ 6. Токи и плотности 53
§ 7. Электродинамика 55
§ 8. Тензор энергии-импульса 57
§ 9. Спин 60
§ 10. Релятивистская гидродинамика 61
§ 11. Релятивистская реальная жидкость * 67
§ 12. Представления группы Лоренца *. 72
§ 13. Временна́я последовательность и античастицы *. 76
Рекомендуемая литература 78
Цитированная литература 79

Часть II. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Гл. 3. Принцип эквивалентности 80
§ 1. Формулировка принципа 80
§ 2. Гравитационные силы 84
§ 3. Связь между $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ 87
§ 4. Ньютоновское приближение 92
§ 5. Изменение масштаба времени 93
§ 6. Знаки времени 101
§ 7. Относительность и анизотропия инерции 102
Рекомендуемая литература 104
Цитированная литература 105

Гл. 4. Тензорный анализ 106
§ 1. Принцип общей ковариантности 106
§ 2. Векторы и тензоры 109
§ 3. Тензорная алгебра 111
§ 4. Тензорные плотности 113
§ 5. Преобразование аффинной связности 116
§ 6. Ковариантное дифференцирование 119

* Может быть пропущено при первом чтении.

§ 7. Градиент, ротор и дивергенция 122
§ 8. Векторный анализ в ортогональных координатах * . . 124
§ 9. Ковариантное дифференцирование вдоль кривой 126
§ 10. Аналогия с электродинамикой *. 128
§ 11. p-формы и внешние производные *. 130
Цитированная литература 137

Гл. 5. Эффекты гравитации 138
§ 1. Механика частицы 138
§ 2. Электродинамика 141
§ 3. Тензор энергии-импульса 143
§ 4. Гидродинамика и гидростатика 145
Цитированная литература 146

Гл. 6. Кривизна 147
§ 1. Определение тензора кривизны 147
§ 2. Единственность тензора кривизны 149
§ 3. Обход вдоль замкнутого контура с помощью параллельного переноса 151
§ 4. Гравитация в криволинейных координатах 154
§ 5. Коммутации ковариантных дифференцирований 157
§ 6. Алгебраические свойства 158
§ 7. Кривизна в N-мерном пространстве * 159
§ 8. Тождества Бианки 164
§ 9. Геометрическая аналогия * 164
§ 10. Геодезическая девиация * 165
Рекомендуемая литература 166
Цитированная литература 166

Гл. 7. Уравнения поля Эйнштейна 167
§ 1. Получение уравнений поля 167
§ 2. Другой вывод * 172
§ 3. Теория Бранса и Дикке 174
§ 4. Координатные условия 177
§ 5. Задача Коши 181
§ 6. Энергия, импульс и угловой момент гравитационного поля 182
Рекомендуемая литература 190
Цитированная литература 190

Часть III. ПРИМЕНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Гл. 8. Классические опыты по проверке теории Эйнштейна 191
§ 1. Общий случай статической изотропной метрики . . . 192
§ 2. Решение Шварцшильда 195
§ 3. Другие метрики 198
§ 4. Общий вид уравнений движения 200
§ 5. Неограниченные орбиты: отклонение света Солнцем 204
§ 6. Замкнутые орбиты: смещение перигелия 211
§ 7. Запаздывание радарного эха 218
§ 8. Сингулярность Шварцшильда * 225
Рекомендуемая литература 227
Цитированная литература 227

Гл. 9. Постньютоновская небесная механика 229
§ 1. Постньютоновское приближение 230
§ 2. Динамика частицы и фотона 238

§ 3. Тензор энергии-импульса 240
§ 4. Мультипольные поля 244
§ 5. Прецессия перигелия 248
§ 6. Прецессия движущегося по орбите гироскопа 251
§ 7. Прецессия спина и принцип Маха * 257
§ 8. Постньютоновская гидродинамика * 261
§ 9. Приближенные решения в теории Бранса — Дикке . . 264
Рекомендуемая литература 268
Цитированная литература 268

Гл. 10. Гравитационное излучение 270
§ 1. Приближение слабого поля 271
§ 2. Плоские волны 274
§ 3. Энергия и импульс плоских волн 278
§ 4. Возбуждение гравитационных волн 280
§ 5. Квадрупольное излучение 287
§ 6. Рассеяние и поглощение гравитационного излучения 295
§ 7. Детектирование гравитационного излучения 298
§ 8. Квантовая теория гравитации * 307
§ 9. Гравитационные возмущения в гравитационных полях * 313
Рекомендуемая литература 316
Цитированная литература 316

Гл. 11. Равновесие в звездах и коллапс 318
§ 1. Дифференциальные уравнения для звездных структур 320
§ 2. Устойчивость 326
§ 3. Ньютоновские звезды: политропы и белые карлики 330
§ 4. Нейтронные звезды 340
§ 5. Сверхмассивные звезды 350
§ 6. Звезды с однородной плотностью 355
§ 7. Сферически-симметричные поля, зависящие от времени 361
§ 8. Сопутствующие координаты 364
§ 9. Гравитационный коллапс 368
Рекомендуемая литература 377
Цитированная литература 378

Часть IV. РАЗВИТИЕ ФОРМАЛИЗМА

Гл. 12. Принцип наименьшего действия 381
§ 1. Принцип наименьшего действия для вещества. Пример 382
§ 2. Общее определение $T^{\mu\nu}$ 384
§ 3. Общая ковариантность и сохранение энергии-импульса 386
§ 4. Гравитационное действие 389
§ 5. Тетрадный формализм * 390
Цитированная литература 399

Гл. 13. Симметричные пространства 400
§ 1. Векторы Киллинга 400
§ 2. Максимально симметричные пространства. Единственность 407
§ 3. Максимально симметричные пространства. Построение 412
§ 4. Тензоры в максимально симметричном пространстве 419
§ 5. Пространство с максимально симметричными подпространствами 422
Рекомендуемая литература 432
Цитированная литература 432

Гл. 14. Космография 433
§ 1. Космологический принцип 435
§ 2. Метрика Робертсона — Уокера 438
§ 3. Красное смещение 442
§ 4. Измерения расстояний 445
§ 5. Лестница космических расстояний 454
§ 6. Зависимость красного смещения от расстояния 470
§ 7. Подсчеты источников 483
§ 8. Стационарная космологическая модель 490
Рекомендуемая литература 496
Цитированная литература 498

Гл. 15. Космология; эталонная модель 501
§ 1. Уравнения Эйнштейна 503
§ 2. Плотность и давление во Вселенной в настоящее время 508
§ 3. Эра преобладания вещества 515
§ 4. Процессы излучения и поглощения в межгалактическом пространстве 525
§ 5. Космический фон микроволнового излучения 543
§ 6. Температурная история ранней Вселенной 566
§ 7. Синтез гелия 584
§ 8. Образование галактик 602
§ 9. Ньютоновская теория малых флуктуаций 611
§ 10. Общерелятивистская теория малых флуктуаций 619
§ 11. Очень ранняя Вселенная 628
Рекомендуемая литература 639
Цитированная литература 641

Гл. 16. Космология; иные модели 650
§ 1. Наивные модели: парадокс Ольберса 650
§ 2. Модели с космологической постоянной 652
§ 3. Еще раз о стационарной модели 656
§ 4. Модели с переменной гравитационной постоянной . . . 659
Рекомендуемая литература 672
Цитированная литература 673

Приложение. Численные значения некоторых величин 675

Именной указатель 680
Предметный указатель 683

С. Вейнберг

ГРАВИТАЦИЯ И КОСМОЛОГИЯ

Редактор В. Рабин Художник Ю. Болтинский
Художественный редактор Е. Самойлов Технический редактор В. Сизова

Сдано в набор 27/III 1975 г. Подписано к печати 13/X 1975 г. Бумага тип. № 1 $60\times90^{1}/_{16}$=21,75 бум. л. 43,50 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 40,77 Изд. № 2/7648 Цена 4 р. 32 к. Зак. № 0788

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9